МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

~~$\sin(2\alpha+\beta)$~~ $(\cos\alpha \neq 0)$

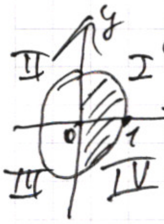
$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta - \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta + \\ + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$



$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos^2 2\beta = \frac{16}{17}$

(значит, $2\beta \in (-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k)$)

$\sin^2 2\beta = 1-\cos^2 2\beta = \frac{1}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} &2\beta = \arcsin \pm\frac{1}{\sqrt{17}} \\ &\cancel{2\beta = \pi - \arcsin \pm\frac{1}{\sqrt{17}}} \end{aligned} \right.$$ — не подходит, т.к. 2β в I или IV четверти

$2\beta = \pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha \pm \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{aligned} &2\alpha \pm \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \\ &2\alpha \pm \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \end{aligned} \right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{array}{l}2\alpha=0\\2\alpha=\pi\\2\alpha=-2\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\\2\alpha=\pi+2\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\end{array}\right.\qquad\left[\begin{array}{l}\alpha=0\\\cancel{\alpha=\frac{\pi}{2}}\text{ — не подходит, т.к. } tg\frac{\pi}{2}\text{ не сущ.}\\\alpha=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\\\alpha=\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\end{array}\right.$$

Найдём $tg(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}})$

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad\sin^2\alpha=\frac{1}{17}$

$1+ctg^2\alpha=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=$

$=\frac{1}{\sin^2\alpha}\Rightarrow ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}-1=16\Rightarrow$

$\Rightarrow tg^2\alpha=\frac{1}{16}\Rightarrow tg\alpha=\frac{1}{4}$

$(\sin\alpha>0\Rightarrow tg\alpha>0)$

$tg(x+\frac{\pi}{2})=\frac{\sin(x+\frac{\pi}{2})}{\cos(x+\frac{\pi}{2})}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{-\cos(\frac{\pi}{2}-x)}=$

$=-\frac{\cos x}{\sin x}=-ctg\,x$

$$\left[\begin{array}{l}tg\alpha=0\\tg\alpha=-\frac{1}{4}\\tg\alpha=-4\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-4;-\frac{1}{4};0\}$.

№2.

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}\\3x^2+3y^2-6x-4y=4\end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases}4x^2-12xy+9y^2=3xy-2x-3y+2\\3x^2+3y^2-6x-4y=4\\3y-2x\geq0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4x^2-15xy+9y^2+2x+3y-2=0 & |\cdot3\\3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 & |\cdot4\\2x\leq3y\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-3y+1)(4x-3y-2)=0\\3x^2+3y^2-6x-4y-4=0\\2x\leq3y\end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (продолжение).

$$\begin{cases} (x-3y+1)(4x-3y-2)=0 \\ 12x^2-45xy+27y^2+6x+9y-6=0 \\ 12x^2+12y^2-24x-16y-16=0 \\ 2x \le 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3y+1)(4x-3y-2)=0 \\ 15y^2-45xy+30x+25y+10=0 \\ 2x \le 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} & x-3y+1=0 \\ & 4x-3y-2=0 \end{aligned}\right. \\ 3y^2-9xy+6x+5y+2=0 \\ 2x \le 3y \end{cases}$$

$$\left[\begin{aligned} & \begin{cases} x=3y-1 \\ 3y^2-27y^2+9y+18y-6+5y+2=0 \\ 6y-2 \le 3y \end{cases} \\ & \begin{cases} x=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2} \\ 3y^2-\frac{27}{4}y^2-\frac{9}{2}y+\frac{9}{2}y+3+5y+2=0 \\ \frac{3}{2}y+1 \le 3y \end{cases} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} & \begin{cases} x=3y-1 \\ -24y^2+32y-4=0 \\ y \le \frac{2}{3} \end{cases} \\ & \begin{cases} x=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2} \\ 12y^2-27y^2+20y+20=0 \\ 3y \ge 2 \end{cases} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} & \begin{cases} x=3y-1 \\ 6y^2-8y+1=0 \\ y \le \frac{2}{3} \end{cases} \\ & \begin{cases} x=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2} \\ 3y^2-4y-4=0 \\ y \ge \frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}\right.$$

$D=8^2-4\cdot 6=64-24=40$

$D=4^2+4\cdot 3\cdot 4=16+16\cdot 3=16\cdot 4=64$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 3y - 1 \\ y = \dfrac{8 \pm 2\sqrt{10}}{12} \\ y \le \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4}y + \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{4 \pm 8}{6} \\ y \ge \dfrac{2}{3} \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\frac{4-\sqrt{10}}{6} < \frac{2}{3}$$

$$4 - \sqrt{10} < 4$$

$$-\sqrt{10} < 0$$

$$\frac{4+\sqrt{10}}{6} > \frac{2}{3}$$

$$4 + \sqrt{10} > 4$$

$$\sqrt{10} > 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = \dfrac{4+\sqrt{10}}{2} - 1 \\ y = \dfrac{4+\sqrt{10}}{6} \\ \dfrac{4+\sqrt{10}}{6} \le \dfrac{2}{3} \end{cases} = \varnothing \\ \begin{cases} x = \dfrac{4-\sqrt{10}}{2} - 1 \\ y = \dfrac{4-\sqrt{10}}{6} \\ \dfrac{4-\sqrt{10}}{6} \le \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ 2 \ge \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3} \ge \dfrac{2}{3} \end{cases} = \varnothing \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{ \left(\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}; \dfrac{4-\sqrt{10}}{6} \right); (2; 2) \right\}$.

№ 3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

ОДЗ: $x^2 + 6x > 0$

$\forall x$ $|x^2+6x| = x^2+6x$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \ge (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$$

$$(x^2+6x)^{\log_4 3} + 6x \ge (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$$

$$(x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)^{\log_4 3} \le x^2+6x$$

Пусть $t = x^2 + 6x$

$$t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} \le t$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение).

Т.к. $t>0$ всегда, то мы можем разделить обе части на t:

$$t^{\log_4 5 - 1} - t^{\log_4 3 - 1} \le 1$$

$$t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{3}{4}} - 1 \le 0$$

Пусть $f(t) = t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{3}{4}} - 1$

$$f'(t) = \log_4 \frac{5}{4} t^{\log_4 \frac{5}{16}} - \log_4 \frac{3}{4} t^{\log_4 \frac{3}{16}}$$

Найдём нули производной:

$$\log_4 \frac{5}{4} \cdot t^{\log_4 \frac{5}{16}} = \log_4 \frac{3}{4} \cdot t^{\log_4 \frac{3}{16}}$$

$$t^{\log_4 \frac{5}{3}} = \frac{\log_4 \frac{3}{4}}{\log_4 \frac{5}{4}} \qquad \left.\begin{matrix} \frac{3}{4} < 1 \\ \frac{5}{4} > 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \frac{\log_4 \frac{3}{4}}{\log_4 \frac{5}{4}} < 0 \\ t^{\log_4 \frac{5}{3}} > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow t \in \varnothing \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall t \ \ f'(t) \ne 0$$

$$\left.\begin{matrix} f'(1) = \log_4 \frac{5}{4} - \log_4 \frac{3}{4} > 0 \\ f'(t) \text{ непрерывна} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall t \in D(f): f'(t) > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall t \in D(f)$: $f(t)$ строго возрастает.

Тогда у $f(t)$ не более одного нуля t_0.

При этом $f(t) \le 0$ при $t \le t_0$

Заметим, что:

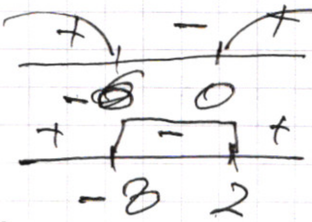
$$f(t) = \left(\frac{5}{4}\right)^{\log_4 t} - \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4 t} - 1$$

Тогда $f(16) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 =$

$= \frac{25-9}{16} - 1 = \frac{16}{16} - 1 = 0 \Rightarrow t_0 = 16$

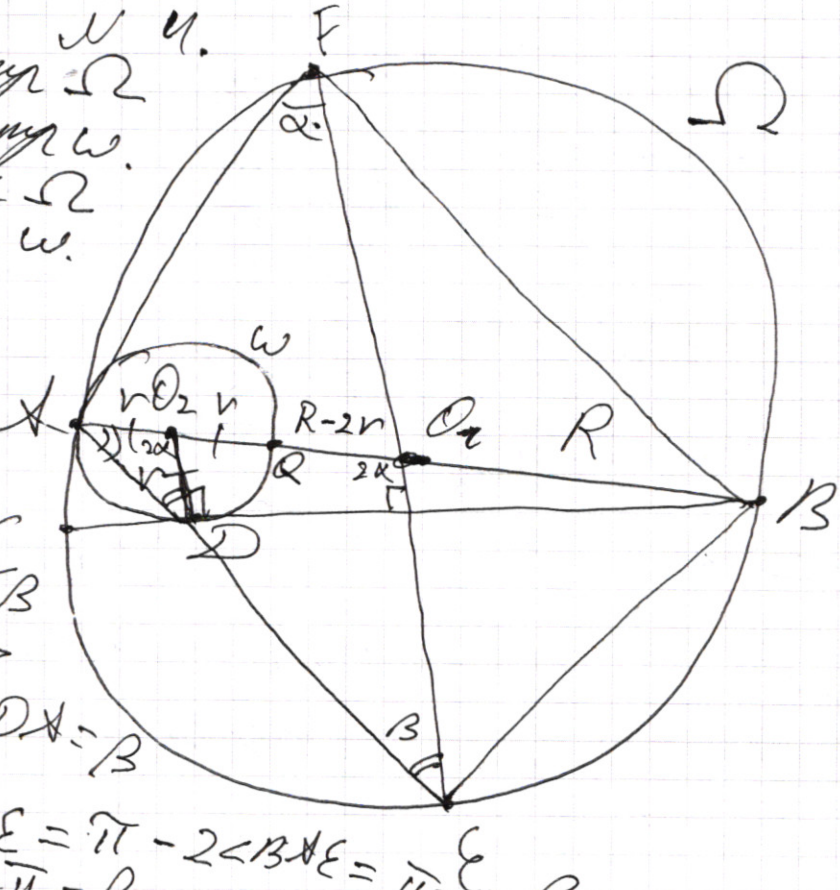
$$\begin{cases} t > 0 \\ t \le 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 6x > 0 \\ x^2 + 6x \le 16 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+6) > 0 \\ (x-2)(x+8) \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-8; 2] \end{cases}$$



Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$.

№ 4.



Пусть O_1 — центр Ω

O_2 — центр ω.

$Q = AB \cap \omega$. R — радиус Ω

r — радиус ω.

$\alpha = \angle AFE$

$\beta = \angle FEA$.

$\left.\begin{matrix} O_2D \perp BC \\ EF \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow O_2D \parallel EF \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_2DA = \angle FEA = \beta$

$O_2A = O_2D = r \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_2AD = \angle O_2DA = \beta$

$\cup AE = 2\alpha$

$\cup AE = \cup AB - \cup BE = \pi - 2\angle BAE = \pi - 2\beta$

$2\alpha = \pi - 2\beta \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow \angle FAE = \frac{\pi}{2} \Rightarrow FE$ — диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow FE \cap AB = O_1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение)

По теор. Пифагора:

$BO_2^2 = O_2D^2 + BD^2$

$(2R-r)^2 = r^2 + \frac{169}{4}$

$4R^2 - 4Rr + r^2 = r^2 + \frac{169}{4}$

$R^2 - Rr = \frac{169}{16}$

$AD \cdot DE = BD \cdot DC = \frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{65}{4}$

$O_2D \parallel FE \Rightarrow \triangle AO_2D \sim \triangle AO_1E \Rightarrow \angle AO_2D = \angle AO_1E = 2\alpha$

$AD = 2r\sin\alpha$

$AE = 2R\sin\alpha$

$AD \cdot DE = AD \cdot (AE - AD) = 2r\sin\alpha \cdot (2R\sin\alpha - 2r\sin\alpha) = 4\sin^2\alpha \cdot r(R-r) = \frac{65}{4}$

$\begin{cases} \sin^2\alpha \cdot r(R-r) = \frac{65}{16} \\ R^2 - Rr = \frac{169}{16} = R(R-r) \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\sin^2\alpha \cdot \frac{r}{R} = \frac{65}{169} = \frac{5}{13}$

$\angle ABC = 2\alpha - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\angle ABC = \sin(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha - 1$

$\sin\angle ABC = \frac{r}{2R-r}$

$2\sin^2\alpha = \frac{2R}{2R-r}$ $\quad$ $\sin^2\alpha = \frac{R}{2R-r}$

~~$\frac{Rr(R-r)}{2R-r} = \frac{65}{16}$~~ $\quad$ $\frac{R}{2R-r} \cdot \frac{r}{R} = \frac{5}{13}$

$13r = 10R - 5r$ $\quad$ $10R = 18r$ $\quad$ $r = \frac{5}{9}R$

$R^2 - \frac{5}{9}R^2 = \frac{196}{16} \Rightarrow R = \frac{39}{8} \Rightarrow r = \frac{195}{72}$

$\sin^2\alpha \cdot \frac{5}{9} = \cancel{\frac{65}{168}}\ \frac{5}{13}$

$\sin^2\alpha = \frac{9}{13}$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ α – острый $\Rightarrow \sin\alpha > 0$

$FE = 2R = \frac{39}{4}$

$\frac{AE}{\frac{39}{4}} = \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$AE = \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{39}{4} = \cancel{\frac{39\sqrt{13}}{}}\ \frac{9\sqrt{13}}{4}$

~~$S_{AFE} = $~~

$AF = \sqrt{\frac{39^2}{16} - \frac{81 \cdot 13}{16}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 13(13-9)}{16}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 13}{4}} = \sqrt{13} \cdot \frac{3}{2}$

Ответ:

$\alpha = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

$R = \frac{39}{8}$

$V = \frac{195}{72}$

$S = \sqrt{13} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{9\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27 \cdot 13}{8}$

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$.

Распишем $f(x)$ для каждого x и посчитаем кол-во пар $(x; y)$, где $f(x) < f(y)$

x	$f(x)$				
3	0	9	0	17	4
4	0	10	1	18	0
5	1	11	2	19	4
6	0	12	0	20	1
7	1	13	3	21	1
8	0	14	1	22	2
		15	1	23	5
		16	0	24	0
				25	2
				26	3
				27	0

Ответ: 229

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

№1

$tg\,\alpha$ - ?

$\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha \neq 0$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta =$

$= \sin 2\alpha (\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \cos 2\alpha \cdot (2\sin 2\beta \cos 2\beta) =$

$= \sin 2\alpha \cos^2 2\beta - \sin 2\alpha \sin^2 2\beta +$

$+ 2\sin 2\beta \cos 2\alpha \cos 2\beta =$

$= 2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta - \sin 2\alpha +$

$+ 2\sin 2\beta \cos 2\alpha \cos 2\beta$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\alpha \cos 2\beta = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 2\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta = \frac{8\sqrt{17}}{17} = \frac{8}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \beta = \pm\frac{1}{2} a\cos\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}$

$\cos^2 2\beta = \frac{16}{17}$

$\sin^2 2\beta = 1 - \cos^2 2\beta = \frac{1}{17} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\beta = \arcsin \pm\frac{1}{\sqrt{17}} = \pm \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \left[\begin{array}{l} -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$

$2\alpha \pm \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = \ldots \frac{1}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sin(\alpha+x) = \sin\alpha\cdot\cos x + \cos x\cdot\sin x$ $\quad a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$ $\quad tg\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} =$

$\cancel{4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1}$

$\cancel{4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1}$

$\cancel{\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}}$ $= \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = x$

$2tg\alpha = x - x\,tg^2\alpha$ $\quad tg\alpha \neq \pm 1$

$x\,tg^2\alpha + 2tg\alpha - x = 0$

$D = 4 + 4x^2$

$tg\alpha = \frac{-2\pm\sqrt{4x^2+4}}{2x} = \frac{-1\pm\sqrt{x^2+1}}{x}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = 0 \\ 2\alpha = \pi \\ 2\alpha = -2\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\alpha = \pi + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \cancel{\alpha = \frac{\pi}{2}} \\ \alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$

№ 2

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$ $\quad$ ОДЗ: $\begin{cases} 3xy - 2x - 3y + 2 \geq 0 \\ 3y - 2x \geq 0 \end{cases}$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$\cancel{3y - 2x \geq 0}$ $\quad 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

$3y - 2x \geq 0$

$\begin{cases} 4x^2 - 15xy + 9y^2 + 2x + 3y - 2 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y - 4 = 0 \\ 2x \leq 3y \end{cases}$

$D = 15^2 - 4\cdot4\cdot9 = 225 - 144 = 81$

$x = \frac{15\pm9}{8}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{3}{4} \end{array}\right.$

$(x-3y)(4x-3y)$

$(x-3y+1)(4x-3y-2)$

$\frac{10}{\sqrt{10}} \quad \frac{15}{\sqrt{15}}$

$2\sqrt{10}\cdot\sqrt{15} = 2\sqrt{2\cdot5\cdot3\cdot5} = 10\sqrt{6}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 8x^2-30xy+18y^2+4x+6y-4=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2-30xy+15y^2+10x+10y=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-6xy+3y^2+2(x+y)=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$D=6^2-4\cdot3=36-12=24$

$x=\frac{6\pm2\sqrt{6}}{2}=3\pm\sqrt{6}$

$\cancel{(x-3y)^2-6y^2+2x+2y=0}$

$(x-y)(x-3y)\ \cancel{-2xy}+2(x-xy+y)=0$

$(x-3y+1)(4x-3y-2)=4x^2-3xy-2x-$

$-12xy+9y^2+6y+4x-3y-2=$

$=4x^2-15xy+9y^2+2x+3y-2=0$

$$\left[\begin{array}{l} x-3y+1=0 \\ 4x-3y-2=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=3y-1 \\ x=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 12x^2-45xy+27y^2+6x+9y-6=0 \\ 12x^2+12y^2-24x-16y-16=0 \end{cases}$$

$15y^2-45xy+30x+25y+22=0$

① $15y^2-135y^2+45y+30y-30+25y+22=0$

$-120y^2+160y-8=0$

$15y^2-20y+1=0 \quad D=20^2-4\cdot15=400-60=340=4\cdot85=4\cdot5\cdot17$

$y=\frac{20\pm2\sqrt{85}}{30}=\frac{10\pm\sqrt{85}}{15}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3.

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

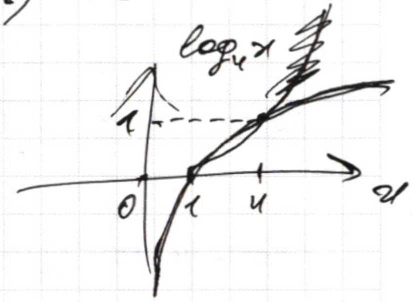
ОДЗ: $x^2+6x>0$

$\begin{cases} 3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2 \\ (x^2+6x)^{\log_4 3} - (x^2+6x)^{\log_4 5} \geq -x^2-6x \end{cases}$

$(x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)^{\log_4 3} \leq x^2+6x$

$(x^2+6x)^{\log_4 \frac{5}{4}} - (x^2+6x)^{\log_4 \frac{3}{4}} \leq 1$

$(x^2+6x)^{\log_4 \frac{3}{4}} \cdot \left((x^2+6x)^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1\right) \leq 1$



$t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} - t \leq 0$

$t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{3}{4}} - 1 \leq 0$

$\cancel{(t^{\log_4 5} - 1)(t^{\log_4 -1} + 1)}$

$\cancel{f(t) = t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} - t}$

$\cancel{f'(t) = \log_4 5\, t^{\log_4 \frac{5}{4}} - \log_4 3\, t^{\log_4 \frac{3}{4}} - 1}$

$f(t) = t^{\log_4 \frac{5}{4}} - t^{\log_4 \frac{3}{4}} - 1$

$f'(t) = \log_4 \frac{5}{4}\, t^{\log_4 \frac{5}{16}} - \log_4 \frac{3}{4}\, t^{\log_4 \frac{3}{16}}$

$t^{\log_4 \frac{5}{3}} = \dfrac{\log_4 \frac{3}{4}}{\log_4 \frac{5}{4}} = \log_{\frac{5}{4}} \frac{3}{4}$

$\frac{5}{4} > 1$

$\frac{3}{4} < 1$

$t = \left(\log_{\frac{5}{4}} \frac{3}{4}\right)^{-\log_4 \frac{5}{3}} = \left(\log_{\frac{5}{4}} \frac{3}{4}\right)^{\log_4 \frac{3}{5}}$

$\forall t \ f'(t) > 0$

$\left(\frac{5}{4}\right)^{\log_4 t} - \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4 t} - 1$

$t = 16$: $\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25-9}{16} = \frac{16}{16} = 1$

$\boxed{t \leq 16}$

$D = 6^2 + 4 \cdot 16 = 36 + 64 = 100$

$x = \frac{-6 \pm 10}{2}$ $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -8 \end{array}\right.$

$\begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x \leq 16 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+6)>0 \\ x^2+6x-16 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+6)>0 \\ (x-2)(x+8) \leq 0 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

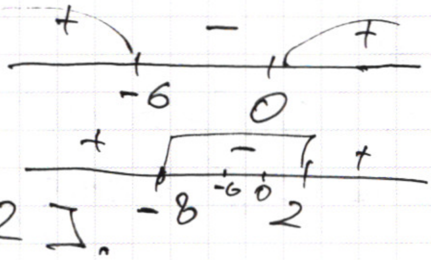
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-8; 2] \end{cases}$$



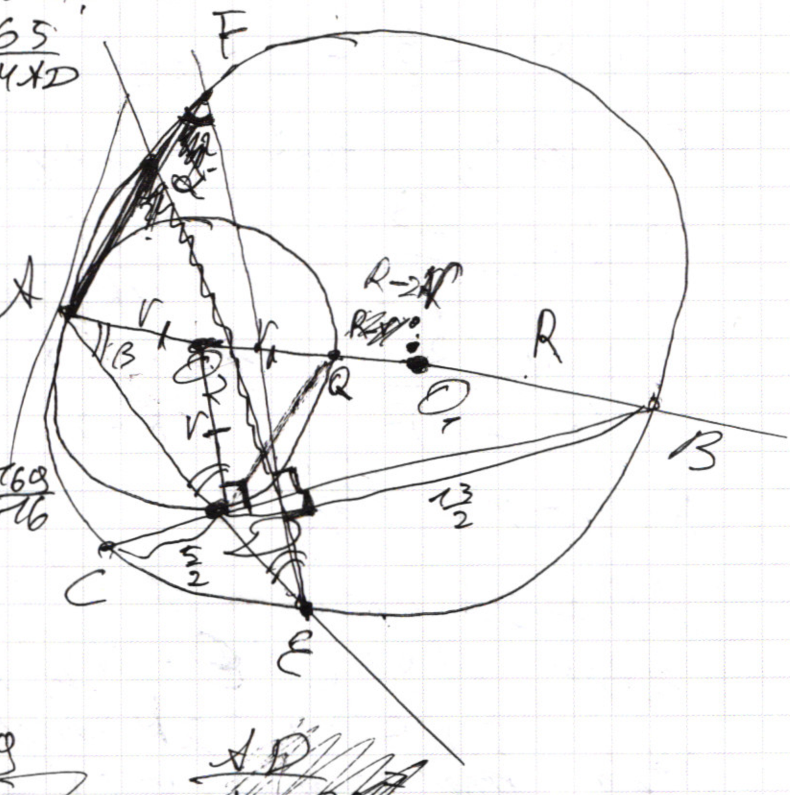
Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$.

№4.

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$ $\quad DE = \frac{65}{4AD}$

$AD \cdot DE = CD \cdot BD = \frac{65}{4}$



$r^2 + \frac{169}{4} = (2R - r)^2$

$r^2 + \frac{169}{4} = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$R^2 - Rr = \frac{169}{16}$

$R(R-r) = \frac{169}{16}$

$O_2D \parallel EF$

$\cancel{BQ \cdot BA = BD^2}$

$\cancel{2(R-r)}$

$\cancel{2(R-r) \cdot 2R = \frac{169}{4}}$

$\cancel{\frac{AD}{AD+DE}}$

$BE = AF$

$\cup BE = 2\beta$

$2\alpha = \cup AE = \cup AB - \cup BE = \pi - 2\beta$

$\triangle AO_2D \sim \triangle AO_1E$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \quad \Rightarrow \angle FAE = \frac{\pi}{2}$

FE – диаметр

$\cancel{\cup AE = \pi - 2\beta}$

$\frac{AD}{AD+DE} = \frac{r}{R}$

☑ черновик ☐ чистовик

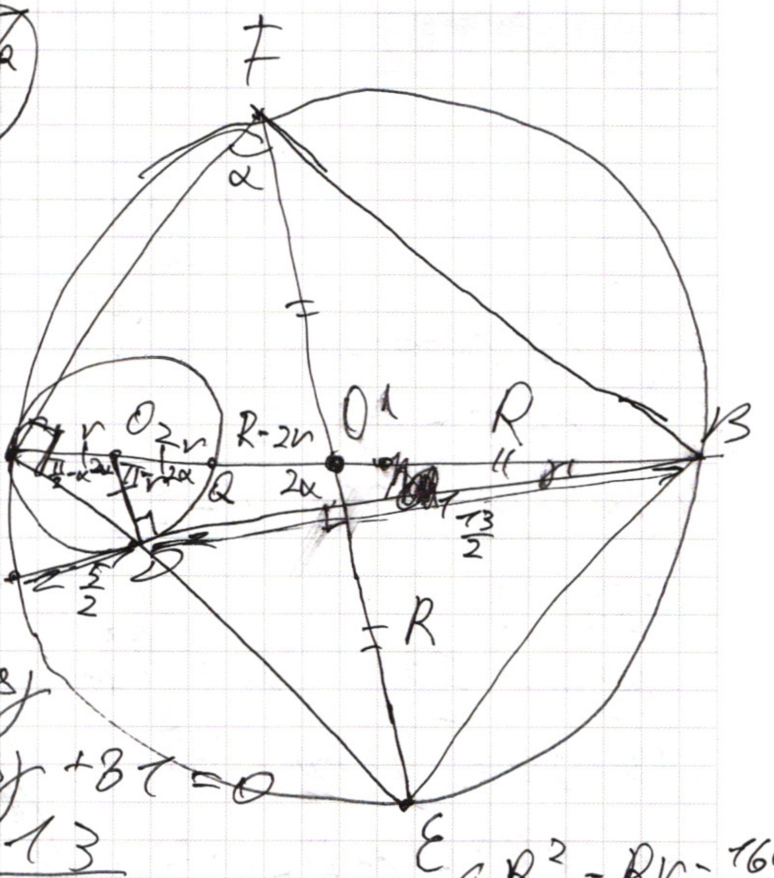
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$AC = 2R\sin\gamma$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 -$
$- 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\gamma$



$4R^2\sin^2\gamma = 4R^2 + 81 -$
$- 36R\cos\gamma$

$\cancel{4R^2} - 4R^2\cos^2\gamma =$
$= \cancel{4R^2} + 81 - 36R\cos\gamma$

$4R^2\cos^2\gamma - 36R\cos\gamma + 81 = 0$

$\cos\gamma = \dfrac{\frac{13}{2}}{2R - r} = \dfrac{13}{4R-2r}$

$$\begin{cases} \dfrac{169\cdot 4R^2}{(4R-2r)^2} - \dfrac{13\cdot 36R}{4R-2r} + 81 = 0 \\ R(R-r) = \dfrac{169}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^2 - Rr = \dfrac{169}{16} \\ 20R = 36r \\ r = \dfrac{5}{9}R \end{cases}$$

$\dfrac{4}{9}R^2 = \dfrac{169}{16}$

$\dfrac{2}{3}R = \dfrac{13}{4}$

$R = \dfrac{39}{8}$

$AD = 2r\sin\alpha$ $\quad AE = 2R\sin\alpha$

$AD(AE - AD) = \dfrac{65}{4}$

$2r\sin\alpha(2R\sin\alpha - 2r\sin\alpha) = \dfrac{65}{4}$

$4\sin^2\alpha\cdot r(R-r) = \dfrac{65}{4}$

$$\begin{cases} \sin^2\alpha\cdot r(R-r) = \dfrac{65}{16} \\ R(R-r) = \dfrac{169}{16} \\ \sin(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = \dfrac{r}{2R-r} \end{cases}$$

$\sin^2\alpha\cdot\dfrac{r}{R} = \dfrac{65}{169} = \dfrac{5}{13}$

$\sin^2\alpha = \dfrac{5R}{13r}$

$\sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = -\dfrac{r}{2R-r}$

$\cos 2\alpha = -\dfrac{r}{2R-r}$

$1 - 2\sin^2\alpha = -\dfrac{r}{2R-r}$

$2\sin^2\alpha - 1 = \dfrac{r}{2R-r}$

$\dfrac{10R}{13r} - 1 = \dfrac{r}{2R-r}$

$\dfrac{10R - 13r}{13r} = \dfrac{r}{2R-r}$

$\cancel{13r^2} = 20R^2 + \cancel{13r^2} -$
$- 26Rr - 10Rr$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$f(a) = f(\frac{a}{b} \cdot b) = f(\frac{a}{b}) + f(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{a}{b}) = f(a) - f(b)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ $\quad f(x) < f(y)$

< 0 $f(2)=0$

$f(3)=0$, $f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(11)=2$,

$f(13)=3$, $f(17)=4$, $f(19)=4$, $f(23)=5$,

2	0	
3	0	15
4	0	15
5	1	8
6	0	15
7	1	8
8	0	15
9	0	15
10	1	8
11	2	5
12	0	15
13	3	3
14	1	8
15	1	8
16	0	15
17	4	1
18	0	15
19	4	1
20	1	8
21	1	8
22	2	5
23	5	0
24	0	15
25	2	5
26	3	3
27	0	15

$15 \cdot 10 + 8 \cdot 7 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 =$

$= 150 + 56 + 15 + 6 + 2 =$

$= 206 + 23 =$

$= 229$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)