МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+6 \geq 18x^2-51x+28, \quad x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right].$$

I. Рассмотрим $f(x) = 18x^2 - 51x + 28$:

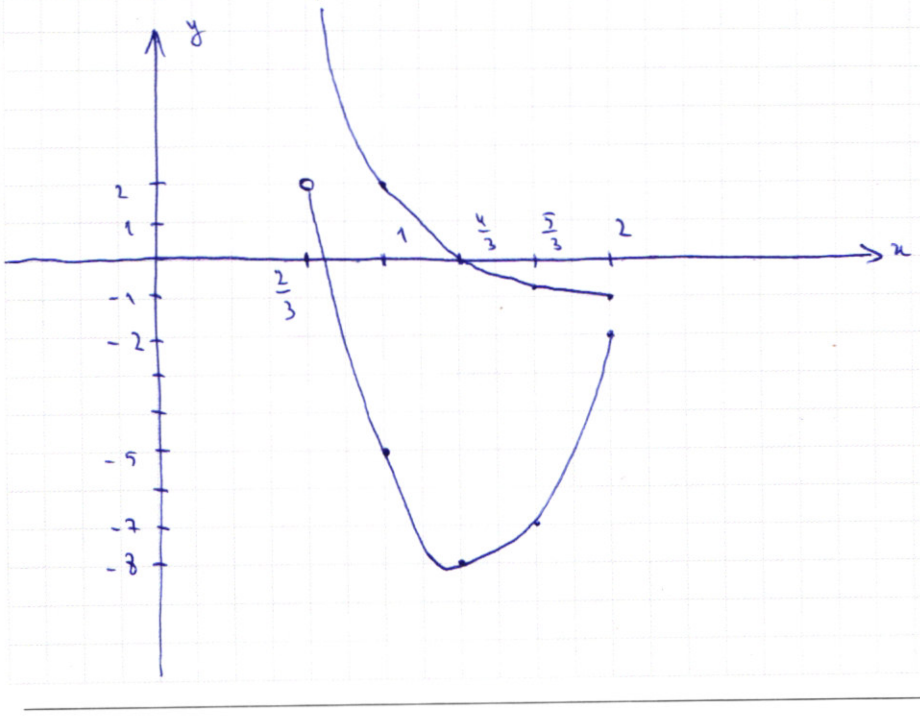
x	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$f(x)$	2	-5	-8	-7	-2

II. Рассмотрим $g(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$:

$g(x) \to \infty$ при $x \to \frac{3}{2}$ справа. $g(x) \to -2$ при $x \to \infty$.

x	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$g(x)$	2	0	$-\frac{2}{3}$	-1

Построим графики $f(x)$ и $g(x)$ в одной системе координат:



Рассмотрим прямую, проходящую через точки $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ и $(2; -2)$:

$\begin{cases} 2a + b = -2; \\ \frac{2}{3}a + b = 2. \end{cases}$; $\begin{cases} b = -2 - 2a; \\ \frac{2}{3}a - 2 - 2a = 2. \end{cases}$; $\begin{cases} b = -2 - 2a \\ -\frac{4}{3}a = 4. \end{cases}$; $\begin{cases} b = 4; \\ a = -3. \end{cases}$

Рассмотрим взаимное расположение прямой $-3x + 4$ и гиперболы $\frac{8 - 6x}{3x - 2}$:

$\frac{8 - 6x}{3x - 2} = -3x + 4;$

$\frac{8 - 6x + (3x - 2)(3x - 4)}{3x - 2} = 0;$

$\begin{cases} 9x^2 - 24x + 16 = 0; \\ 3x - 2 \neq 0. \end{cases}$; $\begin{cases} x = \frac{4}{3}; \\ x \neq \frac{2}{3}. \end{cases}$; $x = \frac{4}{3}.$

Получили, что найденная прямая касается графика функции $\frac{8 - 6x}{3x - 2}$ в точке $\frac{4}{3}$.

Для того, чтобы выполнялось неравенство $-3x + 4 < \frac{8 - 6x}{3x - 2}$, нужно уменьшить модули чисел a и b, но тогда на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$ не будет выполняться неравенство $ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$ для всех $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

Если же увеличить модули a и b, то не будет выполняться неравенство $ax + b \leq \frac{8 - 6x}{3x - 2}$ для всех $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

Значит пара чисел $a = -3$, $b = 4$ единственна.

Ответ: $(-3; 4)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

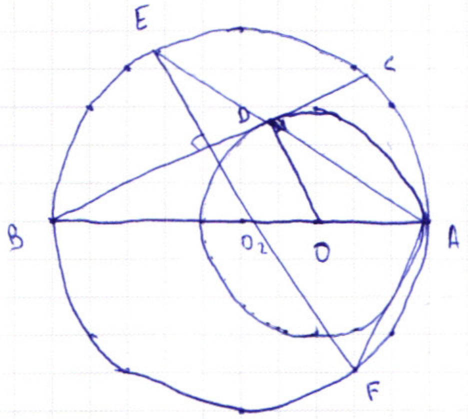
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№4

Дано: $\Omega(O_2; R)$; $\omega(O; r)$; ω и Ω касаются внутренне в A; AB - диаметр Ω; BC - хорда Ω; BC касается ω в D; $AD \cap \Omega = E$; $EF \perp BC$; $EF \cap \Omega = F$; $CD = 12$; $BD = 13$.

Найти: r; R; $\angle AFE$; $S_{\triangle AEF}$.

Решение:

1. По свойству касательной и диаметра:

$\frac{BD}{BC} = \frac{2R - 2r}{2R}$; $\frac{13}{25} = \frac{R - r}{R}$;

$13R = 25R - 25r$; $25r = 12R$; $R = \frac{25r}{12}$.

2. $OD \perp BC$ - как радиус, проведённый к точке касания.

По теореме Пифагора в $\triangle BDO$:

$BO^2 = BD^2 + DO^2$;

$BD^2 = BO^2 - DO^2 = (2R - r)^2 - r^2 = \left(\frac{25r}{6} - r\right)^2 - r^2 = \left(\frac{19r}{6}\right)^2 - r^2 =$

$= \frac{361r^2 - 36r^2}{36} = \frac{325r^2}{36}$.

$BD = \frac{5\sqrt{13} \cdot r}{6} = 13$; $5r\sqrt{13} = 13 \cdot 6$; $5r = 6\sqrt{13}$;

$r = \frac{6\sqrt{13}}{5}$.

3. Из п. 1: $R = \frac{25r}{12} = \frac{25 \cdot 6\sqrt{13}}{5 \cdot 12} = \frac{5\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $R = \frac{5\sqrt{13}}{2}$; $r = \frac{6\sqrt{13}}{5}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$.

Ограничение: $26x - x^2 > 0$; $x^2-26x<0$; $x(x-26)<0$;

$x\in(0;26)$.

Тогда $|x^2-26x| = \cancel{x^2-26x}\ 26x-x^2$

$\cancel{(x^2-26x)^{\log_5 12}}\ (26x-x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$.

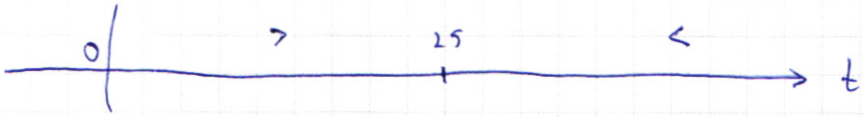
Пусть $t = 26x-x^2$ $(t>0)$, тогда неравенство примет вид:

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$.

Заметим, что функции $f(x)=x^{\log_5 12}+x$ и $g(x)=13^{\log_5 x}$ возрастают на всей области определение неравенства.

Тогда уравнение $t^{\log_5 12}+t = 13^{\log_5 t}$ имеет единственное решение. Заметим, что $25^{\log_5 12}+25 = 13^{\log_5 25} = 169$.

Тогда достаточно рассмотреть 2 промежутка:



$t\in(0;25]$.

Вернёмся к прежней переменной:

$\begin{cases} 26x-x^2>0; \\ 26x-x^2\leq 25. \text{ (1)} \end{cases}$; $\begin{cases} x\in(0;26); \\ x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty). \end{cases}$; $x\in(0;1]\cup[25;26)$.

1) $x^2-26x+25\geq 0$; $x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty)$.

$D_1 = 169-25=144$. $x_{1,2} = \dfrac{13\pm 12}{1}$. $\left[\begin{array}{l} x=25; \\ x=1. \end{array}\right.$

Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Так как число 2 простое, то $f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$.

Тогда для любого $x > 0, x \in \mathbb{R}$ верно:

$f(2) = f(2x \cdot \frac{1}{x}) = f(2x) + f(\frac{1}{x}) = f(2) + f(x) + f(\frac{1}{x})$;

$f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0$; $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$.

Тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$.

Значит для того, чтобы выполнялось неравенство $f(\frac{x}{y}) < 0$, нужно, чтобы $f(y) > f(x)$.

Для удобства подсчёта выпишем все значения $f(x)$ при $x \in [1; 28]$:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f(x)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4

x	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$f(x)$	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0	1

I. $f(y) = 5$:

$N_1 = 1 \cdot (25 - 1) = 24$.

II. $f(y) = 4$:

$N_2 = 2 \cdot (27 - 1 - 2) = 2 \cdot 22 = 44$.

III. $f(y) = 3$:

$N_3 = 2 \cdot (25 - 1 - 2 - 2) = 2 \cdot 20 = 40$.

IV. $f(y) = 2$:

$N_4 = 3 \cdot (25-1-2-2-3) = 3 \cdot 17 = 51.$

V. $f(y) = 1$:

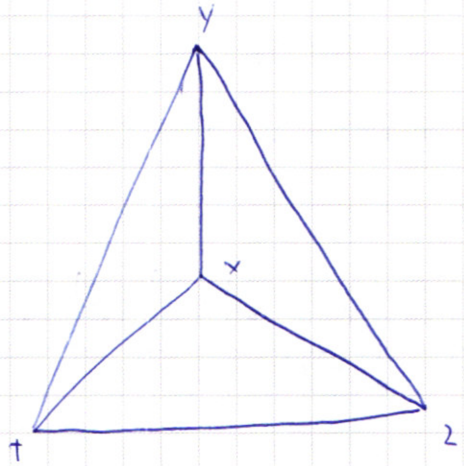
$N_5 = 8 \cdot (25-1-2-2-3-8) = 8 \cdot 9 = 72.$

Очевидно, что при $f(y)=0$ не существует нужных пар, т.к. в таком случае $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \geq 0$ при $x, y \in \mathbb{N}$; $x, y \in [4;28]$.

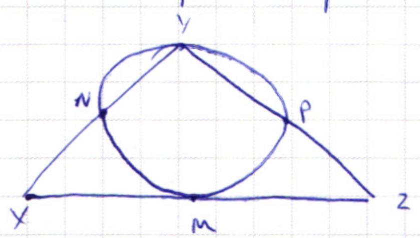
$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 24 + 44 + 40 + 51 + 72 = 231.$

Ответ: 231.

№7



1. Рассмотрим грань XYZ:



~~Пусть сфера касается XZ в точке M. Заметим, что~~ ~~и пересекает~~

Пусть сфера пересекает стороны $\triangle XYZ$ в точках M, N, P.

~~Так как в $\triangle XYZ$ NYPM можно вписать в~~

Так как около NYPM можно описать окружность, то сумма противолежащих углов равна 180°. Значит ~~Вх~~ NYPM – прямоугольник, иначе это невозможно.

2. Аналогично для граней TYX, TXZ.

$9x(x-2) \quad + y^2 - 12y = 45.$

$x(y-6) - (y-6) = (y-6)(x-1)$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$;

$y^2 - 13xy + 6x + y + 36x^2 - 6 = 0$;

$27x^2 + 24x + 13y - 13xy + \cancel{3}\,33 = 0$;

$\cancel{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

$x_0 = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}.$

$18\cdot\frac{4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3} + 28 =$

$= 8 - 34 + 28 = 2.$

$\cancel{\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt3}{2} + \frac{\sqrt2}{2} = \frac{\sqrt3+\sqrt2}{2} = 2\sin\frac{7\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}}$

$18 - 51 + 28 = -5.$

$18\cdot\frac{16}{9} - 51\cdot\frac{4}{3} + 28 =$

$= 32 - 68 + 28 = -8.$

$\cancel{f(ab) = f(a) + f(b) = \left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{b}{4}\right]}$

$\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right]}$

$18\cdot\frac{25}{9} - 51\cdot\frac{5}{3} + 28 =$

$= 50 - 85 + 28 = -7$

$\cancel{f\left(\frac{1}{4}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{4}\right) = \left[\frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{16}\right] = 0}$

$18\cdot4 - 51\cdot2 + 28 = 72 + 28 - 102 = -2$

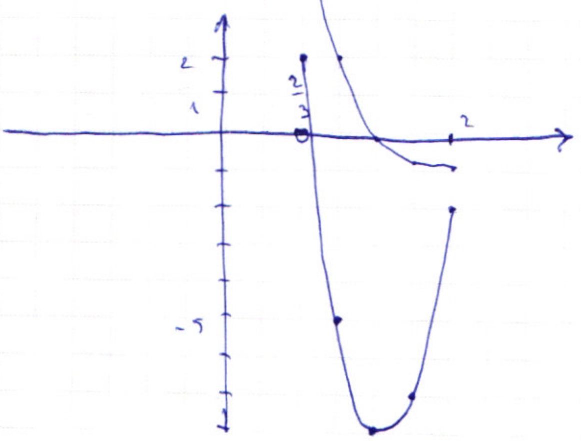
$\cancel{f(28) = f(7) + f(4)\,2 = f(7) + f(2)\,2\,f(2) = \left[\frac{7}{4}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right] = 1 + 0 + 0 = 1.}$

$\cancel{f\left(\frac{27}{23}\right) =}$

$\frac{8-6x}{3x-2}$

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \to \frac{8-4}{2-2} \to \infty \\ 1 \to \frac{2}{1} = 2 \\ \frac{4}{3} \to \frac{8-8}{4-2} = 0 \\ \frac{5}{3} \to \frac{8-10}{5-2} = -\frac{2}{3} \\ 2 \to \frac{8-12}{6-2} = -\frac{4}{4} = -1. \end{cases}$$

$$18x^2 - 51x + 28 \begin{cases} \frac{2}{3} \to 2 \\ 1 \to -5 \\ \frac{4}{3} \to -8 \\ \frac{5}{3} \to -7 \\ 2 \to -2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ \frac{2}{3}a + b = 2 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} b = -2 - 2a ; \\ \frac{2}{3}a - 2 - 2a = 2. \end{cases} ; \qquad \begin{cases} b = 4 ; \\ a = -3. \end{cases}$$

$-\frac{4}{3}a = 4 ; \quad -4a = 12 ; \quad a = -3.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(xy-6x-y+6)(xy-6x-y+6)=x^2y^2-6x^2y-xy^2+6xy-6x^2y+$

$+36x^2+6xy-36x-xy^2+6xy+y^2-6y+6xy-36x-6y+36=$

$=x^2y^2-12x^2y-2xy^2+24xy+36x^2-72x+y^2-12y+36=$

$=x^2y^2-12x^2y-2xy^2+24xy+27x^2-54x+36+45=$

$=x^2(y^2-12y+27)+x(-2y^2+24y-54)+81=$

$=x^2(y^2-12y+27)-2x(y^2-12y+27)+81$ $\cancel{=x^2(y-3)(y-9)\ x-2x}$

$=y^2-12xy+36x^2.$ $\cancel{D=36-36x}$

$36x^2-12xy+y^2$

$\cancel{12y(3x-y)}=y^2.$

$D_1=t^2-81.\quad x_{1,2}=\dfrac{t\pm\sqrt{t^2-81}}{1}.$ $\left[\begin{array}{l}x=t+\sqrt{t^2-81}\\ x=t-\sqrt{t^2-81}.\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l}y^2-12y+27=36;\\ 6y=y^2-12y+27;\\ y^2=81.\end{array}\right.$

$D_1=36-27=9.\quad y_{1,2}=\dfrac{6\pm3}{1}.$ $\left[\begin{array}{l}y=9;\\ y=3.\end{array}\right.$

$x^2(y-3)(y-9)-2x(y-3)(y-9)+81=$

$=(y-3)(y-9)(x^2-2x)+81$

$(y-6x)^2-81=(y-6x-9)(y-6x+9)=x(y-3)(y-9)(x-2)$

$\left.\begin{array}{l}9(x^2-2x)=45-y^2+12y\\ x^2-2x=5-\frac{y^2}{9}+\frac{4y}{3}\end{array}\right\}(y-6x)^2-81=\left(5-\frac{y^2}{9}+\frac{4y}{3}\right)(y-3)(y-9)=$

$=\left(5-\frac{y^2}{9}+\frac{4y}{3}\right)(y^2-12y+27)=5y^2-60y+135-\frac{y^4}{9}+\frac{4y^3}{3}+3y^2+$

$+\frac{4y^3}{3}-16y^2+36y=-\frac{y^4}{9}$

$D_1=36+9=45.$

$D_1=81-27=54$

$x^2(y^2-12y-9)-2x(y^2-18y+27)+81-y^2=0.$

$D_1=(y^2-18y+27)^2-81+y^2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(x) \geq 0$ при $x \in D_f$.

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

Тогда $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ при $-f\left(\frac{1}{y}\right) > f(x)$; $f(y) > f(x)$

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1)$

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

I. $f(y) = 5$:

$N_1 = 1 \cdot 24 = 24$.

II. $f(y) = 4$:

$N_2 = 2 \cdot 22 = 44$.

III. $f(y) = 3$:

$N_3 = 2 \cdot 20 = 40$.

IV. $f(y) = 2$:

$N_4 = 3 \cdot 17 = 51$.

V. $f(y) = 1$:

$N_5 = 8 \cdot 9 = 72$.

$f(2x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(2) = 0$.

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(2x) =$

$= -(f(2) + f(x)) =$

$= -f(x)$.

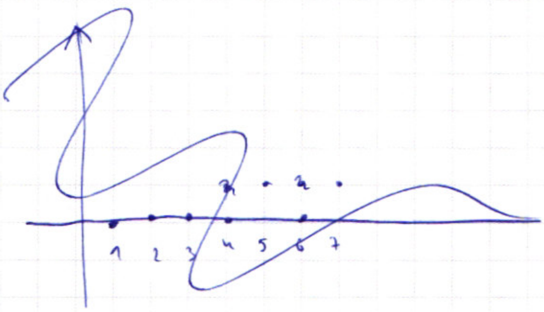
$\Downarrow$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 24 + 44 + 40 + 51 + 72 = 108 + 123 = 231$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



$f(1) = f(2 \cdot \frac{1}{2}) = f(2) + f(\frac{1}{2}) =$

$= 0 + f(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 0.$

$f(10) = f(5 \cdot 2) = 1 + 0 = 1.$

$f(10 \quad f(2) = \cancel{f(10) + f(\frac{1}{2})}$

$x(y-6) - (y-6) = (y-6)(x-1) = (y-6x)^2$

$9x(x-2) + y(y-12) = 45$

$f(1) = f(2) + f(\frac{1}{2}) = 0 + 0 = 0.$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6;$

$y^2 - 13xy + 6x + 36x^2 + y - 6 = 0$

$27x^2 - 13xy + 24x + 13y + 39 = 0$

$27x^2 + x(24 - 13y) + 13(y+3) = 0.$

$y^2 - 12y + 9x^2 - 18x - 45 = 0.$

$D_1 = 36 - 9x^2 + 18x + 45 =$

$= -9x^2 + 18x + 81 =$

$= -9(x^2 - 2x - 9)$

$\cancel{D = 576 - 48 \cdot 13y + 169y^2 - 4 \cdot 27 \cdot 13y - 4 \cdot 27 \cdot 13 \cdot 3}$

$f(2) = f(10) + f(\frac{1}{5}) = 1 + f(\frac{1}{5}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{5}) = -1.$

$f(20) = f(5) + f(4) = 1.$

$f(2) = f(20) + f(0,1) = 1 + f(0,1) = 0 \Rightarrow f(0,1) = -1.$

$f(3) + f(\frac{1}{3}) = f(1) \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = 0.$

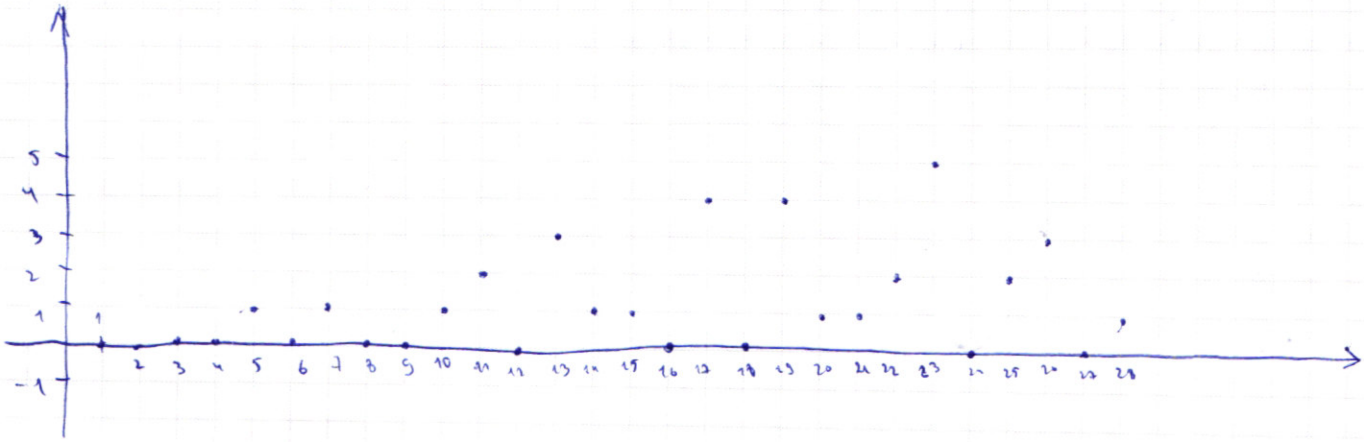
$f(4) + f(\frac{1}{4}) = f(1) \Rightarrow f(\frac{1}{4}) = 0$

$f(6) + f(\frac{1}{6}) = f(1) \Rightarrow f(\frac{1}{6}) = 0$

$f(7) + f(\frac{1}{7}) = f(1) \Rightarrow f(\frac{1}{7}) = -1.$

$f(\frac{3}{7}) = f(3) + f(\frac{1}{7}) = -1.$

$f(3) = f(\frac{3}{7}) + f(7) = 0$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28, \quad x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right].$

I. Рассмотрим $f(x) = 18x^2 - 51x + 28$:

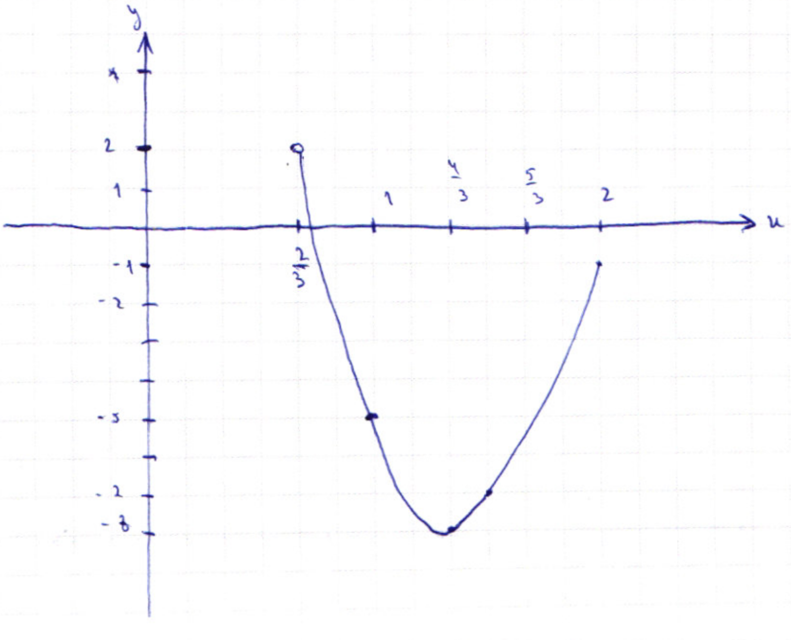
x	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$f(x)$	2	-5	-8	-7	-2

II. Рассмотрим $g(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$.

1) $g(x) \to \infty$ при $x \to \frac{3}{2}$ справа.

x	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$g(x)$	2	0	$-\frac{2}{3}$	-1

Построим графики $f(x)$ и $g(x)$ в одной системе координат:



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

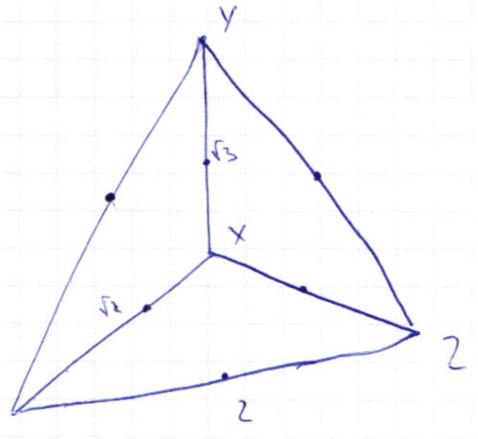
$-3x+4=\frac{8-6x}{3x-2}$; $\frac{8-6x+(3x-2)(3x-4)}{3x-2}=0$

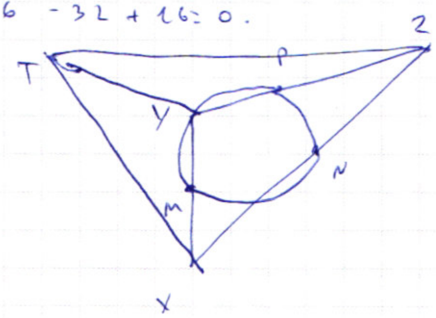
$8-6x+9x^2-12x-6x+8 = 9x^2-24x+16$, a

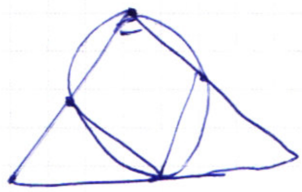
$D_1=144-144=0$. $x=\frac{24}{18}=\cancel{\frac{3}{2}}\ \frac{4}{3}$.

$\cancel{\frac{81}{4}-\frac{72}{2}\cdot 16 = \frac{81-144+64}{4}}$

$9\cdot\frac{16}{9}-24\cdot\frac{4}{3}+16=16-32+16=0.$



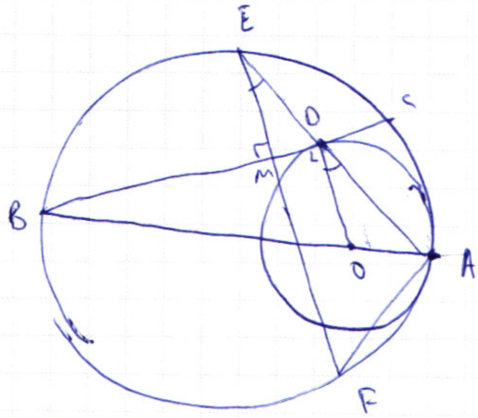




$\angle DBO=\alpha \Rightarrow \angle ODB = 90-\alpha$

$\sin\angle DOB=\frac{BD}{BO}=\frac{13}{5\sqrt{13}-\frac{6\sqrt{13}}{5}}=\frac{65}{25\sqrt{13}-6\sqrt{13}}=\frac{65\sqrt{13}}{19\cdot 13}=\frac{5\sqrt{13}}{19}.$

$AB=d=2R$; $CD=12$; $BD=13$.



$\frac{BD}{BC}=\frac{2R-2r}{2R+2r}$; $\cancel{\frac{13}{25}=\frac{R-r}{R+r}}$; $\frac{13}{25}=\frac{R-r}{R}$;

$\cancel{13R+13r=25R-25r;}$

$\cancel{12R=28r,\ R=\frac{7r}{3}}$

$13R=25R-25r$; $25r=12R$; $R=\frac{25r}{12}$.

$R=2\frac{25\cdot 6\sqrt{13}}{12\cdot 5}=\frac{5\cdot\sqrt{13}}{2}=\frac{5\sqrt{13}}{2}.$

$BD^2+OD^2=BO^2$; $BD^2=BO^2-OD^2=(2R-r)^2-r^2=$

$=\left(\frac{25r}{6}-r\right)^2-r^2=\left(\frac{19r}{6}\right)^2-r^2=\frac{361r^2-36r^2}{36}=\frac{325r^2}{36}$

$19\cdot 19$: $171+19 \to 361$; $361-36=325$

$BD=\frac{5r\sqrt{13}}{6}=13$; $5r\sqrt{13}=13\cdot 6$;

$5r=\frac{13\cdot 6}{\sqrt{13}}=6\sqrt{13}$; $r=\frac{6\sqrt{13}}{5}$.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$26x - x^2 > 0 \Rightarrow$ ~~$26x - x^2 < 0$~~ $x^2 - 26x < 0$

~~$x(x-26)$~~ $x(x-26) < 0$; $x \in (0;26)$.

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq$ ~~$8x$~~ $+\, 13^{\log_5 (26x - x^2)}$

Пусть $t = 26x - x^2$, тогда: $(t > 0)$

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

~~$t(t^{\log_5 \frac{12}{5}} + t) \geq 13^{\log_5 t}$~~

Функции $y_1 = t^{\log_5 12} + t$ и $y_2 = 13^{\log_5 t}$ возр. на D_{y_1}.

Значит решение уравнение единственное.

Заметим, что ~~t~~ $25^{\log_5 12} + 25 = 13^{\log_5 25}$.

$+ \quad 25 \quad < \quad t$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ 144\ \ \\ \hline 1728 \\ +\ 125 \\ \hline 1853 \end{array}$$

$\begin{cases} t \in (-\infty; 25]. \\ t > 0. \end{cases}$; $t \in (0; 25]$.

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times\ 13 \\ \hline 507 \\ 169\ \ \\ \hline 2197 \end{array}$$

Вернёмся к прежней переменной:

$\begin{cases} 26x - x^2 > 0; \\ 26x - x^2 \leq 25. \end{cases}$; $\begin{cases} x \in (0; 26); \\ x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty). \end{cases}$; (A)

$x^2 - 26x + 25 \geq 0$

$D_1 = 169 - 25 = 144$. $x_{1,2} = \frac{13 \pm 12}{1}$. $\begin{cases} x = 25; \\ x = 1. \end{cases}$

$x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$.

(A); $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)