МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$\frac{3}{2}$

ст. т. B $\frac{1}{2}$

ст. т. C $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Решение:

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot \sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) = -\frac{4}{5} \Rightarrow$

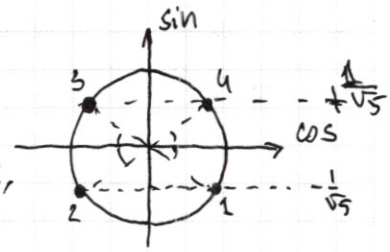
$\Rightarrow 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow$ Есть два возм. варианта $\sin 2\beta$: $\sin 2\beta = +\sqrt{1-\frac{4}{5}}$, $\sin 2\beta = -\sqrt{1-\frac{4}{5}}$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

1сл. $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ Тогда $\sin(2\beta+2\alpha) = \sin 2\beta$

→ либо т.1, либо т.2 на рис.



$\Rightarrow$ эти две точки либо совпадают на тригоном. окр-ти, либо это т. 1 и 2.

Если совпадают, то $2\alpha = 2n\pi$ $(n\in\mathbb{Z}) \Rightarrow \alpha = n\pi \Rightarrow \underline{tg\,\alpha = 0}$

Если не совпадают: $\exists$ $\sin 2\beta \to$ т.1, а $\sin(2\beta+2\alpha)\to$ т.2

Тогда $\underbrace{2\beta-2\beta}_{0}+\underbrace{\pi+2n\pi}_{\text{в } \pi}^{n\in\mathbb{Z}}$ ↗ в нужн. точку $-2\beta = 2\beta+2\alpha \Rightarrow 2\alpha = \pi+2n\pi-4\beta$

$\Rightarrow \alpha = n\pi+\frac{\pi}{2}-2\beta$ $\sin\alpha = \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\cos 2\beta - \sin 2\beta\underbrace{\cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}_{0} =$

$= \pm\cos 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$ $\cos\alpha = \overset{0}{\cos\left(\pi n+\frac{\pi}{2}\right)}\cos 2\beta + \sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)\sin 2\beta =$

$= \pm\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = \mp\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow tg\,\alpha_1 = \frac{+\frac{2}{\sqrt5}}{-\frac{1}{\sqrt5}} = -2$ $tg\,\alpha_2 = \frac{-2/\sqrt5}{1/\sqrt5} = -2$

$\Rightarrow \underline{tg\,\alpha = -2}$

$\exists$ $\sin 2\beta \to$ т.2, а $\sin(2\beta+2\alpha)\to$ т.1 Тогда аналог. $2\alpha = \pi+2n\pi-4\beta$ и т.д.

2сл. $\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt5}$ тогда либо $2\beta+2\alpha = -2\beta+2n\pi$, либо
точки 3 и 2; 4 и 1

$2\beta+2\alpha = 2\beta+\pi+2n\pi$ (т. 3 и 1; 4 и 2)

1) $2\beta+2\alpha = -2\beta+2n\pi \Rightarrow \alpha = -2\beta+n\pi \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt5}$ $\cos\alpha = \mp\frac{2}{\sqrt5}$

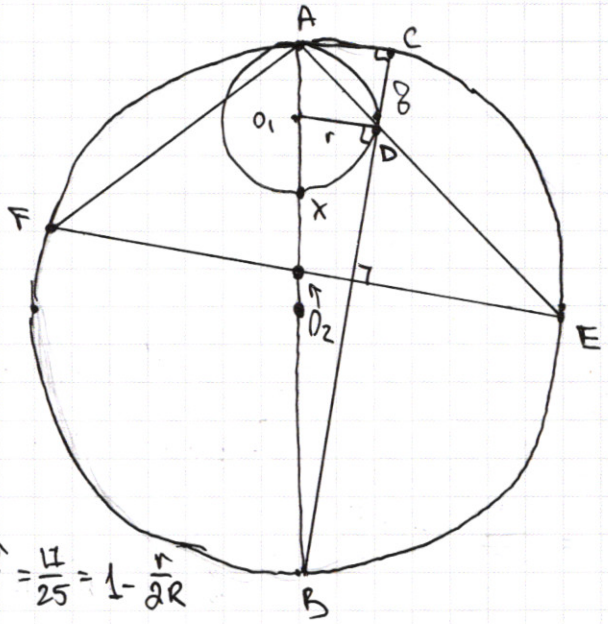
$\Rightarrow \underline{tg\,\alpha = -\frac{1}{2}}$

2) $2\alpha = \pi+2n\pi \Rightarrow \alpha = n\pi+\frac{\pi}{2}$ $tg\,\alpha$ не определен $\Rightarrow$

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0$

№4

$\exists$ O_1 - центр ω; O_2 - Ω



AB - диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$

CB - кас $\Rightarrow \angle O_1DB = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta O_1BD \sim \Delta ABC \Rightarrow$

$$\frac{O_1B}{AB} = \frac{BD}{CD+BD} = \frac{17}{25}$$

$\exists$ рад $\Omega \to R$, а рад $\omega \to r$

$\Rightarrow$ $O_1B = 2R - r$

$AB = 2R$ $\Rightarrow$ $\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{25} = 1 - \frac{r}{2R}$

$\exists$ AB пересек ω 2 раз в т. X   Степень т. B отн ω: $BD^2 = BX \cdot AB$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 17^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$

$$\frac{r}{2R} = \frac{25-17}{25} = \frac{8}{25} \Rightarrow r = 2R \cdot \frac{8}{25} \Rightarrow 17^2 = \left(2R - 4R\frac{8}{25}\right) \cdot 2R =$$

$$= R^2\left(2 - \frac{32}{25}\right) \cdot 2 = \frac{18 \cdot 2}{25} \cdot R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{5^2 \cdot 17^2}{36} \Rightarrow R = \frac{5 \cdot 17}{6} = \frac{85}{6}$$

$$\Rightarrow r = \frac{16}{25}R = \frac{\cancel{16}^{8} \cdot \cancel{5} \cdot 17}{\cancel{25}_{5} \cdot \cancel{6}_{3}} = \frac{136}{15}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underset{(\Omega)}{R} = 14\frac{1}{6} \quad ; \quad \underset{(\omega)}{r} = 9\frac{1}{6}}$$

Заметим, что O_2 лежит на FE:

Т.к. гомотетия с центром в т. A, которая переводит т. D в т. E, переводит ω в Ω, то $O_1 \to O_2$ $\Rightarrow$ $\Delta O_1AD \sim \Delta O_2AE$

а т.к. $FE \perp BC$ и $O_1D \perp BC$, то O_2 лежит на FE.

$\Rightarrow$ FE - диаметр Ω ~~и~~ $\angle AFE = \frac{1}{2}\angle AO_2E$ $\angle AO_2E = \angle AO_1D$ т.к. $O_1D \parallel O_2E$.

$$CB = 25 = 17 + 8 \quad AB = 2R = \frac{85}{3} \quad AC \overset{\Rightarrow \text{из Th Пиф.}}{=} \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{\frac{25 \cdot 17^2}{9} - \frac{25 \cdot 25 \cdot 9}{9}} =$$

$$= \frac{5}{3}\sqrt{17^2 - 25 \cdot 9} = \frac{5}{3}\sqrt{64} = \frac{40}{3}$$ $\angle ACD = 90^\circ \Rightarrow$ по Th. Пиф. $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} =$

$$= \sqrt{\frac{25}{9} \cdot 64 + 64} = 8\sqrt{\frac{25+9}{9}} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$$ Th. Cos для Δ-ка AO_1D:

$$AD^2 = \overset{r^2}{AO_1^2} + \overset{r^2}{O_1D^2} - 2\overset{r}{AO_1} \cdot \overset{r}{O_1D} \cdot \cos\angle AO_1D \Rightarrow \frac{64 \cdot \cancel{34}^{2}}{\cancel{9}_{1}} = \frac{64 \cdot 17^2}{25 \cdot \cancel{9}}(\cancel{2} - \cancel{2}\cos\angle AO_1D)$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow 1 = \frac{17}{25}(1-\cos\angle AO_1D) \Rightarrow \frac{25}{17} = 1-\cos\angle AO_1D \Rightarrow \cos\angle AO_1D = -\frac{8}{17}$

$\Rightarrow \angle AO_1D = 2\cdot\angle AFE \quad$ Пусть $\angle AFE = \alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{8}{17} = 2\cos^2\alpha - 1$

$\Rightarrow 2\cos^2\alpha = \frac{9}{17} \quad \cos^2\alpha = \frac{9}{34}$ т.к. $\angle FAE = 90°$ в Δне AFE, то

α - острый угол $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

$\Rightarrow \boxed{\angle AFE = \arccos\frac{3\sqrt{34}}{34}}$

$\cos\angle AFE = \frac{AF}{FE} = \frac{AF}{2R} = \frac{AF\cdot 3}{85} \Rightarrow AF = \frac{85}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\sqrt{34}} = \frac{85}{\sqrt{34}}$

По Th Пиф $AF^2 + AE^2 = FE^2 \Rightarrow \frac{5^2\cdot17^2}{34} + AE^2 = \frac{5^2\cdot17^2}{9}$

$AE^2 = 5^2\cdot17^2\cdot\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{34}\right) = 5^2\cdot17^2\cdot\frac{25}{9\cdot34} = \frac{25^2\cdot17^2}{3^2\cdot34} \Rightarrow AE = \frac{25\cdot17}{3\sqrt{34}}$

т.к. AFE - прямоуг Δк, то $S_{AFE} = \frac{1}{2}AF\cdot AE = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\cdot17}{\sqrt{34}}\cdot\frac{25\cdot17}{3\cdot\sqrt{34}} =$

$= \frac{17^2\cdot5^3}{2\cdot3\cdot34} = \frac{17\cdot125}{4\cdot3} = \boxed{\frac{2125}{12}} \to$ Ответ.

N5 Решение:

2 - простое число: $f(2) = [\frac{2}{4}] = 0 \quad f(1\cdot2) = f(1) + f(2) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0 \quad f(4) = f(2\cdot2) = f(2)+f(2) = 0 \quad f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$

$f(6) = f(2\cdot3) = f(2)+f(3) = 0 \quad f(7) = [\frac{7}{4}] = 1 \quad f(8) = f(2\cdot4) = f(2)+f(4) = 0$

$f(9) = f(3\cdot3) = f(3)+f(3) = 0 \quad f(10) = f(2\cdot5) = f(2)+f(5) = 1 \quad f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$

$f(12) = f(2\cdot6) = f(2)+f(6) = 0 \quad f(13) = [\frac{13}{4}] = 3 \quad f(14) = f(2)+f(7) = 1$

$f(15) = f(3)+f(5) = 1 \quad f(16) = f(2)+f(8) = 0 \quad f(17) = [\frac{17}{4}] = 4 \quad f(18) = f(2)+f(9) = 0$

$f(19) = [\frac{19}{4}] = 4 \quad f(20) = f(5)+f(4) = 1 \quad f(21) = f(3)+f(7) = 1 \quad f(22) = f(2)+f(11) = 2$

$f(23) = [\frac{23}{4}] = 5 \quad f(24) = f(4)+f(6) = 0$

Заметим, что $f(1) = 0 = f(a) + f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

Тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) \Rightarrow$ нам нужны пары $(x;y)$, где $f(x) > f(y)$

Для x, y от 1 до 24 (нат. числа) f принимает значения 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5. Из рассмотренного ранее:

$f(x) = 0$ в 11 нат. числах от 1 до 24

$f(x) = 1$ в 7 нат. числах $f(x) = 2$ в 2 числах $f(x) = 3$ - в 1

$f(x) = 4$ - в 2 $f(x) = 5$ - во 1.

1 сл. $f(y) = 0$ $f(x) > 0$ на $y \to 11$ вар-ов на $x \to 13$ $\to$ всего 143 в.

2 сл. $f(y) = 1$ $f(x) > 1$ на $y \to 7$ вар-ов на $x \to 6$ $\to$ всего 42 в.

3 сл. $f(y) = 2$ $f(x) > 2$ на y 2 вар-та, на $x \to 4$ $\to$ всего 8 вар.

4 сл. $f(y) = 3$ $f(x) > 3$ на y 1 вар., на $x \to 3$ $\to$ 3 вар.

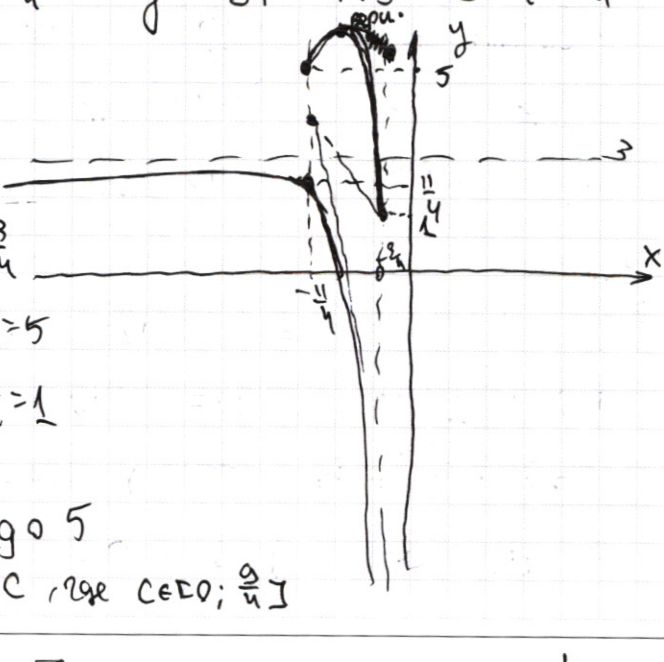
5 сл. $f(y) = 4$ $f(x) > 4$ на y 2 вар, на $x \to 1$ $\to$ 2 вар.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Таких пар всего } 198}$

№6 Исследуем ф-ии $y = \frac{12x+11}{4x+3}$ и $y = -8x^2 - 30x - 17$

1) $y = \frac{12x+11}{4x+3}$ У нее $x = -\frac{3}{4}$ - асимптота и при $x < -\frac{3}{4}$ она ~~возрастает до $+\infty$~~ убывает от асимптоты $y = 3$

т.к. $y = 3 + \frac{2}{4x+3}$ при $x = -\frac{11}{4}$ $y = 3 + \frac{2}{-11+3} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$



2) $y = -8x^2 - 30x - 17$ - это парабола ветвями вниз

ее верш. $x_B = \frac{30}{-16}$ - между $-\frac{11}{4}$ и $-\frac{3}{4}$

при $x = -\frac{11}{4}$ $y = -8 \cdot \frac{121}{16} + \frac{330}{4} - \frac{68}{4} = \frac{20}{4} = 5$

при $x = -\frac{3}{4}$ $y = -8 \frac{9}{16} + \frac{90}{4} - \frac{68}{4} = \frac{4}{4} = 1$

в т. $x = -\frac{11}{4}$ $ax + b$ лежит от $\frac{11}{4}$ до 5

] они проходят через точки $\frac{11}{4} + c$, где $c \in [0; \frac{9}{4}]$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдем какой угол наклона может быть у таких прямых
→ пучок прямых $k(x-x_0)+y_0$ через $-\frac{11}{4}; \frac{11}{4}+c$

$\Rightarrow$ $x_0=-\frac{11}{4}$ $y_0=\frac{11}{4}+c$

прямые $kx+\frac{11k}{4}+\frac{11}{4}+C$, где $a=k$, $\frac{11a}{4}+\frac{11}{4}+C=b$

Для прямой есть два крайних положения: она пройдет через $(-\frac{3}{4};1)$ - сравняется с параболой
2 → она будет касаться графика $\frac{12x+11}{4x+3}$

Разберем случай касания:

$kx+\frac{11k}{4}+\frac{11}{4}+C=3+\frac{2}{4x+3}$ $|\cdot 4$

$4kx+11k+11+4C=12+\frac{8}{4x+3}$

$\frac{16kx^2+12kx+44kx+33k+16xC+12C}{4x+3}=\frac{4x+3+8}{4x+3}$

$\frac{16kx^2+x(56k+16C-4)+33k+12C-11}{4x+3}=0$

Из располож. точки узла всех этих прямых видно, что крайний случай - касание $y=\frac{12x+11}{4x+3}$ в ее отриц. части $(x<-\frac{3}{4})$, при этом не будет пересеч. с др. частью

$\Rightarrow D=0 \Rightarrow (56a+16c-4)^2-4\cdot16a\cdot(33a+12c-11)=0$

$=56^2a^2+16^2c^2-16+56a\cdot16c\cdot2-4\cdot56a\cdot2-4\cdot16c\cdot2-4\cdot16a\cdot33a-4\cdot16\cdot12ac+4\cdot16\cdot11a$
$=0$

→ тогда нам подойдет a - решение этого ур-я

2 случай: точка $(-\frac{3}{4};1)$ $\underbrace{-\frac{3}{4}a+\frac{11a}{4}}_{2a}+\frac{11}{4}+C=1 \Rightarrow a=\boxed{-\frac{7}{8}-\frac{c}{2}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N7 Степень т. B отн. сферы: $BA \cdot \frac{1}{2}BA = \frac{1}{2}$

Пусть M - сер. DB, а N - 2 т. пер. сферы с DB $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = BM \cdot BN = 1 \cdot BN \Rightarrow BN = \frac{1}{2} \Rightarrow$ N - сер. BM

$\Rightarrow$ ст. т. D отн сферы: $DM \cdot DN = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

X - сер. DC F - 2 точка пер. сферы с DC $\Rightarrow DF \cdot DX = \frac{3}{2}$

$DX = \frac{DC}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow DX = 1$. ст. т. C отн. сферы: $CX \cdot CF = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{4}$

Пусть Y - сер. BC; BC = a, а L - 2 точка пер. сферы с BC:

ст. т. C: $\frac{15}{4} = CY \cdot CL = \frac{a}{2} \cdot CL$ ст. т. B: $\frac{1}{2} = BY \cdot BL = \frac{a}{2} BL$

$\Rightarrow \frac{a}{2}(BL + CL) = \frac{17}{4} \Rightarrow \frac{a}{2} \cdot a = \frac{17}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{17}{2} \Rightarrow \boxed{BC = \sqrt{\frac{17}{2}}}$

У Δ-ка DBC фиксированы стороны

Найдем AC: $\frac{15}{4} = AC \cdot \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{15}{2}} \Rightarrow$ у Δ ABC фикс. стороны $\Rightarrow$ мы можем менять только угол между пл-тями ABC и DBC для изм. радиуса опис. сферы.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

~~№~~ № 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

Заметим, что $x^2+18x > 0$ всегда

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+18x>0 \\ (x^2+18x)^{\log_{12}5} - (x^2+18x)^{\log_{12}13} \geqslant -(x^2+18x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+18x>0 \\ (x^2+18x)^{\overbrace{\log_{12}5-1}^{<0}} - (x^2+18x)^{\overbrace{\log_{12}13-1}^{<0}} \geqslant -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+18x>0 \\ 1 \leqslant \dfrac{1}{(x^2+18x)^{1-\log_{12}13}} - \dfrac{1}{(x^2+18x)^{1-\log_{12}5}} \end{cases}$$

т.к. $\log_{12}13 > \log_{12}5$, то это выражение верно всегда начиная с какого-то x_k: найдем x_k

$$1 = (x^2+18x)^{\log_{12}13-1} - (x^2+18x)^{\log_{12}5-1}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$ $a^{\log_a b} = b$

144+25=169

$x^2+18x>0$!

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - (x^2+18x)$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $\log_c b = \log_a b \cdot \log_c a$

$5^{\log_5(x^2+18x)\cdot\log_{12}5}$ $(x^2+18x)^{\log_{12}5}$ $tg2\alpha = \frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - (x^2+18x)^1$

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac45$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\frac15+\frac45$

$\sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta\cos2\alpha+\sin2\alpha = -\frac45$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin2\alpha = -\frac45$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta = -\frac1{\sqrt5}$

$-\frac1{\sqrt5}\cos2\beta + \sin2\beta(\pm\frac{2}{\sqrt5}) + \sin2\alpha = -\frac45$ $180^\circ+2\alpha$

$\sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$ $2\alpha=2\pi n$ $\alpha=\pi n$

$\Rightarrow -\frac45 = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta$ $-\frac{\cancel{4}\,2}{5} = \cancel{2}\cdot -\frac1{\sqrt5}\cos2\beta$

$\cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$ $\sin2\alpha\cdot\frac2{\sqrt5} \pm \frac1{\sqrt5}\cos2\alpha = -\frac1{\sqrt5}$

1сл $2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+(3y)^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$x(y-1)-2(y-1)$

$(x-2)(y-1)$

$x-2y\geq 0$

$x\geq 2y$

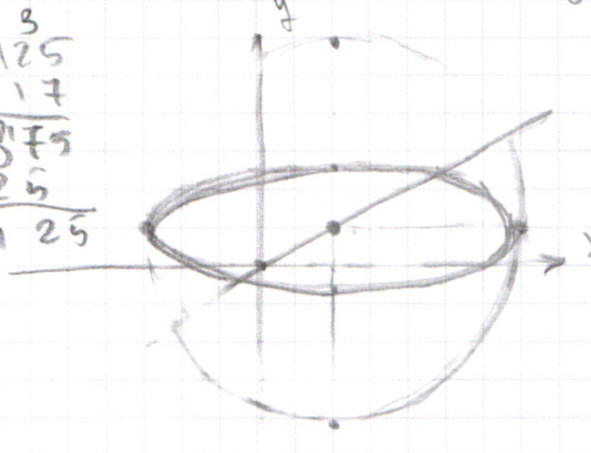
$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

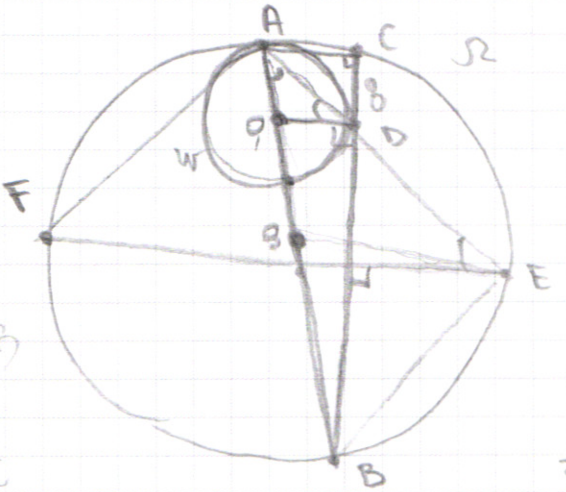
$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$9(y-1)^2$

$(y-1)=\frac{5}{3}=1$



№4



$17^2=2R\cdot(2R-2r)$

$\frac{17}{25}=\frac{2R-2r}{2R}$

84 14 69+24 135

$289-225=64$

№5 $f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(5)=1$ $f(7)=1$

$f(11)=2$ $f(13)=3$ $f(17)=4$ $f(19)=4$ $f(23)=5$

$f(1\cdot 2)=f(1)+f(2)\Rightarrow f(1)=0$

$f(4)=0$ $f(6)=0$ $f(8)=0$

№6

$ax+b\geq 3+\frac{2}{4x+3}$

$\frac{-22}{-8}=\frac{11}{4}$

$30^2-32\cdot 17$

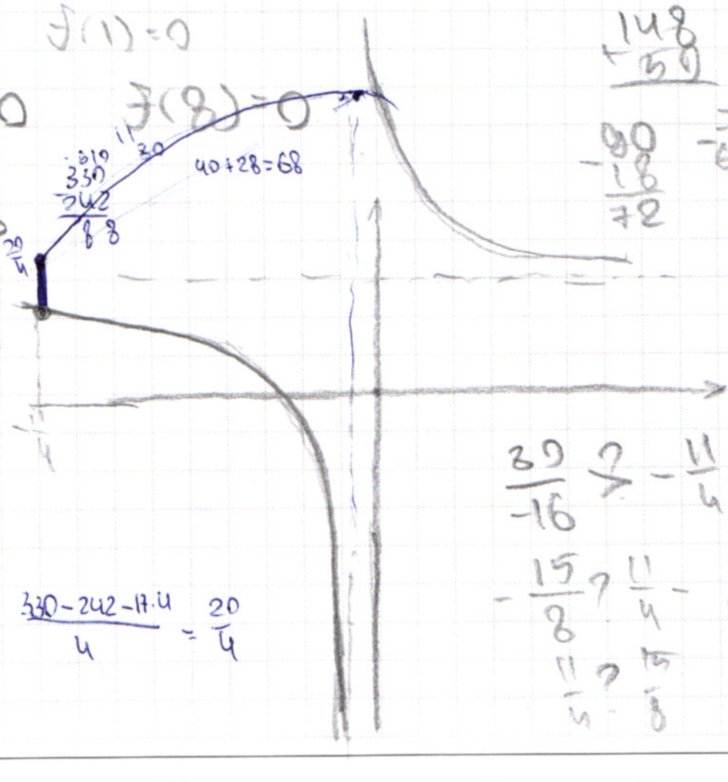
$4(15^2-8\cdot 17)$

$225-136=89$

$\frac{30}{-16}$

$-8\frac{121}{16}+\frac{30\cdot 11}{4}-17=\frac{330-242-17\cdot 4}{4}=\frac{20}{4}$

40+28=68



$\frac{30}{-16}\geq-\frac{11}{4}$

$-\frac{15}{8}?\frac{11}{4}$

$\frac{11}{4}?\frac{15}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)