МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2$

$x\geq 2 \quad y\leq 2x$

x^2+x

$-y^2+xy-$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

лемма Архимеда

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

$f(b)=f(1)+f(b)\Rightarrow f(1)=0$

$f(2)=0\quad f(3)=0\quad f(5)=1\quad f(7)=1$

$f\left(\frac{1}{24}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)$ 0

$f\left(\frac{1}{2}\right)$ $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(2)+f\left(\frac{x}{2y}\right)$

$f(1)=f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\quad f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$-\frac{225}{8}+\frac{450}{8}-17=\frac{225}{8}-17=11+\frac{1}{8}$ -17 $18-17=1$ $\frac{30}{-16}=\frac{15}{-8}=-\frac{15}{8}$ $\frac{15}{8}-\frac{3}{4}=\frac{15-6}{8}=\frac{9}{8}$

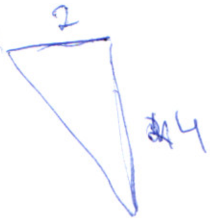
$(-8)\frac{9}{16}=-\frac{9}{2}$ $-\frac{3}{4}$

$-\frac{11}{4}$ $(-30)\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{90}{4}=\frac{45}{2}$ $\frac{225}{8}+\frac{450}{8}-17=$ $\left(-\frac{15}{8}\right)^2=\frac{225}{64}$ $-72+90-17=1$ $=3$ $\frac{24}{8}=$

$-\frac{11}{4}$!

$-8x^2-30x-17$

$$-8\cdot\frac{121}{16}+30\cdot\frac{11}{4}-17=-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17=\cancel{38}\frac{44}{2}-17=5$$



$k=-2$

$$\left(3+\frac{2}{4x+3}\right)'=2\left(\frac{1}{4x+3}\right)'$$

$$=\frac{2}{4}\left(\frac{1}{x+3/4}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3/4}\right)'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}=-2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}=4$$

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{4}$$

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)=-\frac{1}{16}$$

$\frac{12x+11}{4x+3}$

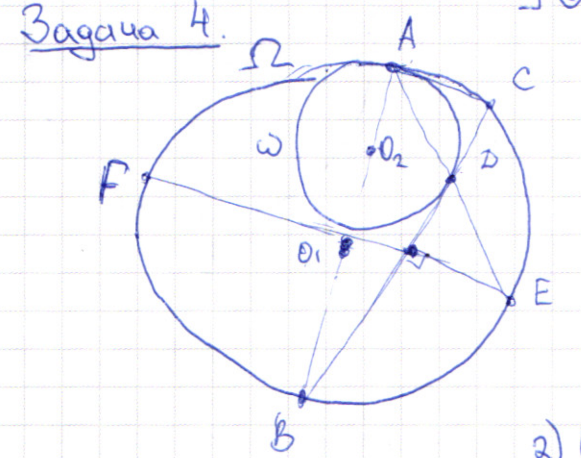
$$x=-\frac{1}{16}-\frac{3}{4}$$

$$=3+\frac{2}{-\frac{1}{4}-3+3}=3+\frac{2}{-\frac{1}{4}}=3-8=-5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.

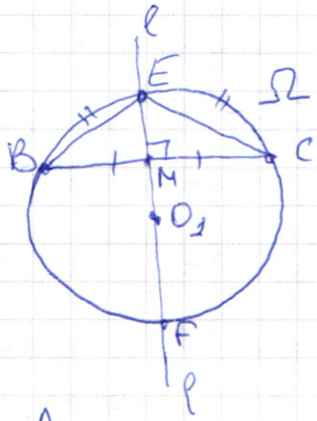
] O_1 – центр Ω;] O_2 – центр ω



1) По Лемме Архимеда, $[AE)$ – биссектриса $\angle BAC$.

Значит, $B\hat{A}E = C\hat{A}E$

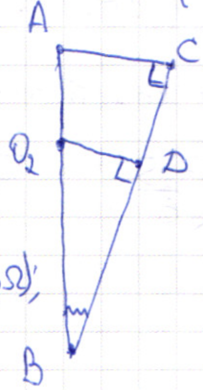
$\Rightarrow E$ – сер. дуги $\breve{BC}$ окр-ти Ω, не содержащей A.



2) E – сер дуги $\breve{BC} \Rightarrow$

$\Rightarrow |BE| = |EC| \Rightarrow \triangle BEC$ – равноб $\Rightarrow$ перпендикуляр l из E на $[BC]$ является сер. перпендикуляром к $[BC]$

$\Rightarrow l$ проходит через O_1 и через середину $[BC]$ – точку M



3) (BD) касается ω в $(\cdot)D \Rightarrow B\hat{D}O_2 = 90^\circ$

$[AB]$ – диаметр Ω; $C \in \Omega \Rightarrow A\hat{C}B = 90^\circ$

Тогда $O_2\hat{B}D = A\hat{B}C$ (углы совпадают)
$A\hat{C}B = B\hat{D}O_2 = 90^\circ$ $\Big| \Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle O_2DB$

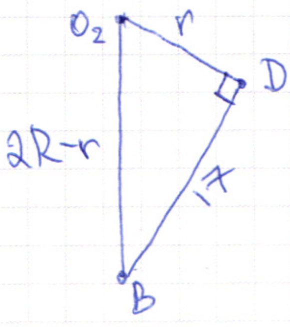
] R – радиус Ω; r – радиус ω. Тогда $|AB| = 2R$ (диаметр Ω);

$|BO_2| = |AB| - |O_2A| = 2R - r$.

$|BC| = |CD| + |BD| = 17 + 8 = 25$

$$\triangle ACB \sim \triangle O_2DB \Rightarrow \frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|O_2B|}{|BD|} \Rightarrow \frac{|AB|}{25} = \frac{|O_2B|}{17} \Rightarrow \frac{2R}{25} = \frac{2R-r}{17}$$

$$\Rightarrow 34R = 50R - 25r \Leftrightarrow 25r = 16R \Rightarrow r = \left(\tfrac{16}{25}\right) R.$$



~~По Th~~ По Th Пифагора для $\triangle O_2DB$:

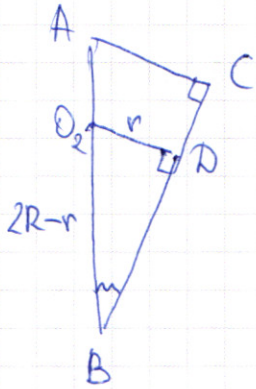
$$|O_2B|^2 = |O_2D|^2 + |BD|^2 \Rightarrow (2R-r)^2 = r^2 + 17^2$$

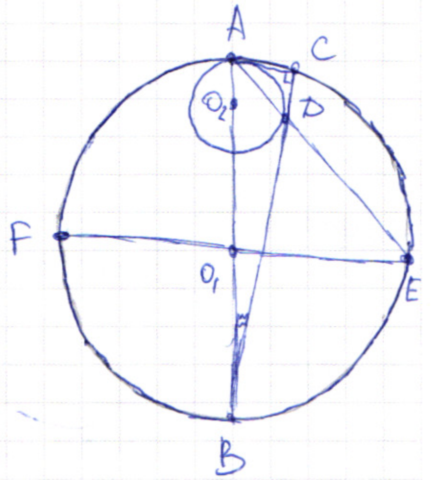
$$\Leftrightarrow (2R-r)^2 - r^2 = 17^2 \Leftrightarrow 2R\cdot(2R-2r) = 17^2$$

$$\underset{r=\frac{16}{25}R}{\Leftrightarrow} 2R \cdot 2 \cdot \frac{9}{25} R = 17^2 \Leftrightarrow R^2 = \frac{17^2 \cdot 5^2}{6^2} \overset{R>0}{\Leftrightarrow} R = \frac{17\cdot 5}{6}$$

Задача 4 (продолжение).

$r = \frac{16}{25}R = \frac{16}{25}\cdot\frac{17\cdot5}{6} = \frac{17\cdot8}{5\cdot3} = \frac{17\cdot8}{15} = \frac{136}{15}$





$\hat{ABC} = O_2\hat{B}D =$

$= \arcsin\left(\frac{r}{2R-r}\right) =$

$= \arcsin\left(\frac{\frac{16}{25}R}{\frac{34}{25}R}\right) =$

$= \arcsin\left(\frac{16}{34}\right) = \arcsin\left(\frac{8}{17}\right)$

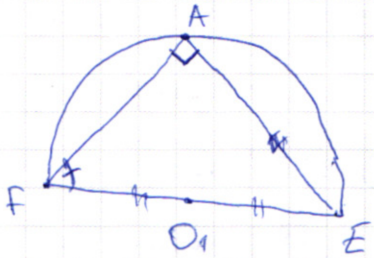
$ACBE$ − вписан в $\Omega \Rightarrow A\hat{F}C = A\hat{B}C = \arcsin\left(\frac{8}{17}\right)$.

E − сер. дуги $\breve{CB}$.

$C\hat{F}E = \frac{1}{2}C\hat{F}B = \frac{1}{2}\left(A\hat{F}B - A\hat{F}C\right) \xlongequal{[AB]\text{-диаметр}} \frac{1}{2}\left(90^\circ - A\hat{F}C\right) = 45^\circ - A\hat{F}C\cdot\frac{1}{2}$

$A\hat{F}E = A\hat{F}C + C\hat{F}E = A\hat{F}C + 45^\circ - \frac{A\hat{F}C}{2} = 45^\circ + \frac{A\hat{F}C}{2} = 45^\circ + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{8}{17}\right)$.

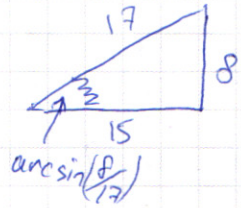
$S(\triangle AFE) = \frac{1}{2}\cdot\sin A\hat{F}E\cdot|AF|\cdot|FE| =$



$= \frac{1}{2}\sin A\hat{F}E\cdot\cos A\hat{F}E\cdot|FE|^2 =$

$= \frac{1}{4}\sin\left(2A\hat{F}E\right)\cdot|FE|^2 = \frac{1}{4}\left(4R^2\right)\sin\left(90^\circ + \arcsin\frac{8}{17}\right)$

$= R^2\cdot\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right) = \frac{15}{17}R^2 =$



$= \frac{15}{17}\left(\frac{17\cdot5}{6}\right)^2 = \frac{15\cdot17^2\cdot5^2}{17\cdot6^2} = \frac{15\cdot17\cdot5^2}{6^2} = \frac{17\cdot5^3}{12} = \frac{17\cdot125}{12}$

$= \frac{2125}{12}$.

Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{136}{15}$; $A\hat{F}E = 45^\circ + \frac{1}{2}\arcsin\frac{8}{17}$; $S(\triangle AEF) = \frac{2125}{12}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

1) $f(\cancel{1}x) = f(1\cdot x) = f(1) + f(x) \Rightarrow f(1) = 0$

2) 2, 3 - простые $\Rightarrow f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$; $f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$.

Остальные простые (до 24): $f(5) = 1$; $f(7) = 1$; $f(11) = 2$; $f(13) = 3$; $f(17) = 4$; $f(19) = 4$; $f(23) = 5$.

3) $f(b) = f\left(\frac{b}{a}\right) + f(a) \Rightarrow f\left(\frac{b}{a}\right) = f(b) - f(a)$

Тогда $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

x	f(x)	x	f(x)
1	0	14	$f(14)=f(2)+f(7)=1$
2	0	15	$f(15)=f(3)+f(5)=1$
3	0	16	$f(16)=f(2)+f(8)=0$
4	$f(4)=f(2)+f(2)=0$	17	$f(17)=4$
5	1	18	$f(18)=f(2)+f(9)=0$
6	$f(6)=f(2)+f(3)=0$	19	$f(19)=4$
7	1	20	$f(20)=f(10)+f(2)=1$
8	$f(8)=f(4)+f(2)=0$	21	$f(21)=f(7)+f(3)=1$
9	$f(9)=f(3)+f(3)=0$	22	$f(22)=f(11)+f(2)=2$
10	$f(10)=f(2)+f(5)=1$	23	5
11	2	24	$f(24)=f(12)+f(2)=0$
12	$f(12)=f(2)+f(6)=0$		
13	3		

U - мн-во нат. чисел от 1 до 24.

Среди $x \in \mathbb{N}$: $x \in [1; 24]$

$f(x)=0$ - верно для	11	чисел. Обозначим это мн-во чисел	A_0
$f(x)=1$	7	чисел	A_1
$f(x)=2$	2	чисел	A_2
$f(x)=3$	1	числа	A_3
$f(x)=4$	2	чисел	A_4
$f(x)=5$	1	числа	A_5

Осталось найти кол-во пар $(x; y)$ таких, что $f(x) < f(y)$.

~~Для 11 Возьм~~ 1) $f(x) = 0$; $f(y) \geq 1$: $\begin{cases} x \in A_0 \\ y \in A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \end{cases}$

Таких пар $(x; y)$: $|A_0| \cdot |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_5| = |A_0| \cdot |U \setminus A_0| = 11 \cdot 13 = 143$

2) $f(x)=1$; $f(y)\geq 2$. Т.е. $x\in A_1$; $y\in A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5$

Таких пар $(x;y)$: $|A_1|\cdot|A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5| = |A_1|\cdot|((U\setminus A_0)\setminus A_1)| =$

$= 7\cdot 6 = 42$

3) $f(x)=2$; $f(y)\geq 3$ Т.е. $x\in A_2$; $y\in A_3\cup A_4\cup A_5$

Таких пар $(x;y)$: $|A_2|\cdot|A_3\cup A_4\cup A_5| = 2\cdot 4 = 8$

4) $f(x)=3$; $f(y)\geq 4$. Т.е. $x\in A_3$; $y\in A_4\cup A_5$

Таких пар $|A_3|\cdot|A_4\cup A_5| = 1\cdot 3 = 3$

5) $f(x)=4$; $f(y)\geq 5$. Т.е. $x\in A_4$; $y\in A_5$.

Таких пар $|A_4|\cdot|A_5| = 2\cdot 1 = 2$

6) $f(x)=5$; $f(y)\geq 6$ — таких пар нет, т.к. $\forall y\in\mathbb{N}$, $y\leq 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(y)\leq 5 < 6$.

Итого, искомых пар

$143+42+8+3+2 = 185+13 = 198$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

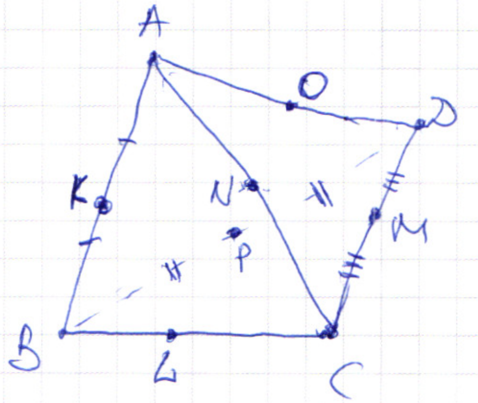
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7

$ABCD$ – пирамида

$|AB|=1$
$|BD|=2$
$|CD|=3$

Точка (обозн.)	Середина какого отрезка
K	[AB]
L	[BC]
M	[CD]
N	[AC]
O	[AD]
P	[BD]

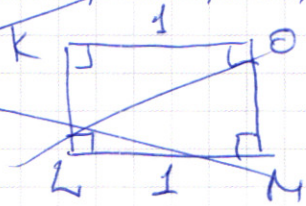


1) $\begin{cases} (OM)\parallel(AC)\parallel(KL) \\ \text{в } |OM|=\frac{|AC|}{2}=|KL| \end{cases}$ (т.к. $[OM]$ и $[KL]$ – ср. линии в $\triangle ADC$ и $\triangle ABC$)

$\Rightarrow$ KOML – параллелограмм (а также K, O, L, M лежат в 1ой пл-ти).

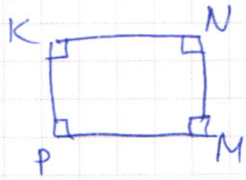
~~K, O, L, M лежат в одной пл-ти и на одной сфере $\Rightarrow$ KOLM – вписанный четырехугольник. А, поскольку еще известно, что KOML – параллелограмм, верно, что KOML – прямоугольник.~~

~~Тогда~~



2) Аналогично KNMP – параллелограмм, K, N, M, P лежат в одной пл-ти
K, N, M, P лежат на одной сфере $\Bigg| \Rightarrow$

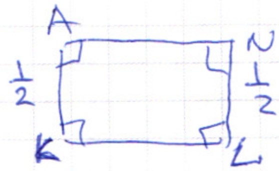
$\Rightarrow$ KNMP – впис. четырехугольник $\xRightarrow[\text{KNMP – пар/м}]{}$ KNMP – прямоугольник.



$\Rightarrow (BC)\parallel(KN)\perp(NM)\parallel(AD) \Rightarrow (BC)\perp(AD)$.

3) $\begin{cases} |NL|=\frac{1}{2}|AB|=|AK| \\ (NL)\parallel(AB)\equiv(AK) \end{cases}$ (по св-ву ср. линии для $\triangle ACB$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ AKLN – параллелограмм (*)



A, K, N, L лежат на одной сфере и в одной пл-ти $\Rightarrow$ A, K, N, L лежат на одной окр-ти

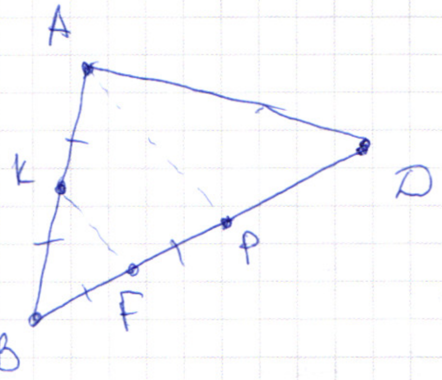
$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ AKLN – прямоугольник $\Rightarrow (AC)\equiv(AN)\perp(AK)\equiv(AB) \Rightarrow (AC)\perp(AB)$

F – середина [BP]

$|BF| = \frac{1}{2}|BP| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}$

Тогда ~~AB~~ $|BK|\cdot|BA| = \frac{1}{2}\cdot 1 = |BF|\cdot|BP|$

$\Rightarrow$ AKFP – вписанный (более того, это р/б трапеция, т.к. (KF) ∥ (AP) (KF – ср. линия в $\triangle APB$)), а значит, F лежит на сфере.



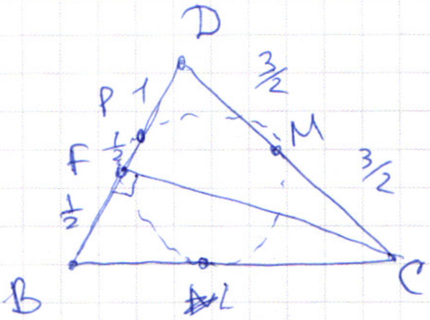
Тогда точки F, P, M и L лежат на одной сфере и в одной плоскости (BDC) $\Rightarrow$ лежат на одной окр-ти.

При этом P, M, L – сер. сторон $\triangle BDC$

$\Rightarrow$ (PML) – окр. Эйлера в $\triangle BDC$

$F \in [BD], F \not\equiv P, F \in (PML)$

$\Rightarrow$ F – основание высоты на (BD) из точки C.



При этом $|DM| = |MC| = \frac{|CD|}{2} = \frac{3}{2}$

Получается в прямоугольном $\triangle FDC$

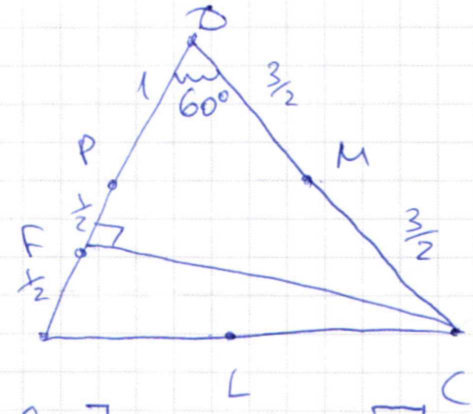
$|DF| = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}|DC| \Rightarrow \hat{FDC} = 60°$

$\hat{BDC} = \hat{FDC} = 60°$.

Тогда, по Th Косинусов,

$|BC|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 - 2|BD|\cdot|CD|\cdot$

$\cdot\cos 60° = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = 4+9-6 = 7 \Rightarrow |BC| = \sqrt{7}$.



Понятно, что радиус сферы не меньше радиуса окр-ти (PML), ~~так~~ который равен половине радиуса окр-ти (BDC) (т.к. $\triangle BDC \sim \triangle PML$ с коэф. $\frac{1}{2}$).

$R \geq \frac{|BD|\cdot|DC|\cdot|BC|}{4S(\triangle BDC)}\cdot\frac{1}{2}$

Формула пл-ди: $S = \frac{abc}{4R}$

$S(\triangle BDC) = \frac{1}{2}|BD|\cdot|DC|\cdot\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\cdot 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$R \geq \frac{2\cdot 3\cdot\sqrt{7}\cdot 2}{4\cdot 3\sqrt{3}\cdot 2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}\cdot 2}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

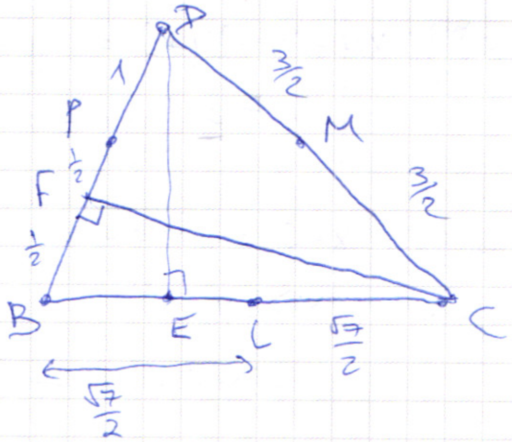
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

]E — осн-е высоты из D в △BDC. E лежит на окр-ти Эйлера (PML)



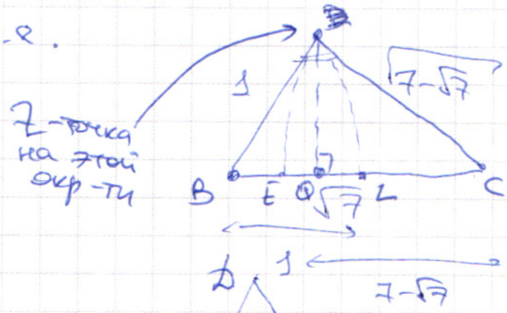
$|BF|\cdot|BP| = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2} = |BE|\cdot|BL| = |BE|\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}$

$\Rightarrow |BE| = \frac{1}{\sqrt{7}}$

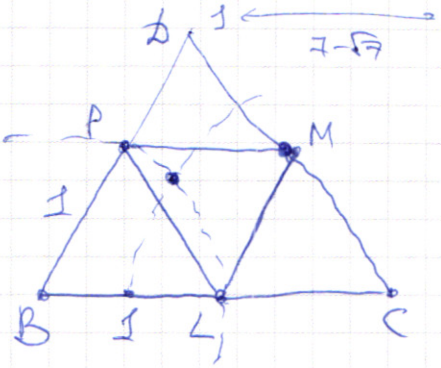
Тогда $|CL|\cdot|CE| = \frac{\sqrt{7}}{2}\cdot\left(\sqrt{7} - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) =$

$= \frac{\sqrt{7}(7-\sqrt{7})}{2\sqrt{7}} = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{7-\sqrt{7}}{2}$ — это степень C отн-но сферы.

Построим сферу радиуса 1 ~~из~~ с центром в B и радиусом $\sqrt{(7-\sqrt{7})}$ с центром в C. Их пересечение — окр-ть с центром Q на [CD] между точками E и L (т.е. Q — внутри круга (PML).



При этом одна из ~~точка~~ ~~перес~~ пересечения этой окр-ти с пл-тью (BDC) — внутри △PML. Значит, эта окр-ть пересекается со сферой (Ω), в которой главная окр-ть — окр-ть (~~K~~PML).



Отметим эту точку пересечения за A'. Тогда середина BA' тоже лежит на сфере Ω, т.к. $|BA'|\cdot\frac{|BA'|}{2} = 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ — степень B отн-но сферы Ω (и окр-ти (PML)), и середина [CA'] тоже, т.к. $|CA'|\cdot\frac{|CA'|}{2} = \frac{7-\sqrt{7}}{2}$ — степень C отн-но Ω (и окр-ти PML). Т.о. построен пример для оценки.

ОТВЕТ: $|BC| = \sqrt{7}$; $R \geq \sqrt{7}/(\sqrt{3}\cdot 2)$

Задача 2

1) $x^2+9y^2-4x-\cancel{4}\overset{18}{}y=12$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+9(y-1)^2=25$

2) $xy-x-2y+2 = y^2-2y+1-y^2+xy-(\frac{1}{2}x)^2+(\frac{1}{2}x)^2-x+1=$

$=(y-1)^2 - (y+\frac{1}{2}x)^2+(\frac{1}{2}x-1)^2$

Тогда $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2y \\ (x-2y)^2+(y+\frac{1}{2}x)^2=(y-1)^2+(\frac{1}{2}x-1)^2 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

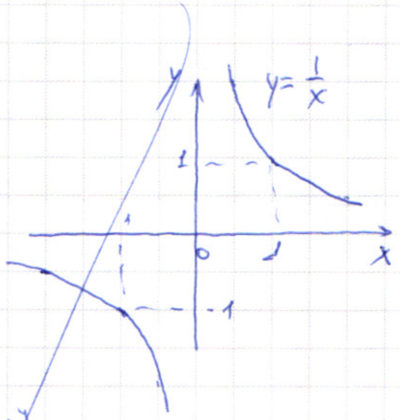
(заполняется секретарём)

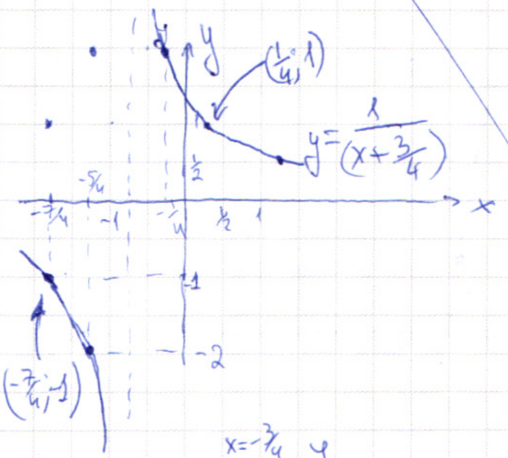
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

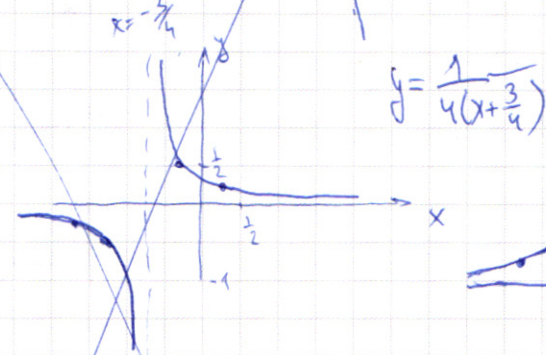
Задача 6

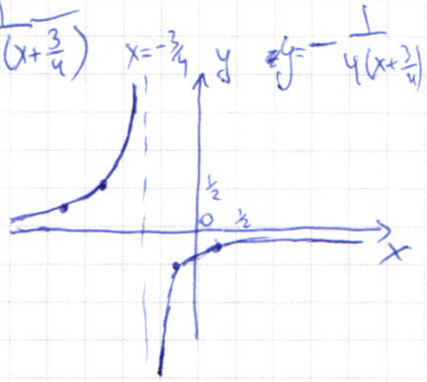
$$\frac{12x+11}{4x+3} \underset{①}{\le} ax+b \underset{②}{\le} -8x^2-30x-17$$

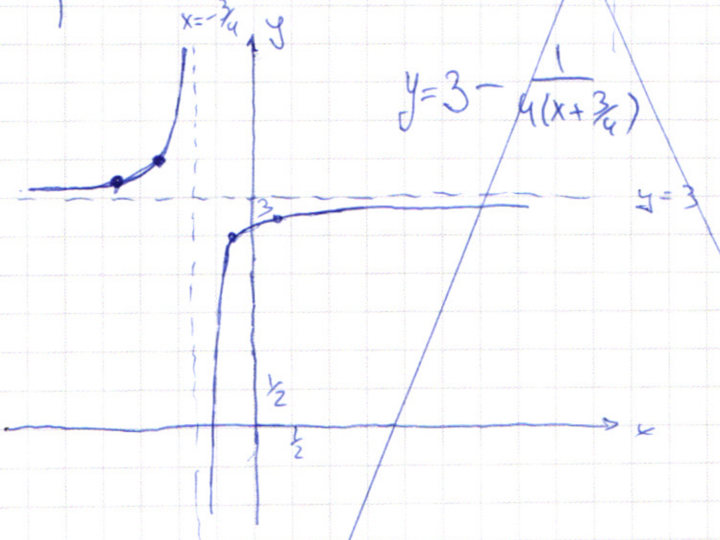
① $\iff 3 + \frac{2}{4(x+\frac{3}{4})} \le ax+b$











$$\lim_{x\to(-\frac{3}{4})-}\frac{12x+11}{4x+3} = \lim_{x\to(-\frac{3}{4})-}\left(3-\frac{1}{4x+3}\right) = +\infty$$

, т.е. на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ функция $\frac{12x+11}{4x+3}$ принимает сколь угодно большие значения. При этом $\lim_{x\to(-\frac{3}{4})-}(ax+b)\in\mathbb{R}$. Значит, существуют значения $x\in[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ такие, что $12x+11$

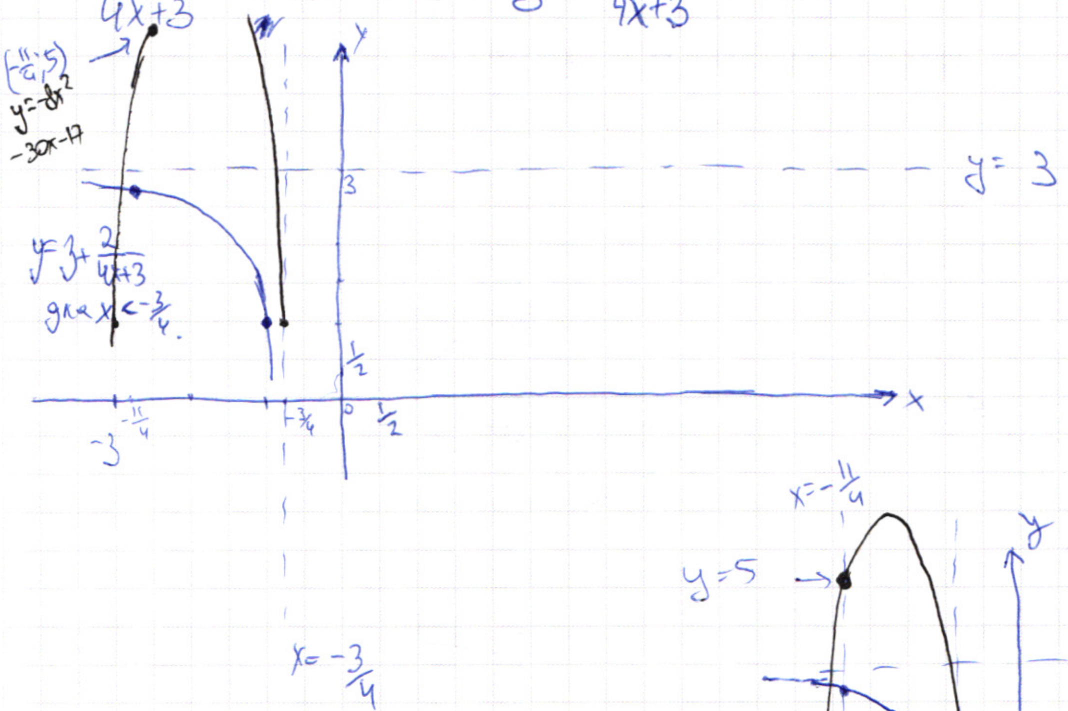
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

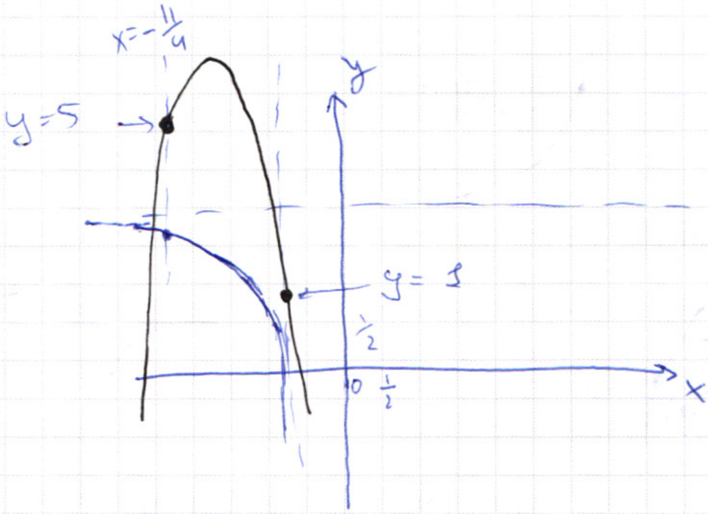
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

Задача 6

на $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \iff 3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b$$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$$\Leftrightarrow (x^2+18x) \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - \cancel{|x^2+18x|^{\log_{12}}}\ 5^{\log_{12}(x^2+18x)} \qquad (*)$$

ОДЗ

$$x^2+18x>0 \Leftrightarrow (x+18)x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18 \end{array}\right.$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} = 5^{\frac{\log_5(x^2+18x)}{\log_5 12}} = (x^2+18x)^{\frac{1}{\log_5 12}}$$

Тогда $(*) \Leftrightarrow (x^2+18x) \geqslant (x^2+18x)^{\log_{12}13} - (x^2+18x)^{\frac{1}{\log_5 12}}$

$$\Leftrightarrow (x^2+18x) \geqslant (x^2+18x)^{\log_{12}13} - (x^2+18x)^{\log_{12}5}$$

$$\frac{1}{\log_5 12} = \frac{\log_5 5}{\log_5 12} = \log_{12}5$$

$$\underset{(x^2+18x)^{\log_{12}5}>0}{\Longleftrightarrow} (x^2+18x)^{1-\log_{12}5} \geqslant (x^2+18x)^{\log_{12}13-\log_{12}5} - 1$$

$$\Leftrightarrow (x^2+18x)^{\log_{12}\left(\frac{12}{5}\right)} \geqslant (x^2+18x)^{\log_{12}\left(\frac{13}{5}\right)} - 1$$

$$\Leftrightarrow 1 \geqslant (x^2+18x)^{\log_{12}\left(\frac{13}{5}\right)} - (x^2+18x)^{\log_{12}\left(\frac{12}{5}\right)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geqslant (x^2+18x)^{\log_{12}\frac{12}{5}} \cdot \left((x^2+18x)^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right) =$$

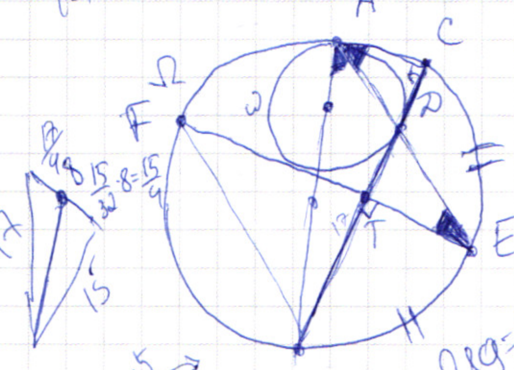
☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$17+15=32$



R, r – радиусы Ω и ω соотв.

$\hat{AFE}$ – ? $S(\triangle AEF)$ – ?

$CD=8$ $BD=17$

$BC=CD+BD=25$

EF – диаметр

$\hat{FAE}=90^\circ$

$57\cdot 8 = 80+56=136$

$\frac{1}{(x^2+18x)^{\log_{12}5}}$

$289=18^2\cdot 25\cdot 64$

$34-16=18$
$34+16=50$

$\frac{4}{\log_5 12} = \frac{\log_5 5}{\log_5 12} = \log_{12} 5$

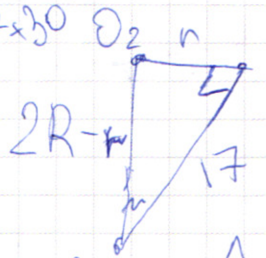
$\frac{85}{6}=\frac{425}{30}$

$R=$

$r=\frac{136}{15}=\frac{272}{30}$

$TD=4,5$

$34^2=16^2+30^2$

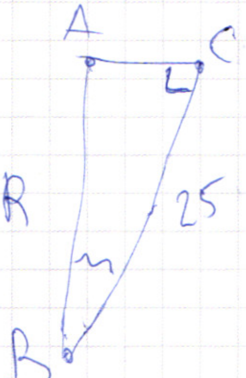


$850-272=$
$=700-22=678$

$\sqrt{34^2 R^2 - 16^2} R=$
$=\sqrt{18\cdot 50} R=$
$=5\cdot 2\cdot 3R=30R$

$\frac{272}{678}=\frac{136}{339}=\frac{8}{17}$

$34^2-16^2=$
$=18\cdot 50=$
$=900$



$125\cdot 8=$
$=1000$

$34\cdot 34=$
$=(30+4)^2=$
$=900+16+$
$+240=$
$=1156$
$16^2=256$

$\frac{2R}{25}=\cos=\frac{2R-r}{17}$

$34R=50R-25r$

$2125:12$

$\frac{85}{6}=14$

$25r=16R$

$17^2=$

$409-120=289$

$\left(\frac{34}{25}R\right)^2=\left(\frac{16}{25}R\right)^2+17^2$

$2100:(20-3)=$
$12=$

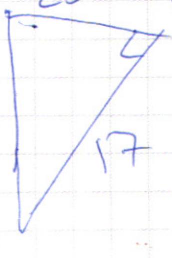
$R=\frac{17\cdot 5}{6}$ 289

$\frac{16}{25}R$ $\left(\frac{18}{25}R\right)^2+(2R-r)^2=17^2$ $r=\frac{16}{25}R$

$=21\cdot 25:3$
$7\cdot 25=$
$=175$

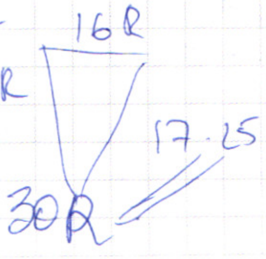
$r=\frac{16}{25}R=\frac{16\cdot 17\cdot 5}{25\cdot 6_3}=\frac{34}{25}R$

$196=\frac{17\cdot 8}{5\cdot 3}$



$\frac{36}{25}R^2=17^2$

$34R$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

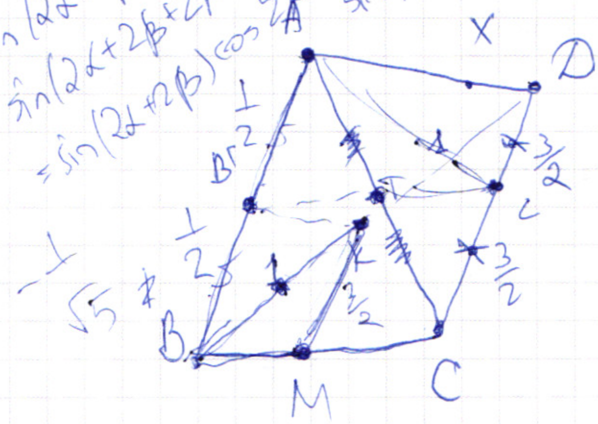
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

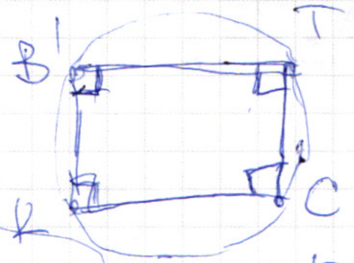
$\sin 2\alpha +$

$\sin(2\alpha+4\beta)=$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)=$

$=\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) \neq \sin 2\alpha$



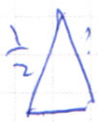


$\boxed{AD \perp BC}$ $TC \perp B'T$

$AD \perp BC$

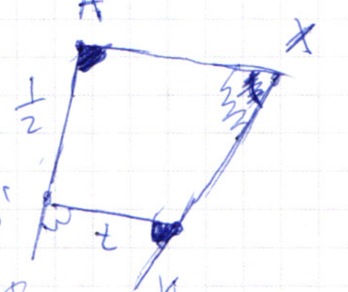
$[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ прямая $ax+b$ не ниже ~~прямой~~ гипербол

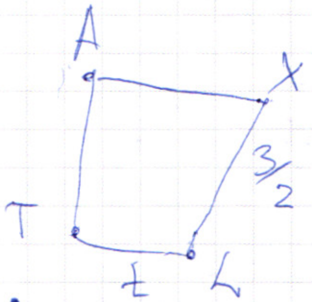
$3 - \frac{1}{4(x+\frac{3}{4})}$ и не выше



$30^2 - 4\cdot 17\cdot 8$

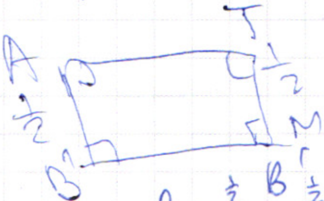
$\frac{30}{-16} = \frac{15}{-8}$



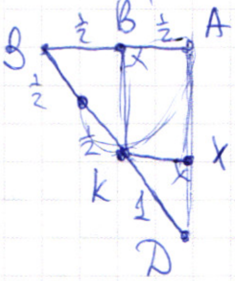


A T M B B'

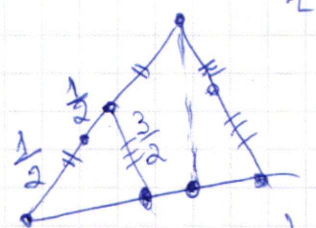
$1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2} = 1\cdot\frac{4}{2}$



$8\sqrt{7}$ 7

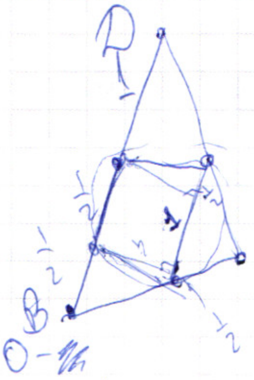


ст. C



$x^2+18x=f(x)$

$S=\frac{abc}{4R}$ R



$5^{\log_{12} f(x)}$

$5^{\frac{\log_5 f(x)}{\log_5 12}} = f(x)^{\log_{12} 5}$

$f(x)^{\log_{12} 12} \geq f(x)^{\log_{12} 13} - f(x)^{\log_{12} 5}$

$f(x)^{\log}$

$5^2+12^2=13^2$

$\log_{12^2} 13^2 =$

$=\log_{12} 13 =$

$=\log_{12}(12^2+5^2)$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	[illegible]	1	[illegible]	[illegible]	1	2	[illegible]

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
3	1	1	[illegible]	4	[illegible]	4	1	1	2	5	[illegible]

11
7
2
1
7
1

$\log_x(a+b)$ $\log_x a + \log_x b$ $\log_{12} 60^3$

$12^2 5^2$ $\log_x 6$

$2+2\log_{12} 5 \geq 2+\log_{12} x5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА