МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N. 1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (\mathrm{I}) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{8}{17} & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{4}{17} \end{cases} \Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\cos^2(2\beta)} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$\cancel{\cos(2\beta) = 1-2\sin^2\beta \Rightarrow \sin^2\beta =}$

Из I: $\left[\begin{array}{ll} 2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) & (1) \\ 2\alpha+2\beta = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) & (2) \end{array}\right.$

$\alpha+\beta = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ (Случай 1)

$\alpha = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \beta$

Для $\sin(2\beta)$ есть 2 варианта: $\left[\begin{array}{ll} \sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}} & (\mathrm{I}) \\ \sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (\mathrm{II}) \end{array}\right.$

Сразу условимся считать β и α с точностью до $+2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, т.к. это не повлияет на $\operatorname{tg}\alpha$. ~~Тогда можно рассматривать углы через arcфункции~~

Тогда в каждом из случаев возникают по две ситуации, принципиально различающиеся:

N. 1 (продолж.)

I $\left[\begin{array}{l}\beta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\\ \beta = \pi + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\end{array}\right.$

II $\left[\begin{array}{l}\beta = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\\ \beta = \pi - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\end{array}\right.$

Отсюда: $\alpha = -\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \beta$ может принимать следующие значения:

$$\alpha = \left[\begin{array}{l}-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\\ -\pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\\ 0\\ -\pi\end{array}\right.$$

В случае $\alpha = 0$ или $\alpha = -\pi$: $tg\alpha = 0$.

В случае $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$: $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$, т. к. α лежит в IV квадранте $\Rightarrow tg\alpha = -\frac{1}{4}$

В случае $\alpha = -\pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$: $\begin{cases}\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}\\ \cos\alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases}$, т. к.

α лежит во 2 квадранте $\Rightarrow tg\alpha = -\frac{1}{4}$

~~Ответ: $tg\alpha = 0$, $tg\alpha = \pm\frac{1}{4}$~~

Случай 2: $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \beta$

Угол β может принимать такие же значения, как в 1 случае.

Тогда:

$$\alpha = \left[\begin{array}{ll}\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) & (2.1)\\ \frac{3\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) & (2.2)\\ \frac{\pi}{2} & \\ \frac{3\pi}{2} & \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N. 1 (прод. 2)

При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ $tg\,\alpha$ не опр.

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ (2.1)

$\begin{cases} \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Rightarrow tg\,\alpha = -4$

$\alpha = \frac{3\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ (2.2)

$\begin{cases} \sin\alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}} \\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Rightarrow tg\,\alpha = -4$

Ответ: $tg\,\alpha = 0$; $tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$; $tg\,\alpha = 4$.

N. 3.

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + (x^2+6x) \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}$

Пусть $t = x^2+6x$

$3^{\log_4 t} + t \geqslant |t|^{\log_4 5}$

Т.к. t стоит под логарифмом, $t > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow |t| = t$.

$3^{\log_4 t} \geqslant t^{\log_4 5 - 1}$

$3^{\log_4 t} \geqslant t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

N. 3. (продолж).

$$3^{\frac{\log_3 t}{\log_3 4}} \geqslant t^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$t^{\frac{1}{\log_3 4}} \geqslant t^{\log_4\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$t^{\frac{1}{\log_3 4}} \geqslant t^{\frac{\log_3\left(\frac{5}{4}\right)}{\log_3 4}}$$

$$t^{\frac{1}{\log_3 4}} \geqslant \left(t^{\frac{1}{\log_3 4}}\right)^{\log_3\left(\frac{5}{4}\right)}$$

Т.к. $t > 0$, $t^{\frac{1}{\log_3 4}} > 0$

~~Т.е. необх~~ $\log_3\left(\frac{5}{4}\right) \in (0; 1)$, т.к. $1 < \frac{5}{4} < 3$.

Тогда $t^{\frac{1}{\log_3 4}} \geqslant \left(t^{\frac{1}{\log_3 4}}\right)^{\log_3\left(\frac{5}{4}\right)}$ при $t^{\frac{1}{\log_3 4}} \geqslant 1$

Возведем в степень $\log_3 4$, от этого неравенство не поменяется.

$t \geqslant 1$

Отсюда, т.к. это более сильное усл-ие, чем $t > 0$, а $t = x^2 + 6x$:

$x^2 + 6x \geqslant 1$

$x^2 + 6x - 1 \geqslant 0$

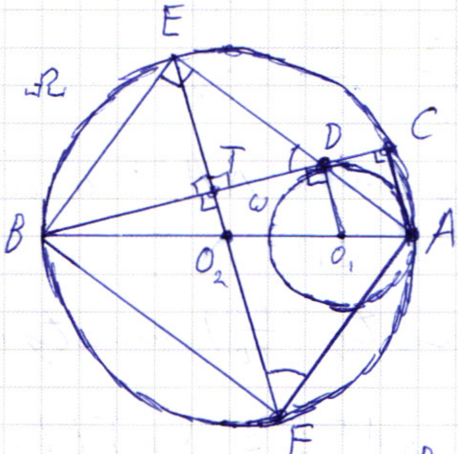
$D = 9 + 1 = 10 \Rightarrow \cancel{\begin{cases} x_1 = \frac{-3+\sqrt{10}}{1} \\ x_2 = \end{cases}}$ $\cancel{x_{1,2}} = \begin{cases} x_1 = \frac{-3+\sqrt{10}}{1} \\ x_2 = -3 - \sqrt{10} \end{cases}$

Отсюда: $x \in (-\infty; -3-\sqrt{10}] \cup [\sqrt{10} - 3; +\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; -3-\sqrt{10}] \cup [\sqrt{10} - 3; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N.4.



Решение:

Пусть $T = DC \cap EF$;

$BO_2 = \frac{BA}{2}$, т.к. BA - диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Т.к. $BT \perp EF$ и $BC \perp AC$, т.к. $\angle ACB = 90^\circ$, как опир. на диаметр, то $\triangle BO_2T \sim \triangle BAC$ с коэф. $k_1 = \frac{BO_2}{BA} = \frac{1}{2} \Rightarrow BT = \frac{1}{2}BC$.

В $\triangle BEC$: ET - высота по усл. Но также $BT = \frac{1}{2}BC \Rightarrow ET$ - ~~вы~~ медиана $\Rightarrow \triangle BEC$ - равноб. $\Rightarrow ET$ проходит через O_2 (это диаметр)

$BT = BC \cdot \frac{1}{2} = \frac{BD + CD}{2} = \frac{9}{2}$

$ET^2 = BT \cdot TD$, т.к. $\triangle BED$ - прямоуг., т.к. $\angle AEB$ опир. на диам., а ET - высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Т.к. $TD = BD - BT = 2$, то $ET = \sqrt{BT \cdot TD} = 3$.

Пусть: $R(\Omega) = R$ и $R(\omega) = r$.

Тогда: $EO_2 = R$ и $EO_2 = ET + TO_2$

Т.к. $\angle EDT = \angle CDA$ как верт. и $\angle ETD = \angle ACD = 90^\circ$, то $\triangle ETD \sim \triangle ACD \Rightarrow AC = \frac{CD}{DT} \cdot ET = 3 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{4}$

N. 4 (продолж)

$O_2T = \frac{AC}{2} = \frac{15}{8}$

Тогда: $R = ET + O_2T = 3 + \frac{15}{8} = \frac{39}{8}$

$O_1D \perp BC$ как рад. к касат. $\Rightarrow \triangle BTO_2 \sim$
$\sim \triangle BDO_1$, т.к. $\angle B$ - общ., а $\angle BTO_2 = \angle BDO_1 = 90°$.

Тогда $r = O_2T \cdot \frac{BD}{BT} = \frac{13}{\cancel{9}_3} \cdot \frac{\cancel{15}5}{8} = \frac{65}{24}$

$\angle AFE = \angle TDE$ из подобия $\triangle AFE$ и $\triangle TDE$, т.к. $\angle E$ - общ., а $\angle ETD = \angle EAF = 90°$, т.к. EF - - диам. $\Rightarrow \angle AFE = \angle TDE = \operatorname{arctg}\left(\frac{ET}{TD}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right)$

Также отсюда: $S_{\triangle AFE} = S_{\triangle TED} \cdot \left(\frac{2R}{ED}\right)^2 =$
$= S_{\triangle TED} \cdot \left(\frac{2R}{\sqrt{ET^2+TD^2}}\right)^2 = \frac{1}{2} ET \cdot TD \cdot \frac{4 \frac{(39)^2}{64}}{13} = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{2}^1 \cdot 3 \times$
$\times \frac{9 \cdot 13}{16} = \frac{27 \cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$

Ответ: $S_{\triangle AFE} = \frac{351}{16}$; $\angle AFE = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right)$;
$R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$

N. 5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$.

Из усл-ия $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \Rightarrow f(2) = 0 = f(3)$; $f(5) =$
$= f(7) = 1$; $f(11) = 2$; $f(13) = 3$; $f(17) = f(19) = 4$; $f(23) = 5$

$\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right)}$ $f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Разобьём на группы все числа от 3 до 27, учитывая, что $f(1) = 0$, т.к.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N.5 (продолж).

$f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)$, т.е. при равных x и y: $f(\frac{x}{y})=0$, т.е. такие $(x;y)$ не подходят.

Составляем, разбивая число на множители. Пример: $f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=0$ и т.д.

Получим:

Для $\alpha\in\{2;3;6;8;9;12;16;18;24;27\}$: $f(\alpha)=0$.

Для $\alpha\in\{5;7;10;14;15;20;21\}$; $f(\alpha)=1$

Для $\alpha\in\{11;22;25\}$: $f(\alpha)=2$

Для $\alpha\in\{13;26\}$: $f(\alpha)=3$

Для $\alpha\in\{17;19\}$: $f(\alpha)=4$

И для $\alpha=23$: $f(\alpha)=5$.

Т.к. $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$, то для каждого числа α из группы с $f(\alpha)<f(\beta)$: подходит α в числителе и β в знаменателе.

Отсюда, всего пар: $10\cdot 15+7\cdot 8+$
$+3\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 1=150+56+15+6+2=206+23=$
$=229$

Ответ: 229

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N.2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ (\sqrt{3}x)^2-6x+((y\sqrt{3})^2-4y)=4 \end{cases}$$

$$6=2\cdot 3=2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} \quad ; \quad 4=2\cdot 2=2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+(y\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}})^2=\frac{25}{3} \end{cases}$$

$$3xy-2x-3y+2\geqslant 0$$

$$3y(x-1)-2(x-1)\geqslant 0$$

$$\begin{cases} \begin{cases} (x-1)(3y-2)\geqslant 0 \\ 3y\geqslant 2x \\ 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \end{cases} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha=2x+3y \\ \beta=3x+2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\cancel{\alpha+\beta}\ \frac{3\beta-2\alpha}{5} \\ y=\frac{3\alpha-2\beta}{5} \end{cases}$$

N. 3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + (x^2+6x) \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$$

$x^2+6x = t$, $t > 0$

$$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5}$$

$x^2+6x > 0 \Rightarrow x(x+6) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

Т. к. $t > 0$: $3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5 - 1} = t^{\log_4 5 - \log_4 4} =$

$= t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}$ I. $t = 1 \Rightarrow 1 \geq 1^{\log \frac{5}{4}}$ (V)

$3^{\frac{\log_3 t}{\log_3 4}} \geq t^{\frac{\log_4 \frac{5}{4}}{\log_4 4}}$ II $t \neq 1$.

$t^{\frac{1}{\log_3 4}} \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$\frac{1}{\log_3 4} \vee \log_4 \frac{5}{4} = \frac{\log_3 \frac{5}{4}}{\log_3 4} \Rightarrow \log_4 \frac{5}{4} < \frac{1}{\log_3 4}$,

т. к. $\log_3(\frac{5}{4}) \in (0; 1)$

$t^{\frac{1}{\log_3 4}} \geq t^{\log_4(\frac{5}{4})}$

Такое возможно при $t \geq 1$

$x^2+6x-1 > 0 \Rightarrow D = 10 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{1}$

$x \in (-\infty; -3-\sqrt{10}) \cup (\sqrt{10}-3; +\infty)$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N. 1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{8}{17} \end{cases}, \ tg\,\alpha = ?$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \\ \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x) \end{cases}$$

$\alpha = x+y \quad ; \beta = x-y \implies x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ и $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{8}{17} \end{cases} \implies$$

$$\implies \frac{1}{\sqrt{17}}\cos(2\beta) = \frac{4}{17} \implies \cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos(2\beta) = 1 - 2\sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$$

Отсюда: $\begin{cases} \sin^2\beta = \frac{\sqrt{17}-4}{2\sqrt{17}} \\ \cos^2\beta = \frac{\sqrt{17}+4}{2\sqrt{17}} \end{cases}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\beta)=\pm\sqrt{1-\cos^2(2\beta)}=\pm\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\frac{\pm1}{\sqrt{17}}$

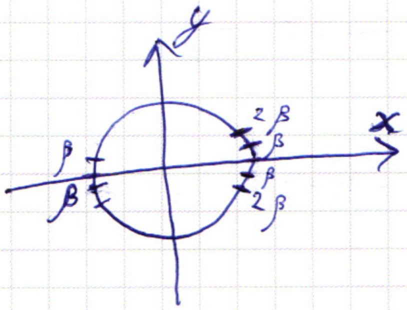
$\frac{\sin(2\alpha)\cdot 4\pm\cos(2\alpha)}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin(2\alpha)\pm\cos(2\alpha)=-1$

$2\alpha+2\beta=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\alpha=-\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)-\beta$



Для β 4 варианта.

~~cos(2β)=~~

I $\sin(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}$ =>

=> $\cos(2\beta)=$

$=1-2\sin^2\beta$ => $\sin^2\beta=\frac{\sqrt{17}-4}{2\sqrt{17}}$ и $\sin\beta=\pm\frac{\sqrt{17}-4}{2\sqrt{17}}$

$\sin\left(2\alpha\pm\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{array}{l}2\alpha\pm\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\\ 2\alpha\pm\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\end{array}\right.$$

I $2\alpha=0$ => $tg\,\alpha=0$; II $\alpha=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ =>

=> $tg\,\alpha=\pm\frac{1}{4}$; III $\alpha=\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ =>

=> $\alpha=\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right)$ => $tg\,\alpha=\underline{-4}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N. 5.

$x, y \in \mathbb{N}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, $\forall p$ - простого.

$\begin{cases} 3 \leq x \leq 27; \; 3 \leq y \leq 27; \; f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \\ \text{Найти: кол-во таких пар} = ? \end{cases}$

$\{3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23\} \in P$ - простым.

$f(3) = 0$; $f(5) = f(7) = 1$; $f(11) = 2$; $f(13) = 3$; $f(17) = 4$; $f(19) = 4$; $f(23) = 5$

$f(2) = 0 \Rightarrow f(2b) = f(b)$, $\forall b \notin P$.

$f(3) = 0 \Rightarrow f(3b) = f(b)$, $\forall b \notin P$

$f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 0 \Rightarrow f(4) = 0$

$f(5) = 1$; $f(6) = 0$; $f(7) = 1$; $f(8) = 0$; $f(9) = 0$; $f(10) = f(5) + f(2) = 1$; $f(11) = 2$; $f(12) = 0$; $f(13) = 3$; $f(14) = 1$; $f(15) = 1$; $f(16) = 0$; $f(17) = 4$; $f(18) = 0$; $f(19) = 4$; $f(20) = 1$; $f(21) = 1$; $f(22) = 2$; $f(23) = 5$; $f(24) = 0$; $f(25) = 2$; $f(26) = 3$; $f(27) = 0$

Если $f\left(\frac{x}{y}\right)$, то $x \not\vdots y$

$f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

I $f(y)=0$ при $y=3;4;6;8;9;12;16;18;24;27.$

II $f(y)=1$ при $y=5;7;10;14;15;20;21;$

III $f(y)=2$ при $y=11;22;25$

IV $f(y)=3$ при $y=13;26$

V $f(y)=4$ при $y=17;19;$

VI $f(y)=5$ при $y=23$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y) \Rightarrow$ Верно при $x \vdots y$ и ~~...~~

$f(x) < f(y)$ ~~и $x=ky$, $k>1$, $k \in \mathbb{N}$.~~

~~$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ т.е. может быть отриц.~~

~~Для $x=23$: k вар.~~

~~Для $x=17; 19$: 24 вар.~~

~~Для~~ x

$f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)+f(2)=0$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=f(1)+f(3)=0$

$f\left(\frac{1}{4}\right)=0$; $f\left(\frac{1}{5}\right)=-1$;

$f\left(\frac{1}{6}\right)=0$;

$f\left(\frac{1}{7}\right)=-1.$

$f(1)=f\left(\frac{1}{1}\right)=f(1)+f(1)$

$f(1)=f(1)\cdot 2 \Rightarrow f(1)=0$

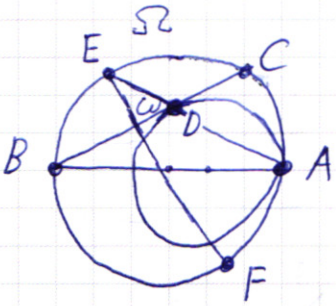
$f(x)<f(y)$ и $x \vdots y$ — усл-и : $f\left(\frac{x}{y}\right)<0.$

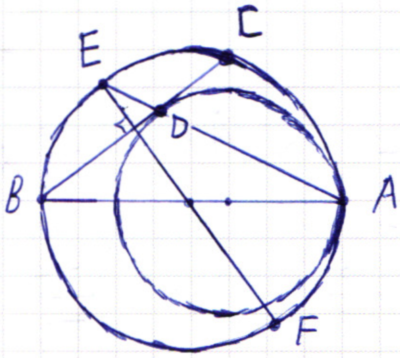
Сумм: Для VI : 0 вар.; Для V : 2 вар.; Для IV : 6 вар;

Для III : 15 вар; Для II

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N. 4.



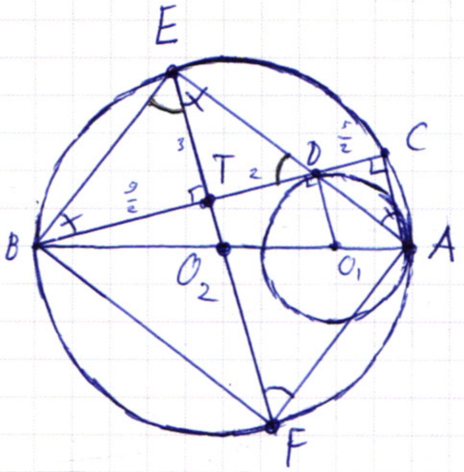


$R(\omega) = ?$; $R(\Omega) = ?$

$S_\triangle AFE = ?$ $\angle AFE = ?$

$CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$

$R(\Omega) = R$; $R(\omega) = r$.



$ET^2 = BT \cdot DT$

$BT = \frac{BC}{2}$ из подобия $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BCE$ - равноб.! $\Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ - диаметр.

$BT = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow TD = 2$

$\cancel{\sim}$ $\frac{R(\Omega) - O_2T}{TD} = \frac{2O_2T}{CD}$

$\frac{5}{2}R - \frac{5}{2}O_2T = 4O_2T$

$\frac{5}{2}R = \frac{13}{2}O_2T \Rightarrow \cancel{R} \; O_2T = \frac{5}{13}R$

$AC = 2O_2T = \frac{10}{13} R$

$4R^2 = 9^2 + \frac{100}{169} R^2$

$\times\begin{array}{r}169\\4\\\hline 676\end{array}$ $\times\begin{array}{r}13\\15\\\hline 65\\13\\\hline 195\end{array}$

$\frac{576}{169} R^2 = 81$

$576 =$

$\frac{24}{13} R = 9$

$\times\begin{array}{r}16\\16\\\hline 96\\16\\\hline 256\end{array}$ $\times\begin{array}{r}26\\26\\\hline 156\\52\\\hline 676\end{array}$ $\times\begin{array}{r}24\\24\\\hline 96\\48\\\hline 576\end{array}$

$\frac{8}{13} R = 3$

$R(\Omega) = \frac{39}{8} \Rightarrow AC = \frac{10}{13} R = \frac{3 \cdot \cancel{10}^{5}}{\cancel{8}_4} = \frac{15}{4}$

$2\frac{r}{13} = \frac{15}{4 \cdot 9} = \frac{15}{36} \Rightarrow r = \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{36}_{12}} \cdot \frac{13}{2} = \frac{195}{72}$

$r = \frac{195}{72} = \frac{65}{24}$, $R = \frac{39}{8}$

$ET = \sqrt{BT \cdot DT} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot 2} = 3$

Отсюда: $\boxed{\angle AFE = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2}\right)}$

$S_\Delta ETD = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$; $ED = \sqrt{13} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_\Delta AFE = S_\Delta ETD \cdot \left(\frac{2R}{ED}\right)^2 = 3 \cdot \left(\frac{39}{4\sqrt{13}}\right)^2 =$

$= \frac{3 \cdot 9 \cdot 13^{\cancel{2}}}{16 \cdot \cancel{13}} = \frac{27 \cdot 13}{16}$

$\times\begin{array}{r}27\\13\\\hline 81\\27\\\hline 351\end{array}$

$\boxed{S_\Delta AFE = \frac{351}{16}}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА