(ФИО родителя/законного представителя полностью) (подпись)

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \quad (2) \end{cases}$$

(2): $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos2\beta = -\frac{2}{5}$;

$\cos2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$; $\Rightarrow$ $\sin2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$;

1) $\cos2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$; $\sin2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$;

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \cos2\alpha\cdot\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$;

$$\frac{\sin2\alpha}{\sqrt5} + \frac{2\cos2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$-\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 3\cos^2\alpha = 0$; $\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow$

$-(tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3) = 0$

$-(tg\alpha-3)(tg\alpha+1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 3 \\ tg\alpha = -1 \end{array}\right.$

2) $\cos2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$; $\sin2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$;

$$\frac{\sin2\alpha}{\sqrt5} - \frac{2\cos2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$;

$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha = 0$; $\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$,

$(3\,tg\,\alpha-1)(tg\,\alpha+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha=\frac{1}{3} \\ tg\,\alpha=-1 \end{array}\right. \Rightarrow tg\,\alpha=\frac{1}{3},\ tg\,\alpha=-1;\ tg\,\alpha=3;$

Ответ: $tg\,\alpha=-1;\ \frac{1}{3};\ 3.$

№2

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$ $\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$

Пусть $\sqrt{x-6}=a$; $\sqrt{2y-1}=b$; тогда $x=a^2+6$; $12y=6b^2+6$;

$\begin{cases} a^2+6-6b^2-6=ab \\ a^4+9b^4=90 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2-ab-6b^2=0; (1) \\ a^4+9b^4=90; (2) \end{cases}$

(1): $(a-3b)(a+2b)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=3b \\ a=-2b \text{ — не подх., т.к. } a\geq 0;\ b\geq 0; \end{array}\right.$

$a=3b \rightarrow (2)$:

$81b^4+9b^4=90$; $b^4=1$; $b=1$; $b=-1$ — не подх., т.к. $b\geq 0$; $\Rightarrow$

$\begin{cases} b=1 \\ a=3 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{2y-1}=1 \\ \sqrt{x-6}=3 \end{cases}$ $\begin{cases} y=1; \\ x=15; \end{cases}$

Ответ: $x=15,\ y=1.$

~~$\log_3 (10x-x^2)(1+(10x-x^2)^{\log_3 4-1}) \geq (10x-x^2)\cdot\log_3 5$~~

~~$\log_3(10x-x^2)+\log_3(1+(10x-x^2)^{\log_3 4-1}) \geq (10x-x^2)\cdot\log_3 5$~~

~~$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$~~

~~$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$~~ ~~$t^{\log_3 5-1} \geq$~~

~~$4^{\log_3 t}$~~

~~$t+ \geq 5$~~ ~~$t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}$~~ ~~$t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}-t\geq 0$~~

~~$1\geq t^{\log_3 5-1}$~~ ~~$t\left(t^{\log_3 \frac{5}{3}}-t^{\log_3 \frac{4}{3}}-1\right)\geq 0$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

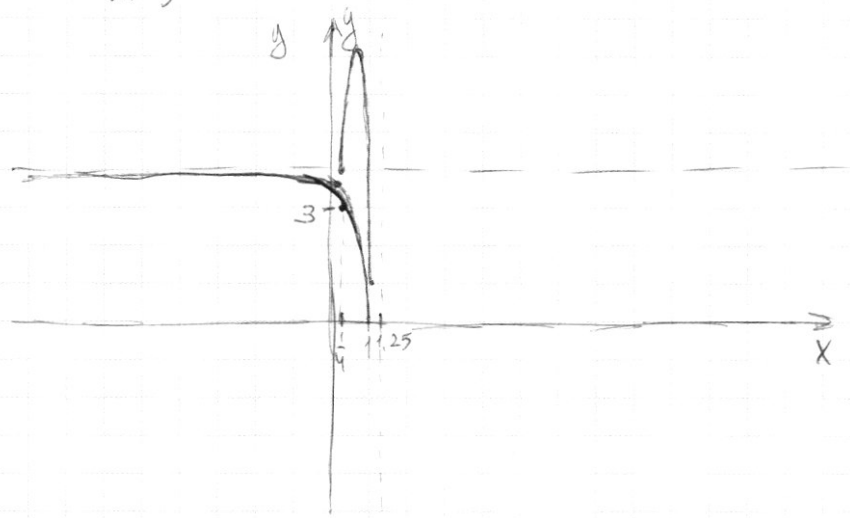


График $F(x)=4+\frac{4}{4x-5}$ в $\frac{1}{4}$ имеет значение 3, а $F(1)=0$;

$g(x)=-32x^2+36x-3$ в: $g(\frac{1}{4})=4$; $g(1)=1$;

Первая подходящая нам прямая проходит через точки $(\frac{1}{4};4)$;$(1;1)$.

$\begin{cases} \frac{1}{4}a+b=4; \\ a+b=1; \end{cases}$ $\frac{3}{4}a=-3$, $a=-4$; $b=5$;

Проверим решения уравнения: $4+\frac{4}{4x-5}=-4x+5$

$-4x+1=\frac{4}{4x-5}$;

$-(4x-1)(4x-5)=4$;

$16x^2-24x+5=-4$;

$16x^2-24x+9=0$

$(4x-3)^2=0 \Rightarrow$ прямая $y=-4x+5$ касается $F(x)=4+\frac{4}{4x-5}$; $\Rightarrow$

Данная прямая будет единственной, подходящей под условие, т.к. иначе она пересечёт либо параболу, либо гиперболу, если уменьшать $tg(\alpha)$ наклона прямой.

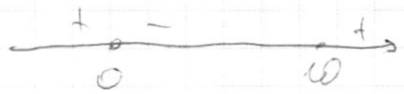
Ответ: $(-4;5)$.

№3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2>0$; ~~$10x-x^2$~~

$x(x-10)<0$;



$x\in(0;10), \Rightarrow x^2-10x\leq 0$;

$(10x-x^2)^{\log_3 3}+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

Пусть $10x-x^2=t$;

$t^{\log_3 3}+t^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t}$

$3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t}\geq 5^{\log_3 t}$;

$3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t}=5^{\log_3 t}$ выполняется при $\log_3 t=2$;

Это будет единственная точка пересечения, т.к. при $\log_3 t>2$

$(5^{\log_3 t})'>(3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t})'$; $\Rightarrow$ $\log_3 t\in(-\infty;2]$; $t\in(0;9]$,

$10x-x^2\leq 9$; $x^2-10x+9\geq 0$; $(x-9)(x-1)\geq 0$; $x\in(-\infty;1]\cup[9;+\infty)\Rightarrow$

$x\in(0;1]\cup[9;10)$,

Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$F(\frac{x}{y}) = F(x) + F(\frac{1}{y});$

$\cancel{F(\frac{1}{a^2}) = 2F(\frac{1}{a})}$ Пусть $a = b = \frac{1}{c}$, тогда $F(\frac{1}{c^2}) = 2F(\frac{1}{c})$

$F(\frac{1}{y}) = F(y) + F(\frac{1}{y^2}) = F(y) + 2F(\frac{1}{y})$

$F(\frac{1}{y}) = -F(y);$

$F(\frac{x}{y}) = F(x) - F(y);\ F(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow F(x) < F(y).$

Пусть $a = b = 0$, тогда $F(0) = 2F(0) \Rightarrow F(0) = 0;$

Пусть $b = 1$, тогда $F(a) = F(a) + F(1) \Rightarrow F(1) = 0;$

Посчитаем значение функций во всех точках от 2 до 25;

$F(2) = 0;\ F(3) = 0;\ F(5) = 1;\ F(7) = 1;\ F(11) = 2;\ F(13) = 3;\ F(17) = 4;\ F(19) = 4;$
$F(23) = 5;$

$F(4) = 2F(2) = 0;\ F(6) = F(2) + F(3) = 0;\ F(8) = F(4) + F(2) = 0;\ F(9) = 0;\ F(10) = 1;$
$F(12) = 0;\ F(14) = 1;\ F(15) = 1;\ F(16) = 0;\ F(18) = 0;\ F(21) = 1;\ F(22) = 2;\ F(24) = 0;$
$F(25) = 2;$

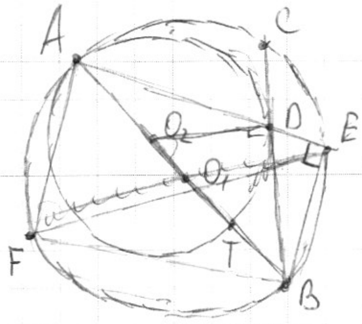
Таким образом, у нас 10 значений $F = 0$, 6 значений $F = 1$,
3 значение $F = 2$, 1 значение $F = 3$, 2 значение $F = 4$, 1 значение $F = 5$;

Тогда общая сумма S всех возможных комбинаций x и y, чтобы $F(x) < F(y)$:

$S = 6 \cdot 10 + 3 \cdot 16 + 19 + 2 \cdot 20 + 22 = 189$

Ответ: 189.

№4



Дано: $\Omega(O_1; R_1)$;
$\omega(O_2; R_2)$;
$\omega(O_2; R_2) \cap \Omega(O_1; R_1)$;
AB - диаметр;
BC - хорда;
$BC \cap \omega(O_2; R_2) = D$,
$(AD) \cap \Omega(O_1; R_1) = E$;
$E \in a$; $a \perp BC$; $a \cap \Omega(O_1; R_1) = F$; $CD = 7{,}5$; $BD = 8{,}5$

Найти: R_1; R_2; $\angle AFE$;
$S_{\triangle ABF}$;

Решение:

Пусть $AD \cap \omega(O_2; R_2) = T$;
Тогда по т. о касат. и секущей:
$BD^2 = BT \cdot AB$; $BT = 2R_1 - 2R_2$;
$\frac{289}{4} = (2R_1 - 2R_2) 2R_1$;
$OO_1 = R_1 - R_2 \Rightarrow O_2B = 2R_1 - R_2$;
$O_2D \perp BD \Rightarrow$ если $\angle CBA = \alpha$, то $\cos\alpha = \frac{17}{2(2R_1 - R_2)}$;
По т. косинусов в $\triangle BO_1C$: $R_1^2 + 256 - 2 \cdot R_1 \cdot 16 \cdot \cos\alpha = R_1^2$
$R_1 \cdot \cos\alpha = 8$; $17R_1 = 32R_1 - 16R_2$; $R_2 = \frac{15}{16}R_1$;
$\frac{289}{4} = \frac{32-30}{16} R_1 \cdot 2R_1$; $R_1^2 = 289$; $R_1 = 17$; $R_2 = \frac{255}{16}$;
Пусть $\cos\angle DO_2B = \frac{O_2D}{O_2B} = \cancel{\frac{255}{16(34 - \frac{255}{16})}} = \frac{R_2}{\frac{32}{15}R_2 - R_2} = \frac{15}{17}$;

~~По $\cos\angle AO_2D = -\cos\angle DO_2B$; По т. косинусов в $\triangle AO_2D$ $AD^2 = 2R_2^2 + 2R_2^2 +$~~

Пусть $\angle DO_2B = \beta$; $\angle AO_2D = 180° - \beta$; $\angle O_2AD = \frac{180° - 180° + \beta}{2} = \frac{\beta}{2}$;
$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$, $\cos\beta = \sqrt{\frac{\cos 2\beta + 1}{2}}$, $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$; $\angle AEB = 90°$, т.к.
AB - диаметр; $\angle EBA = 90° - \frac{\beta}{2}$; $\cos(90 - \frac{\beta}{2}) = \sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{17}}$;
$\angle EBA = \angle AFE$, т.к. опираются на одну дугу $\Rightarrow$ $\angle AFE = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$;
Ответ: $R_1 = 17$; $R_2 = \frac{255}{16}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

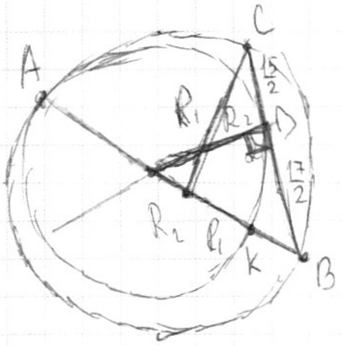
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

F



$\frac{289}{4} = (2R_1 - 2R_2) \cdot 2R_1$

$R_1 + R_1 - R_2 = 2R_1 - R_2$

256 | 32

$\cos\alpha = \frac{17}{2(2R_1 - R_2)}$

$R_1^2 = R_1^2 + 256 - 2 R_1 \cdot \cos\alpha \cdot 16$

$R_1 \cdot \cos\alpha = 8$

$17R_1 = 16(2R_1 - R_2)$

108

$17R_1 = 32R_1 - 16R_2$

$R_2 = \frac{15}{16} R_1$

127

$\frac{289}{4} = \frac{8}{4} R_1 \cdot 2R_1$

167

189

$R_1 = 17$

$R_2 = \frac{15}{16} R_1 =$

$17 \cdot 15 = \frac{255}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = -1 = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha = 0 \quad /:\cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$(3tg\alpha - 1)(tg\alpha + 1) = 0;$

$tg\alpha = \frac{1}{3}$

$tg\alpha = -1$

1$2$) $2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \quad /:\cos^2\alpha$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$(tg\alpha - 3)(tg\alpha + 1) = 0.$

$tg\alpha = 3.$

№3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 > 0; \quad 10x - x^2 \neq 1$

$x(x - 10) < 0;$

$x^2 - 10x + 1 \neq 0$

$4 \cdot 24 = 4$

0 10

$D = 100 - 4 = 96;$

$x \in (0; 10)$

$x \neq \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6};$

$x \in (0; 5-2\sqrt{6}) \cup (5-2\sqrt{6}; 5+2\sqrt{6}) \cup (5+2\sqrt{6}; 10) \Rightarrow$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

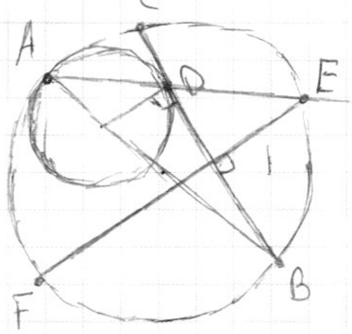
$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

☑ черновик ☐ чистовик

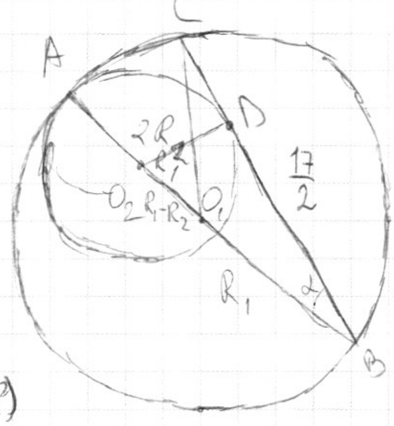
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$CD=\frac{15}{2};\ BD=\frac{17}{2}$



$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$(10x-x^2)\left(1+(10x-x^2)^{\log_3 4-1}\right)\geq(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$\ln(10x-x^2)+\ln\left(1+(10x-x^2)^{\log_3 4-1}\right)\geq\ln(10x-x^2)\cdot\log_3 5$

$\ln(10x-x^2)\cdot(\log_3 5-1)\leq(\log_3 4-1)\cdot\ln(1+10x-x^2)$

$\frac{\ln(10x-x^2)}{\ln(1+10x-x^2)}\leq\frac{\log_3 4-1}{\log_3 5-1}$

$\log_{1+10x-x^2}10x-x^2\leq\frac{\log_3 4-1}{\log_3 5-1}$

$\cancel{R_1=2R_2}$

$(2R_1-2R_2)\cdot\cancel{2R_1}\,2R_2=\frac{289}{4}$

$\cancel{4R_1^2}-4R_2^2=\frac{289}{4}$

$4R_1R_2-4R_2^2=\frac{289}{4}$

$4R_2^2+\frac{289}{4}=$

$(2R_1-R_2)^2=4R_2^2+\frac{289}{4}$

$4R_1^2-4R_1R_2-3R_2^2=\frac{289}{4}$

$4R_1^2-4R_1R_2-3R_2^2=4R_1R_2-4R_2^2$

$4R_1-8R_1R_2+R_2=0;$

$x-12y=\sqrt{12xy-12y-x+6}$

$x^2+36y^2-12x-36y=45=$

$(2y-1)(x-6)$

$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$\times\frac{16}{9}$ 144

$(x-6)^2\cancel{...}+36y^2-36y-81=0$

$(x-6)^2+9(4y^2-4y-9)=0$

$D=16+144=0$

$(2y-1)(18y-9)=9(2y-1)^2$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$\cancel{x^2-...24xy}$ $\sqrt{x-6}=a$ $x=a^2+6$

$\sqrt{2y-1}=b$ $2y-1=b^2$

$12y=6b^2+6$

$a^4+b^4=90$

$a^2-6b^2=ab;$

$a^2-ab-6b^2=0$

$(a-3b)(a+2b)=0$

$\left[\begin{array}{l}a=3b\\a=-2b\end{array}\right.$

$\cancel{a^4}$ $82b^4=90$

$t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}-t^{\log_3 3}<0$

$t^{\log_3 4}(t^{\log_3 1{,}25}-1-t^{\log_3 0{,}75}$

$\frac{16x-16}{4x-5}\le ax+6\le -32x^2+36x-3$

$\frac{16x-20+4}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}=4+\frac{1}{x-1{,}25}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\left[\begin{array}{l}\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5} \\ \cos 2\alpha+2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}\end{array}\right.$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)(\cos 2\beta) + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\beta) = -\frac{2}{5}$;

$-\frac{1}{\sqrt5} - \frac{\cos 2\beta}{\sqrt5} - \frac{2\sin 2\beta}{\sqrt5} = -\frac{2}{5}$

$\frac{\cos 2\beta}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5\sqrt5}$;

$\frac{\sqrt5}{2}\cos 2\beta + \frac{\sqrt5}{2}\cdot\sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$;

$2\cdot + \frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos(2\beta) = +\frac{2}{5}$

$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5}$; $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \\ \sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}\end{array}\right. \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$;

1) $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} + \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

2) $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} - \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

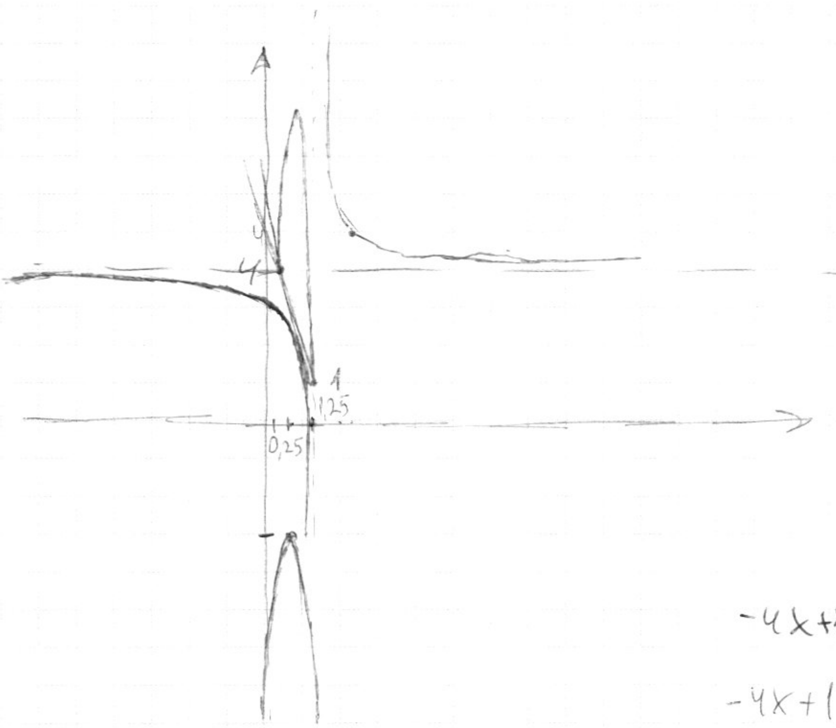
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$y=$

$a+b=$

$16x^2-16x-5=-4$

$16x^2-16x-1=0$

$D=16^2+16\cdot 4=16\cdot 20$

$x=\frac{16\pm 4\sqrt{20}}{32}$

$-4x+5=4+\frac{4}{4x-5}$

$-4x+1=\frac{4}{4x-5}$ 162

$-32x^2+36x-3$ $\quad -(4x-1)(4x-5)=4$

$16x^2-24x+5=-4$

$16x^2-24x+9=0$

$(4x-3)^2=0$

$-32\cdot\frac{1}{16}+9-3=$

$=4$

$x_6=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$ 18

$y_6=-\frac{32\cdot 81}{16\cdot 16}+\frac{36\cdot 9}{16}-3=$

$-2+9-3=$

$=\frac{-162}{8\cdot 16}+\frac{162}{8}-3=\ldots-3.$

$\left(\frac{1}{x-1{,}25}\right)'=-\frac{1}{(x-1{,}25)^2}$

$\frac{15\cdot 8\cdot 162}{8\cdot 16}-3$ 270 324

$\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1'\cdot x-(x-1{,}25)'\,1}{k}$

$\frac{9}{16}$ $\quad \frac{-32\cdot 9\cdot 9}{16\cdot 16}+\frac{36\cdot 9}{8}-3=$

$\frac{1}{x-1{,}25}=ax$ $\quad -\frac{1}{(x-1{,}25)^2}=-4$

$=\frac{-81}{8}+\frac{81\cdot 4}{8}-3$

$\frac{1}{x-1{,}25}=2$

$\frac{-81+324}{8}-3=\frac{243}{8}-3=$

$=\frac{219}{8}$

$2x-2{,}5=1$

$x=1{,}75$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t} - 3^{\log_3 t} \le 0$

$5^{\log_3 t} \le 4^{\log_3 t} + 3^{\log_3 t};$

$\log_3 t = 2;$

$\log_3 t = a;$

$f(a) = 5^a \qquad F'(a) = 5^a \cdot \ln a$

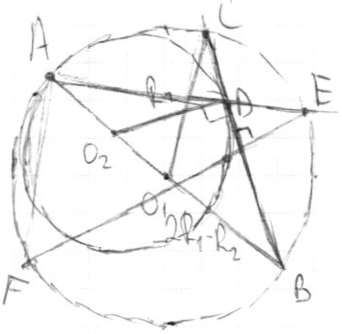
$g(a) = 4^a + 3^a \qquad g'(a) = 4^a \cdot \ln a +$

$F\left(\frac{x}{y}\right) = F(x) + F\left(\frac{1}{y}\right)$

$F(17 \cdot 1) = F(17) + F(1)$

$F(1) = 0;$

$R_1 + R_1 - R_2$



$4R_1^2 - 4R_1R_2 + \cancel{R_2^2} = \cancel{R_2^2} + \frac{289}{4}$

$4R_1^2 - 4R_1R_2 = \frac{289}{4}$

$\frac{289}{4} = (2R_1 - 2R_2) \cdot 2R_1$

$F\left(\frac{1}{y}\right) = F(y) + F\left(\frac{1}{y^2}\right) =$

$= 2F(y) + 2F\left(\frac{1}{y}\right)$

$F\left(\frac{1}{y}\right) = -F(y).$

$F(ab) = F(a) + F(1) \Rightarrow F(1) = 0; \Rightarrow x \Rightarrow y;$

$F(a) + F\left(\frac{1}{a}\right) = 1;$

$F(a^2) = 2F(a)$

$F\left(\frac{1}{a^2}\right) = 2F\left(\frac{1}{a}\right)$

$F(2) = 0;$ $\qquad F(17) = 4$ $\qquad F(9) = 0$

$F(3) = 0;$ $\qquad F(19) = 4$ $\qquad F(4) = 0$

$F(5) = 1$ $\qquad F(23) = 5;$ $\qquad F(25) = 2$

$F(7) = 1$ $\qquad F(0) = 0;$

$F(11) = 2$ $\qquad F(1) = 0$

$F(abc) = F(a) + F(b) + F(c)$

$F(13) = 3$

$F\left(\frac{x}{y}\right) = F(x) + F\left(\frac{1}{y}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)