

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = 8$ ,  $BD = 17$ .

5. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $1 \leq x \leq 24$ ,  $1 \leq y \leq 24$  и  $f(x/y) < 0$ .

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$ .

7. [6 баллов] Дана пирамида  $ABCD$ , вершина  $A$  которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра  $AD$ . Известно, что  $AB = 1$ ,  $BD = 2$ ,  $CD = 3$ . Найдите длину ребра  $BC$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№5

$$f(1 \cdot 1) = f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \neq f(x) = -f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) \quad ; x, y \in \mathbb{Q}$$

$$f(p) = [p/4] \quad - p - \text{натуральное (н)} \quad f(ab) = f(a) + f(b) \quad (2)$$

$f(1) = 0$	$f(7) = 1$	$f(13) = 3$	$f(19) = 4$
$f(2) = 0$	$f(8) = 0$	$f(14) = 1$	$f(20) = 1$
$f(3) = 0$	$f(9) = 0$	$f(15) = 1$	$f(21) = 1$
$f(4) = 0$	$f(10) = 1$	$f(16) = 0$	$f(22) = 2$
$f(5) = 1$	$f(11) = 2$	$f(17) = 4$	$f(23) = 5$
$f(6) = 0$	$f(12) = 0$	$f(18) = 0$	$f(24) = 0$

разные натуральные при помощи (1) и (2)

$$f(\frac{x}{y}) < 0$$

$$f(x) < f(y)$$

$f(x) = 0$  для чисел (или 11).

сумма 11, 13 пар

для  $f(x) = 3$  (или 1)

$f(y) > 1$  сумма 3

пар 3

для  $f(x) = 4$  (орна)

$f(y) > 4$  орна

орна пара

для  $f(x) = 6$

$f(y) > 1$  сумма 6

сумма 36 пар

для  $f(x) = 2$  (или 2)

$f(y) > 2$  сумма 4

пар 8

Прогнозируя количество

пар получим 191

Ответ: 191 пара.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\text{ОДЗ } x^2 + 18x > 0$$

$$x^2 + 18x = a$$

исходное уравнение примет вид

$$a^{\log_{12} 5} + a \geq a^{\log_{12} 13} \quad \text{разделим на } a$$

$$\text{получим } a^{\log_{12} 5 - 1} + 1 \geq a^{\log_{12} 13 - 1}$$

левая часть убывает на области определения

правая наоборот, график если есть тогда

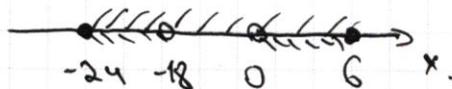
пересечений, то она единственна и это  $a = 144$

$$\text{т.к. } \frac{25}{144} + 1 = \frac{169}{144}$$

из всего выше сказанного можно сделать вывод

что  $a \leq 144$ , учитывая ОДЗ решим систему  
неравенств уже обратив внимание

$$\begin{cases} x^2 + 18x \leq 144 \\ x^2 + 18x > 0 \end{cases}$$



Ответ:  $[-24; -18) \cup (0; 6]$ .

№2

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2 & (1) \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 \geq 0 & (2) \\ x - 2y > 0 \end{cases}$$

система неравенств  
решить в целых

Отсюда от (2) (3) получим

$$5y^2 - 5x + 5xy + 20y + 10 = 0$$

$$y^2 - x + xy - 4y - 2 = 0$$

$$\frac{y^2 - 4y + 2}{1 - y} = x$$

подставив (2) получим

$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \quad (4)$$

$$x-2 = \frac{y^2 - 4y - 2}{1-y} - 2 = -\frac{(y-1)^2 - 5}{y-1} \quad (3)$$

$$x = 2 - \frac{c^2 - 5}{c}$$

$$y-1 = c \quad (5)$$

подставив (3) и (5) в (4) получим

$$\left(\frac{c^2 - 5}{c}\right)^2 + 9c^2 = 25$$

~~$$c^4 - 6c^2 + 9 + 9c^4 - 25c^2 =$$~~

~~$$10c^4 - 34c^2 + 9 = 0$$~~

$$c^4 - 10c^2 + 25 + 9c^4 - 25c^2$$

$$10c^4 - 35c^2 + 25 = 0$$

$$\begin{cases} c^2 = 2,5 \\ c^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 2 \pm \sqrt{2,5} \\ 2 \pm 4 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1 \pm 1 \\ 1 \pm \sqrt{2,5} \end{cases}$$

далее упрощаем

№2

$$x - 2y > 0$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{- не подходит}$$

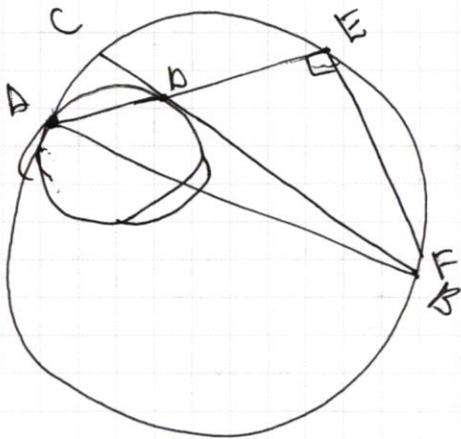
$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2,5} \\ y = 1 + \sqrt{2,5} \end{cases} \quad \text{- не подходит}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{- подходит}$$

$$\begin{cases} x = 2 - \sqrt{2,5} \\ y = 1 - \sqrt{2,5} \end{cases} \quad \text{- подходит}$$

Ответ:  $(6; 2); (2 - \sqrt{2,5}; 1 - \sqrt{2,5})$ .

№4



$F \equiv B$  т.к.  $\angle E = 90^\circ$  и  $AB$  - диаметр

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 + \frac{3}{4x+3}$$

$$-\frac{3}{8}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

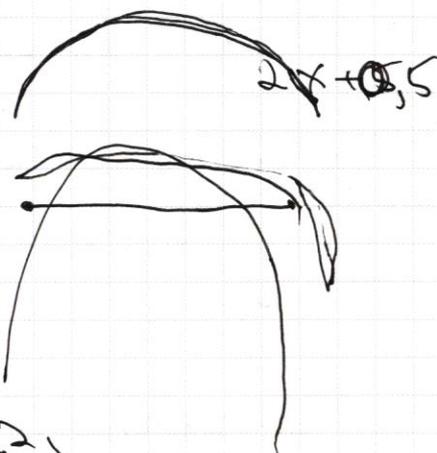
$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$$

$$\frac{123}{2} - \frac{165}{2} - 17 =$$

$$e^{i2\alpha} \cdot e^{i4\beta} - e^{-i2\alpha} - \frac{15}{e^{-i4\beta/8}}$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq -8x^2 - 30x - 17 \quad -\frac{7,5}{4}$$

$$12x+11 \leq (4x+3)(8x^2+30x+17)$$



$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$$

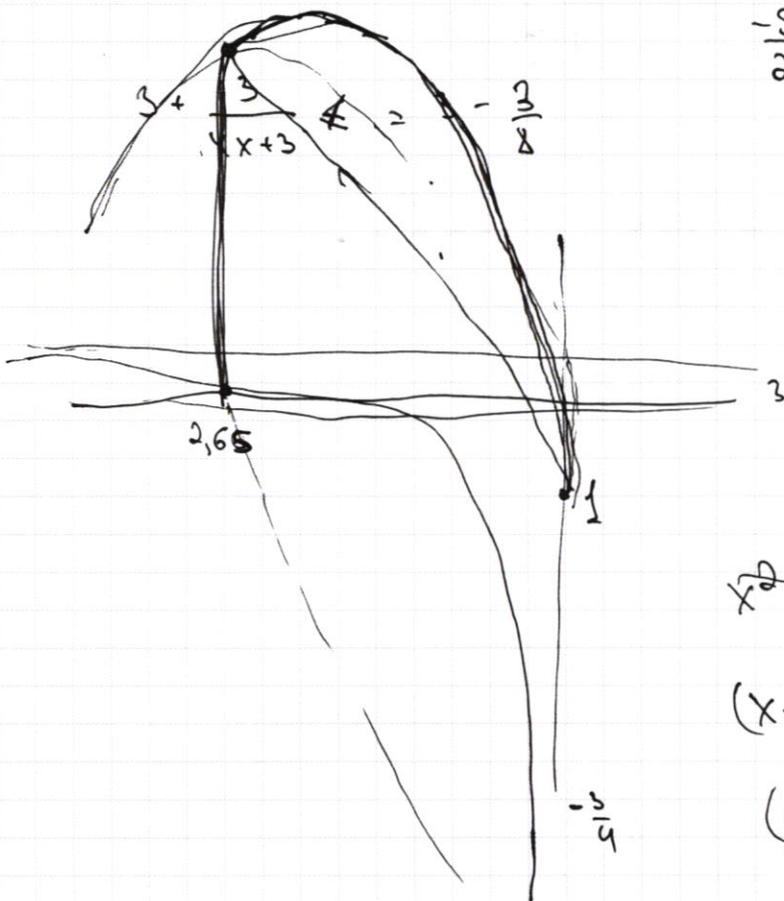
$$\frac{2}{\operatorname{tg} 2\alpha} \operatorname{tg} \alpha = 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2 \cos 2\alpha}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{12x+11}{4x+3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{11}{12}$$



$$-\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17$$

$$-\frac{129}{2} + \frac{165}{2} - 17$$

$$y - 2 = c$$

$$x = \frac{c^2 - 2}{1 - c}$$

~~$$x^2 - 4x + 4 + 9(y^2 + 2y + 1)$$~~

$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

~~$$(y(y-2))^2 + (y-1)^4 = 25(y-1)^2$$~~

$$y-2 = c$$

~~$$x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 - x - 2y + 2$$~~

$$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 = 0$$

~~$$(c^2 - 1)^2 + (c-1)^4 = 25c$$~~

$$5y^2 - 5x + 5xy - 20y + 10 = 0$$

$$y^2 - 5x + 5xy - 4y + 2 = 0$$

$$y^2 - 4y + 4 = x - xy + 2$$

$$y(y+x) - (y+4x) + 2 = 0$$

$$\frac{(y-2)^2 + 2}{1-y} = x$$

$$y(y+x-4) = 4x-2$$

$$x-2 = \frac{y(y-2)}{1-y}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x - 2y = \sqrt{x(y-1) - 2(y-1)}$$

$$x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$$

$$x^2 + 6xy + 9y^2 = 4x + 18y + 12 + 6xy$$

$$(x + 3y)^2 = 4(x+3) + 6y(x+3)$$

$$(x + 3y)^2 = (4 + 6y)(x+3)$$

$$(x - 2y)^2 = (x-2)(y-1)$$

$$x^2 + 18x > 0$$

$$x^2 + 18x = a$$

$$a^{\log_{12} 5} + a \geq a^{\log_{12} 13}$$

$$a^{\log_{12} 5 - 1} + 1 \geq a^{\log_{12} 13 - 1}$$

$$x^2 + 18x > 144$$

$$x^2 + 18x - 144 > 0$$

$$(x+24)(x-6) > 0$$

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 0$$

$f(1)$

10

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f(24) = 0$$

$$f(19) = 4$$

$$f(3) = 0$$

$$f(5) = 1$$

$$f(20) = 1$$

$$f(4) = 0$$

$$f(7) = 1$$

$$f(14) = 1$$

$$f(8) = 0$$

$$f(9) = 0$$

$$f(10) = 1$$

$$f(6) = 0$$

$$f(11) = 2$$

$$f(15) = 1$$

$$f(12) = 0$$

$$f(13) = 3$$

$$f(16) = 0$$

$$f(18) = 0$$

$$f(17) = 4$$

$$f(21) = 1$$

$$f(22) = 2$$

$$f(23) = 5$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)