

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 24$, $1 \leq y \leq 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD . Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№5

$$f(1 \cdot 1) = f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \neq f(x) = -f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) \quad ; x, y \in \mathbb{Q}$$

$$f(p) = [p/4] \quad - p - \text{нечетное (1)} \quad f(ab) = f(a) + f(b) \quad (2)$$

$f(1) = 0$	$f(7) = 1$	$f(13) = 3$	$f(19) = 4$
$f(2) = 0$	$f(8) = 0$	$f(14) = 1$	$f(20) = 1$
$f(3) = 0$	$f(9) = 0$	$f(15) = 1$	$f(21) = 1$
$f(4) = 0$	$f(10) = 1$	$f(16) = 0$	$f(22) = 2$
$f(5) = 1$	$f(11) = 2$	$f(17) = 4$	$f(23) = 5$
$f(6) = 0$	$f(12) = 0$	$f(18) = 0$	$f(24) = 0$

разные значения при подстановке (1) и (2)

$$f(\frac{x}{y}) < 0$$

$$f(x) < f(y)$$

$f(x) = 0$ для чисел (или 11).

Сумма 11, 13 пар

для $f(x) = 3$ (или 1)

$f(y) > 1$ сумма 3

пар 3

для $f(x) = 4$ (орна)

$f(y) > 4$ орна

орна пара

для $f(x) = 6$

$f(y) > 1$ сумма 6

Сумма 36 пар

для $f(x) = 2$ (или 2)

$f(y) > 2$ сумма 4

пар 8

Прогнозируя количество

пар получим 191

Ответ: 191 пара.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\text{ОДЗ } x^2 + 18x > 0$$

$$x^2 + 18x = a$$

исходное уравнение примет вид

$$a^{\log_{12} 5} + a \geq a^{\log_{12} 13} \quad \text{разделим на } a$$

$$\text{получим } a^{\log_{12} 5 - 1} + 1 \geq a^{\log_{12} 13 - 1}$$

левая часть убывает на области определения

правая наоборот, график если есть тогда

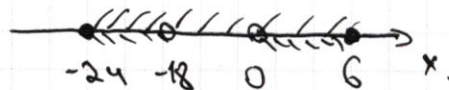
пересечений, то она единственна и это $a = 144$

$$\text{т.к. } \frac{25}{144} + 1 = \frac{169}{144}$$

из всего выше сказанного можно сделать вывод

что $a \leq 144$, учитывая ОДЗ решим систему
неравенств уже обратив внимание

$$\begin{cases} x^2 + 18x \leq 144 \\ x^2 + 18x > 0 \end{cases}$$



Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$.

№ 2

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2 & (1) \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 \geq 0 & (2) \\ x - 2y > 0 \end{cases}$$

система неравенств
решить в целых

Отсюда от (2) (3) получим

$$5y^2 - 5x + 5xy + 20y + 10 = 0$$

$$y^2 - x + xy - 4y - 2 = 0$$

$$\frac{y^2 - 4y + 2}{1 - y} = x$$

подставив (2) получим

$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \quad (4)$$

$$x-2 = \frac{y^2 - 4y - 2}{1-y} - 2 = -\frac{(y-1)^2 - 5}{y-1} \quad (3)$$

$$x = 2 - \frac{c^2 - 5}{c}$$

$$y-1 = c \quad (5)$$

подставив (3) и (5) в (4) получим

$$\left(\frac{c^2 - 5}{c}\right)^2 + 9c^2 = 25$$

~~$$c^4 - 6c^2 + 9 + 9c^4 - 25c^2 =$$~~

~~$$10c^4 - 34c^2 + 9 = 0$$~~

$$c^4 - 10c^2 + 25 + 9c^4 - 25c^2$$

$$10c^4 - 35c^2 + 25 = 0$$

$$\begin{cases} c^2 = 2,5 \\ c^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} 2 \pm \sqrt{2,5} \\ 2 \pm 1 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} 1 \pm 1 \\ 1 \pm \sqrt{2,5} \end{cases}$$

далее упрощаем

№2

$$x - 2y > 0$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{- не подходит}$$

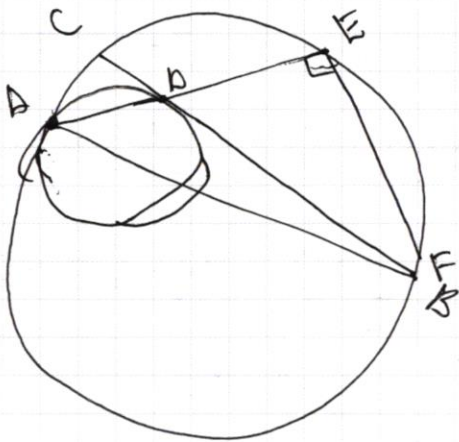
$$\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2,5} \\ y = 1 + \sqrt{2,5} \end{cases} \quad \text{- не подходит}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{- подходит}$$

$$\begin{cases} x = 2 - \sqrt{2,5} \\ y = 1 - \sqrt{2,5} \end{cases} \quad \text{- подходит}$$

Ответ: $(6; 2); (2 - \sqrt{2,5}; 1 - \sqrt{2,5})$.

№4



$F \equiv B$ т.к. $\angle E = 90^\circ$ и AB - диаметр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 + \frac{3}{4x+3}$$

$$-\frac{3}{8}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$$

$$\frac{123}{2} - \frac{165}{2} - 17 =$$

$$e^{i2\alpha} \cdot e^{i4\beta} - e^{-i2\alpha - 15} = \frac{15}{e^{i4\beta 8}}$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq -8x^2 - 30x - 17 \quad -\frac{7,5}{4}$$

$$12x+11 \leq (4x+3)(8x^2 + 30x + 17)$$



$$\sin 2\alpha \cos 2\beta +$$

$$+ \sin 2\beta \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 2\alpha \cos 4\beta$$

$$\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$$

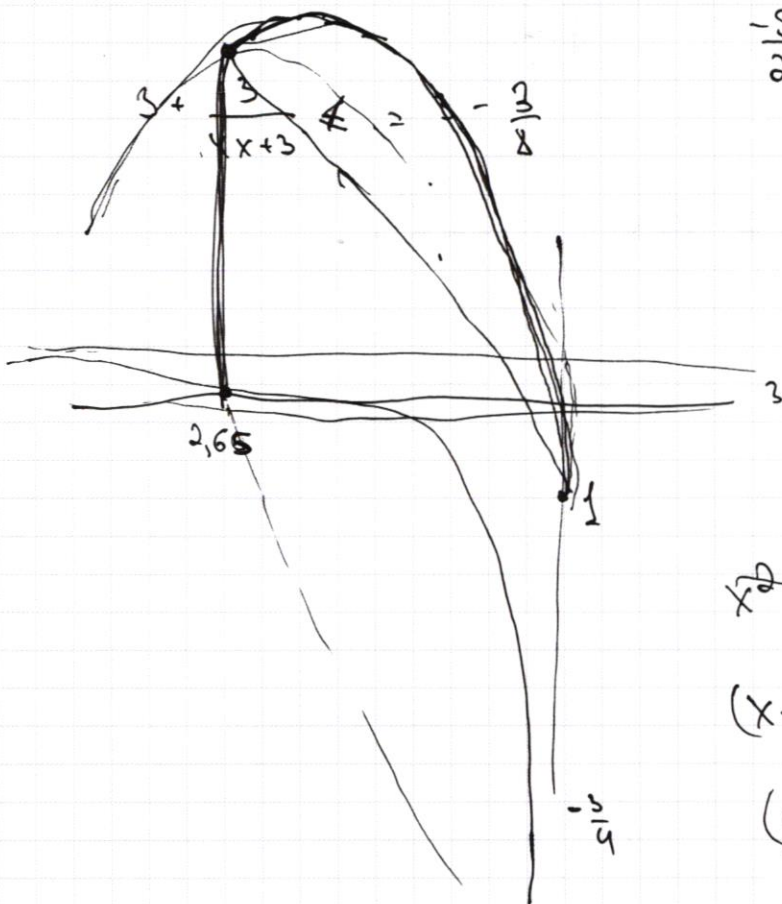
$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha$$

$$1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2 \cos 2\alpha}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{12x+11}{4x+3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{11}{12}$$



$$-\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17$$

$$-\frac{129}{2} + \frac{165}{2} - 17$$

$$27$$

$$y - 2 = c$$

$$x = \frac{c^2 - 2}{1 - c}$$

~~$$x^2 - 4x + 4 + 9(y^2 + 2y + 1)$$~~

$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

~~$$(y(y-2))^2 + (y-1)^4 = 25(y-1)^2$$~~

$$y-2 = c$$

~~$$x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 - x - 2y + 2$$~~

$$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 = 0$$

~~$$(c^2 - 1)^2 + (c-1)^4 = 25c$$~~

$$5y^2 - 5x + 5xy - 20y + 10 = 0$$

$$y^2 - 5x + 5xy - 4y + 2 = 0$$

$$y^2 - 4y + 4 = x - xy + 2$$

$$y(y+x) - (y+4x) + 2 = 0$$

$$\frac{(y-2)^2 + 2}{1-y} = x$$

$$y(y+x-4) = 4x-2$$

$$x-2 = \frac{y(y-2)}{1-y}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta) \sin 2\beta + \sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta =$$

$$= 2 \sin 2\alpha - \frac{4}{5}$$

$$-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\beta = \sin 2\alpha - \frac{4}{5}$$

$$y^2 - 2y - 4$$

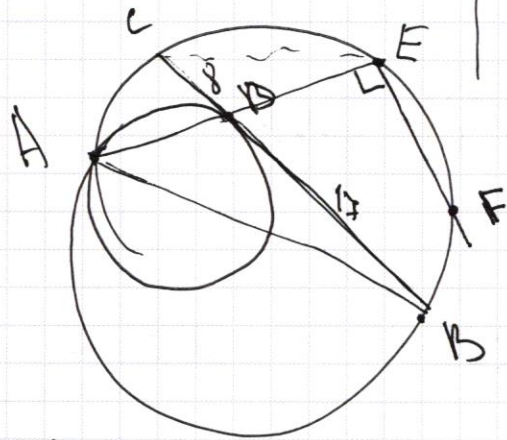
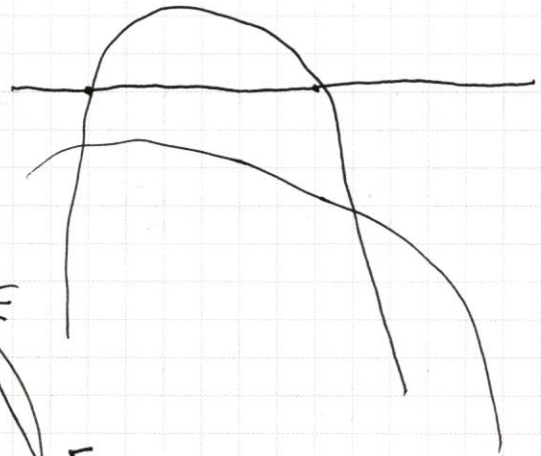
b

$$2x + 0,5 + \frac{17x + 17}{4x + 3} \leq (2 + a)x + b + 0,5 \leq -8\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x + \frac{11}{4}\right)$$

4

$$\frac{(y-1)^2 - 3}{1-y} = x-2$$

$$-(8x^2 + 30x + 17)$$



$$\frac{2}{50 - 17 \cdot 8 \cdot 4}$$

$$-16x^2$$

$$30^2 - 32 \cdot 17$$

$$\frac{AB}{CE} = \frac{AD}{8} = \frac{17}{BE}$$

$$900 - 544 + 96$$

$$260 +$$

$$\frac{-b}{2a}$$

$$\frac{22}{3-19}$$

$$\frac{-225}{8}$$

$$\frac{-15}{8}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x - 2y = \sqrt{x(y-1) - 2(y-1)}$$

$$x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$$

$$x^2 + 6xy + 9y^2 = 4x + 18y + 12 + 6xy$$

$$(x + 3y)^2 = 4(x+3) + 6y(x+3)$$

$$(x + 3y)^2 = (4 + 6y)(x+3)$$

$$(x - 2y)^2 = (x-2)(y-1)$$

$$x^2 + 18x > 0$$

$$x^2 + 18x = a$$

$$a^{\log_{12} 5} + a \geq a^{\log_{12} 13}$$

$$a^{\log_{12} 5 - 1} + 1 \geq a^{\log_{12} 13 - 1}$$

$$x^2 + 18x > 144$$

$$x^2 + 18x - 144 > 0$$

$$(x+24)(x-6) > 0$$

$$f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 0$$

$f(1)$

10

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

$$f(1) = 0$$

$$f(2) = 0$$

$$f(24) = 0$$

$$f(19) = 4$$

$$f(3) = 0$$

$$f(5) = 1$$

$$f(20) = 1$$

$$f(4) = 0$$

$$f(7) = 1$$

$$f(14) = 1$$

$$f(8) = 0$$

$$f(9) = 0$$

$$f(10) = 1$$

$$f(6) = 0$$

$$f(11) = 2$$

$$f(15) = 1$$

$$f(12) = 0$$

$$f(13) = 3$$

$$f(16) = 0$$

$$f(18) = 0$$

$$f(17) = 4$$

$$f(21) = 1$$

$$f(22) = 2$$

$$f(23) = 5$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)