МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР 20002523

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 2 5 2 3

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} & (2) \end{cases}$$

(2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$$

Поставим (1)

$$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$$

$$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$\cancel{2\beta = \pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

Пусть $a = y-6$
$b = x-1$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} & (1) \\ 9b^2+a^2=90 & (2) \end{cases}$$

(1) $a-6b=\sqrt{ab}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a-6b\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-4b)(a-9b)=0 \\ a-6b\geq 0 \end{cases}$$

• $a=4b$

(2) $25b^2=90$

$b^2=\frac{18}{5}$ $\Rightarrow a^2=\frac{288}{5}$

$|b|=3\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$ $\quad |a|=12\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}$

т.к. $a=4b$, то

1) $\begin{cases} a=12\cdot\sqrt{\frac{2}{5}} \\ b=3\cdot\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \Rightarrow a-6b=-6\sqrt{\frac{2}{5}} \ngeq 0$ ↯

2) $\begin{cases} a=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ b=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$ $\quad a-6b=6\sqrt{\frac{2}{5}}\geq 0$

$\Updownarrow$

$y=6-12\sqrt{\frac{2}{5}}$
$x=1-3\sqrt{\frac{2}{5}}$

4

• $a=9b$

$90b^2=90$

$b^2=1 \quad a^2=81 \Rightarrow$

1) $\begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases}$ $\quad a-6b\geq 0$ и

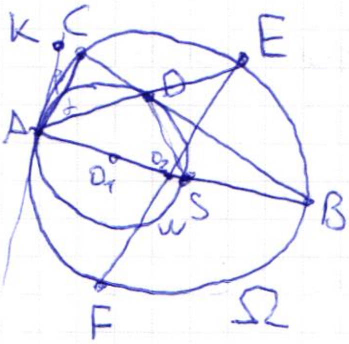
$y=15 \quad x=2$

2) $\begin{cases} a=-9 \\ b=-1 \end{cases}$ $\quad a-6b\geq 0$ ↯

Ответ: $(2;15)$; $\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}}; 6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано: $CD=12$ $BD=13$

Найти R, r, где R - радиус Ω

r - радиус w

$\angle AFE$ - ? S_{AEF} - ?

Решение

1) Покажем, что EF проходит через O_2, где O_2 - центр Ω, а O_1 - центр w. Тогда по св касающ. окружностей: $A-O_1-O_2$

Проведем общую касательную к 2 окружностям через A, K - точка на касательной, ~~такая~~ с той же стороны от AB, что и C (смотри рисунок)

Пусть $\angle CAK=\beta$; $\angle CAD=\alpha$ AB вторично пересекает w в S

Тогда $\angle ASD=\angle KAD=\alpha+\beta$ по св касательной AK в w

$\angle SDB=\angle DAS$ по св касательной BD к w

$\angle DBS=\angle KAC=\beta$ по св касательной AK к Ω

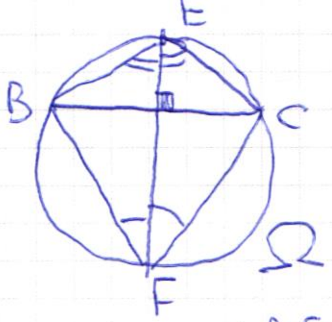
По св касательной к Ω: $AB\perp AK \Rightarrow \angle DAS=90-\alpha-\beta$

$\angle ASD=\angle SDB+\angle SBD$ как внешний

$\alpha+\beta=90-\alpha-\beta+\beta \Rightarrow 90-\alpha-\beta=\alpha \Rightarrow \underset{\alpha}{\angle CAD}=\underset{90-\alpha-\beta}{\angle DAS}$

Значит AD - биссектриса угла $CAB \Rightarrow E$ - середина дуги CB

по св вписанного угла



$\angle BFE = \angle EFC$ по св впис. угла (опираются на равные дуги)

$\triangle BEC$ - равнобедренный по опр. (~~равные~~ хорды стягивают равные дуги)

⇓

по св равноб $\triangle$: $\angle BEF = \angle FEC$

по св впис. четырехугольника: $\angle BEC + \angle BFC = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BEF + \angle BFE = \frac{1}{2}(\angle BEC + \angle BFE) = 90^\circ \Rightarrow$ по Т о Σ углов $\triangle$: $EBF = 90^\circ \Rightarrow$ по св впис. угла: EF - диаметр.

2) По Т о касат. и секущей (степень точки относительно ω)

$BD^2 = BS \cdot BA$

$BD^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$. $\angle ACB = 90^\circ$ (опирается на диаметр

$O_1D \perp BC$ по св касательной к ω $\Rightarrow AC \parallel O_1D$ по Т о 2 прямых $\perp$ третьей

⇓

По Т Фалеса: $\frac{CD}{BD} = \frac{AO_1}{BO_1} = \frac{r}{2R - r}$

$\frac{12}{13} = \frac{r}{2R - r}$ $24R - 12r = 13r$

$24R = 25r$ $2R = \frac{25}{12} r$

$13^2 = \frac{r}{12} \cdot \frac{25}{12} r$ $r^2 = \frac{13^2 \cdot 12^2}{25^2}$ $r = \frac{13 \cdot 12}{5} = 31,2$

$2R = \frac{25}{12} \cdot \frac{13 \cdot 12}{5}$ $R = \frac{5 \cdot 13}{2} = 32,5$

3) По ~~Т~~ Т о хордах (степень точки D относительно Ω)

$AD \cdot DE = CD \cdot DB$ Пусть $AD = x$; $DE = y$

$xy = 12 \cdot 13$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5

$f(a\cdot\frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a})$

$f(a\cdot 1)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0 \quad \Rightarrow f(\frac{1}{a})=-f(a)$

$f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

тогда $f(x/y)<0$: $f(x)<f(y)$

Рассмотрим значения f в целых точках в промежутке $[4; 28]$

$f(2)=0 \quad f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

а дальше?

~~Число вида (p·k)~~

Заполняем таблицу так:

Если простое, то $f(p)=[\frac{p}{4}]$

Если составное, то $f(p\cdot k)=f(p)+f(k)$ используя предыдущие

p — пр., т.к.

$p<p\cdot k$

$k<p\cdot k$

2 —

Найдём кол-во способов выбрать $f(x)<f(y)$

1) $f(y)=0$ тогда такое невозможно т.к. $f(x)\geq 0$

2) $f(y)=1$ способов выбрать y: 7

$f(x)<1$

$f(x)=0$

выбрать x: 8

24 — 380 верно

другой

56 способов

3) $f(y)=2$ выбрать y: 2

$f(x)<2$ выбрать x: 15

30 способов

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$O_1D \perp BC$; $EF \perp BC \Rightarrow O_1D \parallel FE$ по Т о 2 прямых $\perp$ третьей

$\Downarrow$

По Т Фалеса в $\triangle AEO_2$ $\quad \frac{x}{y} = \frac{AO_1}{O_1O_2} = \frac{r}{R-r}$

$$\frac{y}{x} = \frac{R-r}{r} = \frac{R}{r} - 1 = \frac{25}{24} - 1 = \frac{1}{24}$$

$24y = x$

$xy = 12 \cdot 13 \qquad 24y^2 = 12 \cdot 13 \qquad y^2 = \frac{13}{2}$

$y = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} \qquad x = 12\sqrt{26}$

~~$AE = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$~~ $\quad AE = x + y = 25y = \frac{25\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$

$\angle FAE = 90^\circ$ (опирается на диаметр) по св впис. угла $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin(\angle AFE) = \frac{AE}{EF} = \frac{\frac{25\sqrt{13}}{\sqrt{2}}}{5 \cdot 13} = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \cos(\angle AFE) = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$

4) ~~$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot EF \cdot \sin(AEF)$~~

$S_{AFE} = \frac{AF \cdot AE}{2}$ $\qquad$ ~~По Т Пифагора: AF~~

$\frac{AF}{EF} = \cos(\angle AFE) = \frac{1}{\sqrt{26}}$

$AF = \frac{5 \cdot 13}{\sqrt{26}} = \frac{5 \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{2}}$

$\Downarrow$

$$S = \frac{5 \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{25 \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{125 \cdot 13}{4} = \frac{1625}{4}$$

Ответ: $r = 31,2$; $R = 32,5$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$; $S = \frac{1625}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $f(y)=3$ $\quad$ выбрать y : 1

$f(x)<3$ $\quad$ выбрать x : 17

17 способов

5) $f(y)=4$ $\quad$ выб. y : 1

$f(x)<3$ $\quad$ выб. x : 18

36 способов

6) $f(y)=5$ $\quad$ y : 1

$f(x)<3$ $\quad$ x : 20

20 способов

Суммируем: $56+30+17+36+20=159$

$\quad 86 \quad 103 \quad 139$

Ответ: 159 способов

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17} & (2) \end{cases}$$

(2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{2}{17}$

подставим (1)

$\cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow |\sin(2\beta)|=\frac{4}{\sqrt{17}}$

(1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta \geq 0 \Rightarrow \sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \quad \uparrow^2$

$1 + 15\cos^2 2\alpha + 8 \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin 2\alpha = 1$

$\cos 2\alpha (15 \cdot \cos 2\alpha + 8\sin 2\alpha) = 0$

• $\cos 2\alpha = 0$

$\Downarrow$

$\sin 2\alpha = -1$

$2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi n$

$\operatorname{tg} \alpha = -1$

или $\begin{cases} 15 \cdot \cos 2\alpha + 8 \cdot \sin 2\alpha = 0 & (3) \\ 4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -1 & (4) \end{cases}$

$(3) - 8 \cdot (4)$:

$-17\cos 2\alpha = 8$

$\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$ $\Rightarrow$ ~~$2\alpha \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$~~ ~~$\alpha \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$~~

$\Downarrow$

$\operatorname{tg} \alpha > 0$

$2\alpha \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$

$\alpha \in [\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n]$

$\operatorname{tg} \alpha \geq 0$

$\operatorname{tg}(2\alpha) = -\frac{15}{8}$

$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ $\quad -\frac{15}{8} = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

$15\operatorname{tg}^2 \alpha - 15 - 16\operatorname{tg} \alpha = 0$

$(3\operatorname{tg} \alpha - 5)(5\operatorname{tg} \alpha + 3) = 0$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3}$ $\quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{5}$

н.к.

2) $\sin 2\beta \leq 0$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \quad \uparrow^2$

$1 - 8 \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + 15\cos^2 2\alpha = 1$

$\cos 2\alpha (15\cos 2\alpha - 8\sin 2\alpha) = 0$

• $\cos 2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha = -1$ $\quad \operatorname{tg} \alpha = -1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 15\cos 2\alpha - 8\sin 2\alpha = 0 & (5) \\ -4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -1 & (6) \end{cases}$$

$(5) + 8(6)$;

$-17\cos 2\alpha = -8$

$\cos 2\alpha = \frac{8}{17} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow$ ~~$2\alpha \in [0; \pi$~~

$2\alpha \in [2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$

$\alpha \in (\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n)$

$tg\,\alpha > 0$

$tg\,2\alpha = \frac{15}{8}$ $\quad tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$\frac{15}{8} = \frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$15 - 15tg^2\alpha = 16tg\,\alpha$ $\quad 15tg^2\alpha + 16tg\,\alpha - 15 = 0$

$(5tg\,\alpha - 3)(3tg\,\alpha + 5) = 0$

$tg\,\alpha = \frac{3}{5}$ $\quad tg\,\alpha = -\frac{5}{3}$

н.к.

Ответ: $tg\,\alpha$ может принимать значения: $\{-1; \frac{5}{3}; \frac{3}{5}\}$

3

№3

~~Ко~~

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

~~Ко~~ Видим, что $26x-x^2>0$

$\Downarrow$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$12^{\log_5(26x-x^2)}+5^{\log_5(26x-x^2)} \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$t=\log_5(26x-x^2)$

$$12^t+5^t \geq 13^t \quad : 13^t>0$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^t+\left(\frac{5}{13}\right)^t \geq 1$$

- при $t=2$ $\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2=1$

при $t>2$ $\left(\frac{12}{13}\right)^t+\left(\frac{5}{13}\right)^t<\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2=1$

$y=\left(\frac{12}{13}\right)^x$ – убыв $\left(\frac{12}{13}<1\right)$

$y=\left(\frac{5}{13}\right)^x$ – убыв. $\left(\frac{5}{13}<1\right)$

при $t<2$ $\left(\frac{12}{13}\right)^t+\left(\frac{5}{13}\right)^t>\left(\frac{12}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2=1$

$\Downarrow$

$t \leq 2$

$\log_5(26x-x^2) \leq 2$ $\quad y=\log_5 x$ – возрастающ. $(5>1)$

$\log_5(26x-x^2) \leq \log_5 25$

5

$\Downarrow$

$$\begin{cases}26x-x^2 \leq 25\\ 26x-x^2>0\end{cases} \quad \begin{cases}(x-25)(x-1) \geq 0\\ x(x-26)<0\end{cases} \quad \begin{cases}x\in(-\infty,1]\cup[25;+\infty)\\ x\in(0;26)\end{cases}$$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

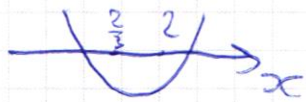
№ 6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

1) $ax+b \geq 18x^2-51x+28$ при всех $x\in(\frac{2}{3};2]$

$18x^2-(51+a)x+28-b \leq 0$ при всех $x\in(\frac{2}{3};2]$

$\Downarrow$



$$\begin{cases} F(\frac{2}{3})<0 & (1) \\ F(2)\leq 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} 8-34-\frac{2}{3}a+28-b<0 \\ 72-102-2a+28-b\leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{2}{3}a+b>2 \\ 2a+b\geq -2 \end{cases}$$

2) $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \quad \cdot(3x-2)>0$ т.к. $x\in(\frac{2}{3};2]$

$8-6x \geq (ax+b)(3x-2)$

$3ax^2+x(3b-2a)-2b \leq 8-6x$

$3ax^2+x(3b-2a+6)-2b-8\leq 0$

• $a=0$ $\quad x(3b+6)\leq 2b+8$ из 1) $b>2 \Rightarrow 3b+6>0$

$\Rightarrow x \leq \frac{2b+8}{3b+6} \Rightarrow$ чтобы выполнялось при всех $x\in(\frac{2}{3};2]$

$\frac{2b+8}{3b+6}\geq 2 \quad 2b+8\geq 6b+12$

$-4\geq 4b \quad b\leq -1 \quad b>2$

• $a>0$ — ветви вверх

$$\begin{cases} f\left(\frac{2}{3}\right)<0 \\ F(2)\le 0 \end{cases}$$

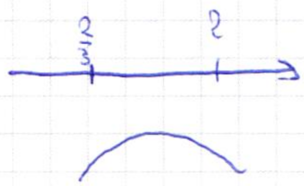
$$\begin{cases} \frac{4}{3}a+2b-\frac{4}{3}a+4-2b-8\le 0 \\ 12a+6b-4a+12-2b-8\le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4\le 0 \\ 8a+4b+4\le 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$2a+b\le -1$$

• $a<0$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

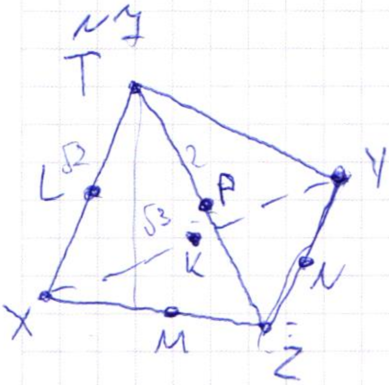
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 2 5 2 3

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7



Дано $XY=\sqrt{3}$ $TX=\sqrt{2}$ $TZ=2$

$XZ-?$ $\min R-?$

Решение:

Обозначим середины сторон согласно рисунку

1) По св средней линии: $LP \parallel XZ$, $KN \parallel XZ \Rightarrow LP \parallel KN$

$LP=\frac{1}{2}XZ=KN$

Т.к. $LP \parallel KN$, то 4 точки лежат на одной плоскости

Рассмотрим сечение сферы из условия данной плоскостью $LPKN$ – параллелограмм по признаку; $LPKN$ – впис. четырёхугольник

$\angle PLK + \angle PNK = 180^0$ по св впис; $\angle PLK = \angle PNK$ по св параллелограмма $\Rightarrow$

$\angle PLK = \angle PNK = 90^0$

$\Rightarrow$ Аналогично $\angle KLP = \angle PNK = 90^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow KLPN$ – прямоугольник по опр.

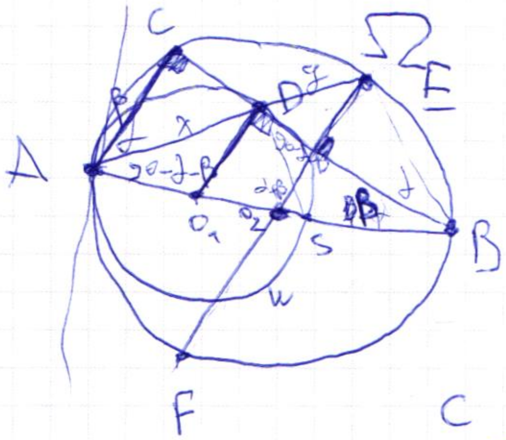
Рассмотрим $KMNY$ $KM \parallel YN$; $MN \parallel XY$ по св сред линии $\Rightarrow KMNY$ – параллелограмм + в сечении сферы плоскостью (XYZ) он описанный, значит $MKNY$ – тоже прямоугольник, $\angle XYZ = 90^0$

2) $PN \perp KN$ $KN \parallel XZ$ $PN \parallel TY \Rightarrow TY \perp XZ$

(1)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

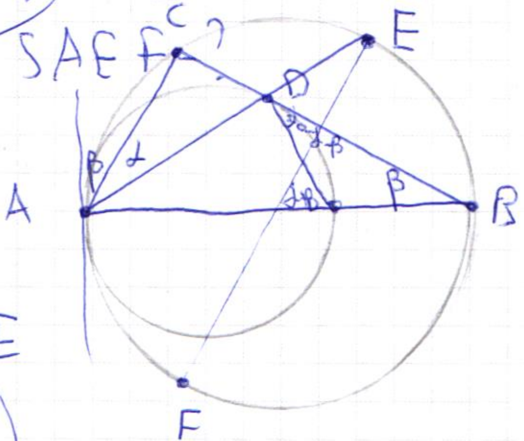
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

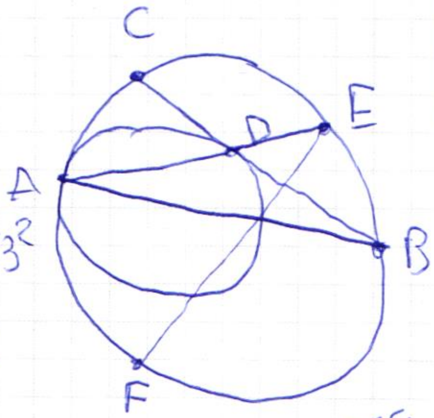


$CD = 12$ $BD = 13$

$R, r - ?$ $\angle AFE - ?$

$S_{AEF} - ?$





$$2R \cdot (2R - 2r) = 13^2$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{2R - r}{2R}$$

$$90 - \alpha - \cancel{\beta} + \cancel{\beta} = \alpha + \beta$$

$$90 - \beta = 2\alpha$$

$$xy = 12 \cdot 13$$

$$\frac{13}{25} = \frac{2R - r}{2R}$$

$$\frac{x}{x+y} = \frac{r}{R} = \frac{12 \cdot \cancel{13} \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot \cancel{13}} = \frac{24}{25}$$

$$26R = 50R - 25r$$

$$25r = 24R$$

$$2R = \frac{25}{12} r$$

$$\frac{25}{12} r \cdot \frac{1}{12} r = 13^2$$

$$25x = 24x + 24y$$

$$x = 24y$$

$$24y^2 = 12 \cdot 13$$

$$r^2 = \frac{13^2 \cdot 12^2}{5^2}$$

$$r = \frac{12 \cdot 13}{5}$$

$$2R = 5 \cdot 13$$

$$R = \frac{5 \cdot 13}{2}$$

$$\begin{array}{r} \times 125 \\ 13 \\ \hline 375 \\ 125 \\ \hline 1625 \end{array}$$

$$50+$$

$$\frac{65}{2} = 32,5$$

$$\begin{array}{r} \times 13 \\ 12 \\ \hline 26 \\ 13 \\ \hline 156 \\ 312 \end{array}$$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad f(p) - \left[\frac{p}{4}\right]$ $\qquad x \in [4; 28]$

$y \in [4; 28]$

$f(x/y) < 0$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(2) = 0$

$\underset{0}{f(2 \cdot 1)} = \underset{0}{f(2)} + \underset{0}{f(1)}$

$f(m) = f(m \cdot 1) + f(1)$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(1) = f(\frac{1}{y}) + f(y)$, $f(1) = 0$

$f(x/y) = f(x) - f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$

$f(4) = 0$

$f(5) = 1$ $\qquad 2 \cdot 3$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

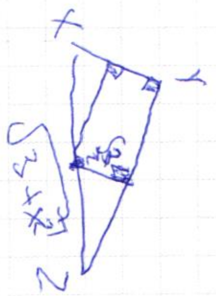
$f(20) = 1$

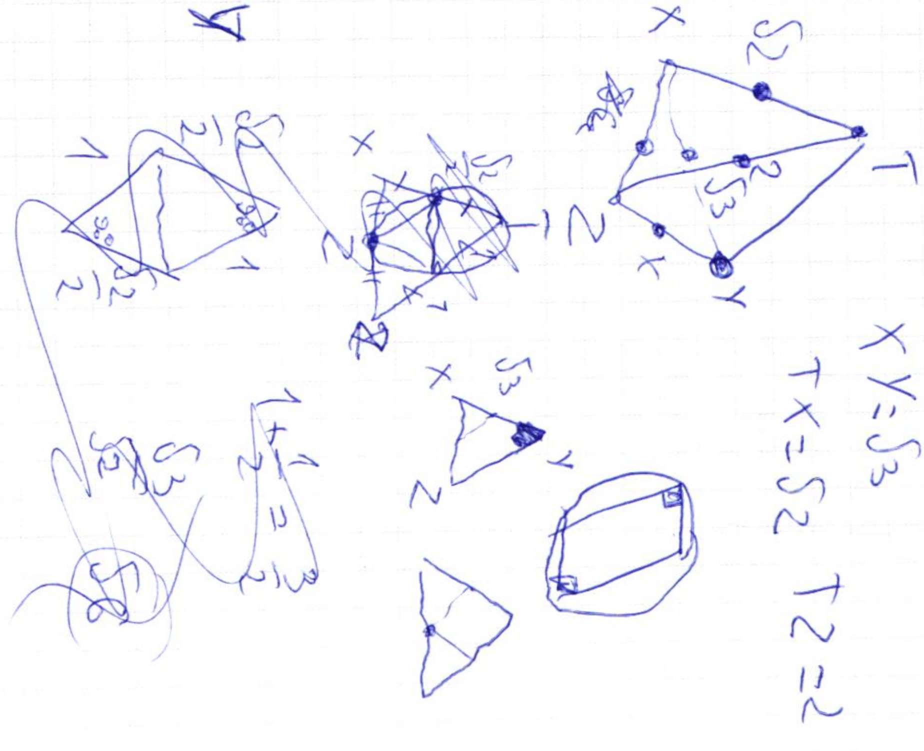
$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) =$

$f(24) = 0$





$XY = \sqrt{3}$

$TX = \sqrt{2}$ $\quad TZ = 2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 2 5 2 3

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} = \sin x + \sin y$

$\sin x \cdot \sin y =$

$2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

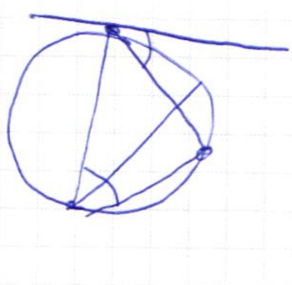
$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

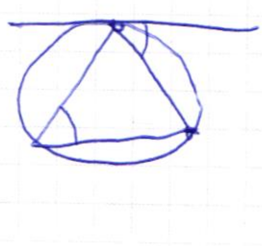
$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$tg(2\alpha)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta = -\frac{1}{\cos 2\alpha\cdot\sqrt{17}}$

$-2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n$

$-2\alpha - 2\beta = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n$





$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{17}}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$9+36-18-$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$x=1$ $\quad y=6$ $\quad 36+9$

$x(y-6)-(y-6)$

$y-6=a \quad x-1=b$

$a+6-6(b+1)$

$a-6b=\sqrt{ab}$

$a-6b$

$9b^2+a^2=90$

$(a-6b)^2=ab$

$90+72$

$a^2+36b^2-12ab=ab$

$\frac{18\cdot 9}{5}=\frac{162}{5}$

$a^2+36b^2-13ab=0$

$\frac{324}{10}$

$a-$ $\quad 4\cdot 9$

$a^2-9ab-4ab+36b^2$

$a(a-9b)-4b(a-9b)$

$\frac{324}{10}$

$(a-4b)(a-9b)=0$

$18 \times 16 = 108$ $\quad 18$

$32,4$

$t=-x^2+26x$

$|x^2-26x|=t$

$90-32,4$

$57,6$

$\frac{288}{5}$

$|t|^{\log_5 12} \geq t+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2>0$

$\frac{288}{5}$

$144+25=13$

$t^{\log_5 12} \geq -t+13^{\log_5 t}$

$t\cdot t$

$2^3+2^2=2$

$t^{\log_5 12\cdot\log_t 5\cdot\log_5 t}$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 t} \geq -t+13^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12} \geq -t+t^{\log_5 13}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin^2 x + 4\cos x = -1$

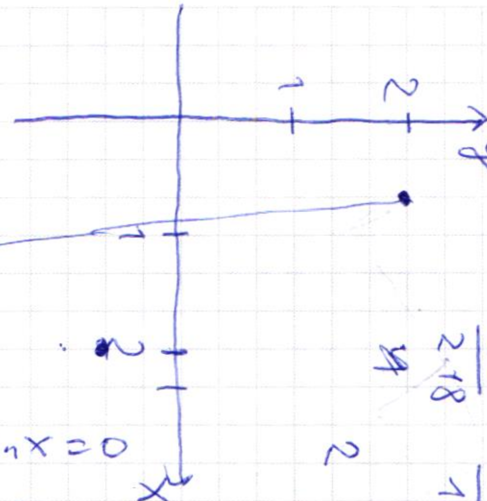
$\cancel{1} + 15\cos^2 x + 4\sin 2x = \cancel{1}$

$15\cos^2 x + 4\sin 2x = 0$

$\cos x = 0$

$15\cdot\cos x + 8\cdot\sin x = 0$

$4\cos x + \sin x = 0$



$8 - 17\cdot 2 + 28$

34

$4\cdot 2$

$2 \quad 18 \quad 51$

2

$12 \quad 17$

$12 \quad 15$

$-\frac{32}{17} + x = -1$

$\frac{15}{17}$

$\left(\frac{12}{13}\right)^d + \left(\frac{5}{13}\right)^d \geq 1$

$12^d + 5^d \geq 13^d$

$+\begin{array}{r}225\\64\end{array}$ $\overline{289}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$-\frac{15}{8} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$15x^2 - 15 = 16x$

$15x^2 - 16x - 15 = 0$

$5^d = 7$

$d = 7^{\log_5 7}$

$9 \quad 25$

$15x^2 - 25x + 9x - 15 = 0$

$(5x+3)(3x-5) = 0$

$x = -\frac{3}{5} \quad x = \frac{5}{3}$

$7^{\log_{25} 144} + 7 \geq 7^{\log_{25} 169}$

$12^{\log_5 7} + 7 \geq 13^{\log_5 7}$

$7^{\log_5 12} + 7 \geq 13^{\log_5 7}$

$(d+1)\left(\left(\frac{12}{13}\right)^{d-1} + \left(\frac{5}{13}\right)^{d-1}\right)$

$7 = 26x - x^2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

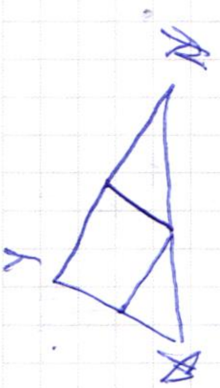
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

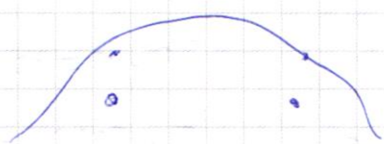
$a > 0$

$2a+3b \ge 6$

$2a+b > -2$

$2a+b < -1$





$18x^2-(51+a)x+28-b \le 0$ $\left(\frac{7}{2};2\right]$

$\cancel{18}+10$

$18x^2-51x+28$ 7 $8\cdot 9$

$18\cdot 4$ $7\cdot 4\cdot 2\cdot 9$ 72

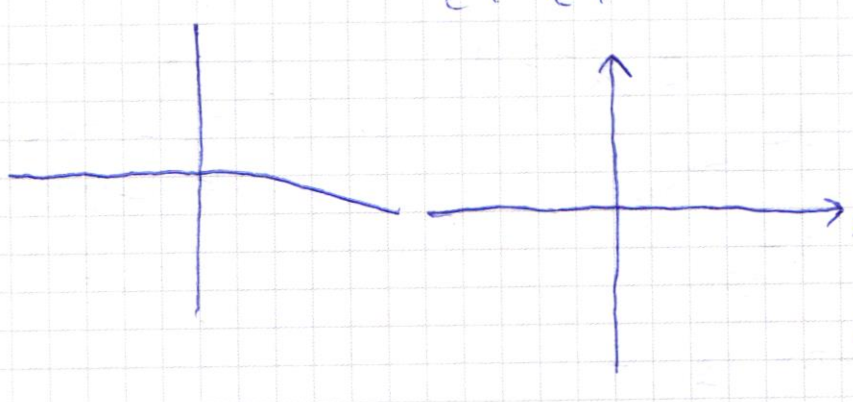
$72-102+28$ 14 36 $7.$

21 42 12

8 $7\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot 3$

$100-$ $6\cdot 7=42$ 12

24 21



$2 > 13^0$

№7

$2ax^2+x(3b-2a+6)-2b-8 \le 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)