МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР 2 0 0 0 0 3 8 7

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

Распишем:

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=\sin2\alpha\cos4\beta+\cos2\alpha\sin4\beta+$
$+\sin2\alpha=\sin2\alpha(\cos4\beta+1)+\cos2\alpha\cdot2\sin2\beta\cos2\beta=$
$=\sin2\alpha\cdot2\cos^2 2\beta+2\sin2\beta\cos2\beta\cdot\cos2\alpha=2\cos2\beta(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+$
$+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha)=2\cos2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)$

Из условия $2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=\frac{-4}{5}$ и $\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{-1}{\sqrt5}\Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cdot\frac{-1}{\sqrt5}\cos2\beta=\frac{-4}{5}$

$\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}\Rightarrow$ из основного тригонометрического тождества

$\sin2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt5}$ +1

1) Пусть $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$ и $\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$, тогда:

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+$
$+\cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=\frac{-1}{\sqrt5}$ из условия, тогда:

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha+1=0$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1+1=0$

~~$2\cos\alpha(2\sin\alpha+1)$~~ $2\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha=0$ (1)

Т.к по условию $tg\alpha$ определен $\Rightarrow\cos\alpha\neq0\Rightarrow$ поделим (1) на $\cos\alpha$:

$2tg\alpha+1=0\Rightarrow tg\alpha=\frac{-1}{2}$

2) Пусть $\sin2\beta=\frac{-1}{\sqrt5}$ и $\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$, тогда:

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\frac{2}{\sqrt5}-\cos2\alpha\frac{1}{\sqrt5}=\frac{-1}{\sqrt5}$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha-2\cos^2\alpha+2=0$ (2)

Т.к $\cos\alpha\neq0$ по доказанному, то разделим (2) на $2\cos^2\alpha\neq0$

$2tg\alpha-1+\frac{1}{\cos^2\alpha}=0$, т.к $\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+tg^2\alpha$, то:

$2tg\alpha + tg^2\alpha = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$

Мы получили 3 решения $tg\alpha = \{0; -2; \frac{-1}{2}\}$ и т.к. ~~все переходы были~~ мы разобрали все случаи то это и есть ответ.

Ответ: $-\frac{1}{2}; 0; -2$

4

Задача 2

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \; (3) \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = \sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25 \; (1) \end{cases}$

Графиком уравнения (1) является эллипс с центром $(2;1)$

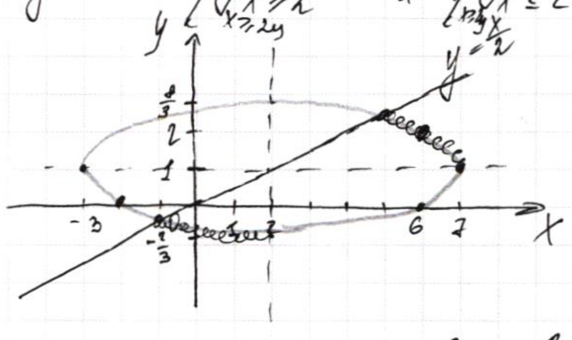
Если $x = 2$, то: $(3y-3)^2 = 25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{8}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{array}\right.$

Если $y = 1$, то: $(x-2)^2 = 25 \Downarrow \left[\begin{array}{l} x = 7 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Если $y = 0$, то: $x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 6$ или $x = -2$

(3) уравнение имеет смысл: $\begin{cases} x \geq 2y \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$

Нарисуем эллипс, $x = 2y$ и отметим на эллипсе корни, где $\begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq 2 \\ x \geq 2y \end{cases}$ и $\begin{cases} y \leq 1 \\ x \leq 2 \\ y \leq \frac{x}{2} \end{cases}$



Если $x \geq 2y$, то: $(x-2y)^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - 4xy + 4y^2 - xy + x + 2y - 2 = 0$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 5xy - 2 = 0$

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(xy + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad (2)$

Разберём 2 случая

черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 0 3 8 7

(заполняется секретарем)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Если $x \geq 2$ и $y \geq 1$, то $(x+\frac{1}{2})^2 \geq \frac{25}{4}$; $(2y+\frac{1}{2})^2 \geq \frac{25}{4}$,

$-5(xy+\frac{1}{2}) \leq -\frac{25}{2}$

Т.к $(x+1)^2 + (2y+\frac{1}{2})^2 \geq \frac{25}{2}$ и $-5(xy+\frac{1}{2}) \leq -\frac{25}{2}$, то

(2) возможно если $(x+1)^2 + (2y+\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$ и

$-5(xy+\frac{1}{2}) = \frac{25}{2}$ это будет при $x=2$ и $y=1$, но $(2;1)$ не

является решением (1) $\Rightarrow$ эта пара точек не подходит

2) Если $x \leq 2$ и $y \leq 1$, то $(x+\frac{1}{2})^2 \leq \frac{25}{4}$, т.к для
в крайнем случае для $x \leq 2$ и $y \leq 1$

эллипса $x \in [-3; 2] \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq (x+\frac{1}{2}) \leq \frac{5}{2}$

Т.к для эллипса в этом случае $y \in [-\frac{2}{3}; +1] \Rightarrow -\frac{5}{6} \leq 2y+\frac{1}{2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow (2y+\frac{1}{2})^2 \leq \frac{25}{4}$

Также $-2 \leq xy \leq 2 \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq (xy+\frac{1}{2}) \leq \frac{5}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{25}{2} \leq -5(xy+\frac{1}{2}) \leq \frac{15}{2}$

Если $x \geq 2y$, то (2) будет:

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - x(5y-1) + 4y^2 + 2y - 2 = 0$

$D = 25y^2 + 1 - 10y - 16y^2 - 8y + 8 = 9y^2 - 18y + 9 =$

$= 9(y-1)^2$

$x = \frac{5y-1 \pm 3(y-1)}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5y-1+3y-3}{2} \\ x = \frac{5y-1-3y+3}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 4y-2 \\ x = y+1 \end{array}\right.$

I) Пусть $x = y+1$. Подставим в (1):

$(y-1)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \Rightarrow (y-1)^2 = \frac{5}{2}$

$y = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} + 2$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

1) Проверим, что $x \geq 2y$, т.е: $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}+2 \geq \pm 2\sqrt{\frac{5}{2}}+2$

~~$2 \geq 1$ – подходит~~

~~Проверим, что $y \geq 1$: $\sqrt{\frac{5}{2}}+1 > 1$ и $\sqrt{\frac{5}{2}}+2 > 2$~~

$y \geq 2$

~~Оценим $-\sqrt{\frac{5}{2}}$: $1 < \sqrt{\frac{5}{2}} < 2 \Rightarrow -2 < -\sqrt{\frac{5}{2}} < -1$~~

~~$-1 < -\sqrt{\frac{5}{2}}+1 < 0$ и $-\sqrt{\frac{5}{2}}+1 <$~~

$\cdot\ \sqrt{\frac{5}{2}} \geq 2\sqrt{\frac{5}{2}}$ – неверно

$-\sqrt{\frac{5}{2}} \geq -2\sqrt{\frac{5}{2}}$ – верно ~~$x = -\sqrt{\frac{5}{2}}+2$ и $y = -\sqrt{\frac{5}{2}}+1$ подходит~~

2) Оценим $-\sqrt{\frac{5}{2}}$: $1 < \sqrt{\frac{5}{2}} < 2 \Rightarrow -2 < -\sqrt{\frac{5}{2}} < -1 \Rightarrow$

~~Провер~~ $\Rightarrow 0 \leq -\sqrt{\frac{5}{2}}+2 \leq 1$ и $-1 \leq -\sqrt{\frac{5}{2}}+1 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1$ и $-1 \leq y < 0 \Rightarrow$ уравнение (3) имеет смысл и $x = -\sqrt{\frac{5}{2}}+2$, $y = -\sqrt{\frac{5}{2}}+1$ – подходит

II Пусть $x = 4y-2$, тогда в (1):

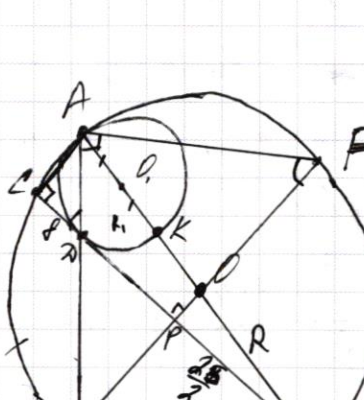
$(4y-4)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$(16+9)(y-1)^2 = 25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \Rightarrow x=6 \\ y=0 \Rightarrow x=-2 \end{array}\right.$

Из графика видно, что $x=-2$ и $y=0$ – не подходит, а вот $x=6$ и $y=2$ – подходит

Ответ: $(6;2)$; $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}+2; -\sqrt{\frac{5}{2}}+1\right)$

Задача 4



1) Пусть O – центр окружности Ω и O_1 – ц ω, а R – радиус Ω и R_1 – ω

2) Т.к Ω и ω касаются $\Rightarrow A, O_1, O$ и B лежат на одной прямой, тогда

$BO = OA = R$ (из условия AB – диаметр) и $O_1A = O_1K = R_1$, где $AB \cap \omega = K$

3) ~~Т.к $BC \perp FE$ по условию~~ Из леммы Архимеда $\cup CE = \cup EB$,

4) т.к по условию $BC \perp EF \Rightarrow EF$ проходит через т. O, EF – диаметр и $CP = PB$, где ~~$EB \cap A$~~ $EF \cap BC = P$ (т.к раз $\cup CE = \cup BE \Rightarrow CE = BE$ и

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к EP - высота $\triangle CEB$, то $\triangle CEB$ - р/б, где EP - высота и медиана)

По условию $CD = 8$ и $BD = 17 \Rightarrow CB = 25 \Rightarrow PB = PC = \frac{25}{2} \Rightarrow$

4) По свойству степени точки B относит-но ω:

$BD^2 = BK \cdot BA \Leftrightarrow 17^2 = (2R - 2R_1)(2R)$

$4R^2 - 4RR_1 = 289 \quad (1)$

5) Проведём AC. Т.к AB - диаметр $\Omega \Rightarrow \angle ACB = 90° \Rightarrow$

~~$\Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle OPB$ по I признаку подобия, тогда:~~

~~$\frac{AB}{OB} = \frac{BC}{BP} \Leftrightarrow \frac{2R}{}$~~

По теореме Пифагора в $\triangle ACB$: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4R^2 - 25^2}$.

Также из леммы Архимеда AD - биссектриса тогда по свойству биссектрисы: $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{4R^2 - 625}}{8} = \frac{2R}{17}$

$17^2 \cdot 4R^2 - 625 \cdot 17^2 = 4R^2 \cdot 64$

$4R^2(17^2 - 8^2) = 25^2 \cdot 17^2$

$4R^2 \cdot 9 \cdot 25 = 25 \cdot 25 \cdot 17^2 \Rightarrow R^2 = \frac{25 \cdot 17^2}{4 \cdot 9}$

$R = \frac{5 \cdot 17}{2 \cdot 3} = \frac{85}{6} \Rightarrow$ в (1):

$4 \cdot \frac{25 \cdot 17^2}{4 \cdot 9} - 4 \cdot \frac{5 \cdot 17}{2 \cdot 3} R_1 = 17^2$

$\left(\frac{25}{9} - 1\right) 17 = \frac{5 \cdot 2}{3} R_1 \Rightarrow \frac{16 \cdot 3 \cdot 17}{9 \cdot 5 \cdot 2} = R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{136}{15}$

6) По доказанному EF - диаметр $\Rightarrow \angle FAE = 90°$, а т.к $\angle DPF = 90° \Rightarrow ADPF$ - вписанный и $\angle AFE = \angle ADC$

7) $AC = \sqrt{4R^2 - 25^2}$, по доказанному, тогда $4R^2 = \frac{25 \cdot 17^2}{4 \cdot 9}$

$AC = \sqrt{\frac{25\cdot 17^2}{9} - 25^2} = 5\sqrt{\frac{17^2}{3^2} - 25} = 5\sqrt{\left(\frac{17}{3}-5\right)\left(\frac{17}{3}+5\right)} =$

$= 5\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{32}{3}} = \frac{5\cdot 8}{3} = \frac{40}{3} \Rightarrow$ в $\triangle ACD$: $tg\angle ADC = \frac{40}{3\cdot 8} = \frac{5}{3}$,

тогда $tg\angle AFE = \frac{5}{3} \Rightarrow \angle AFE = arctg\,\frac{5}{3}$

в) Пусть $AE = 5x \Rightarrow$ т.к. $tg\angle AFE = \frac{5}{3}$, то $AF = 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора в $\triangle AFE$: $EF^2 = 25x^2 + 9x^2 = 34x^2$

По доказанному EF - диаметр $\Omega \Rightarrow EF = 2R = \frac{2\cdot 5\cdot 17}{2\cdot 3} = \frac{5\cdot 17}{3}$,

тогда: $\sqrt{34}\, x = \frac{5\cdot 17}{3}$ ~~$\Rightarrow x^2 = \frac{5\cdot 17}{}$~~

$x = \frac{5\cdot 17}{3\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{17}}{3\sqrt{2}} = \frac{5\cdot 17\sqrt{34}}{3\cdot 34} = \frac{5\sqrt{34}}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow AF = \frac{3\cdot 5\sqrt{34}}{6}$ и $AE = \frac{5\cdot 5\sqrt{34}}{6}$ и тогда $S_{AFE} = \frac{1}{2}AF\cdot FE =$

$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5\sqrt{34}}{6}\right)^2\cdot 3\cdot 5 =$ ~~$\frac{1}{2}\frac{5\cdot 17\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 34}$~~ $= \frac{3\cdot 5\cdot 5^2\cdot 34}{2\cdot 6\cdot 6} = \frac{125\cdot 17}{12} =$

$= \frac{2125}{12}$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $R_1 = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = arctg\frac{5}{3}$;

$S_{AFE} = \frac{2125}{12}$.

Задача 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x \quad (1)$

1) Заметим, что $x^2+18x > 0$, тогда (1) равносильно:

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} - (x^2+18x)^{\log_{12}13} \geq -18x - x^2 = -(x^2+18x)$ (*)

2) $\log_{12}5 < \log_{12}13 \Rightarrow$ Если $x^2+18x \in [0;1]$, то:

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} - (x^2+18x)^{\log_{12}13} \geq 0$

Также $x^2+18x > 0 \Rightarrow -(x^2+18x) < 0$ ~~при любых~~

Получается, что при $x^2+18x \in (0;1]$ (1) будет выполняться. Найдем такие x:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-18 \\ x>0 \end{array}\right. \\ x^2+18x-1\le 0 \end{cases}$

Не те усл-я,

$D_1 = 81+1 = 82$

$x = -9 \pm \sqrt{82}$

$9 < \sqrt{82} < 10 \Rightarrow -19 < -9-\sqrt{82} < -18$

$0 < -9+\sqrt{82} < 1$

Имеем:

$-9-\sqrt{82}$ $\quad -18 \quad 0 \quad -9+\sqrt{82}$ $\quad x$

$x \in [-9-\sqrt{82}; -18) \cup (0; -9+\sqrt{82}]$

3) Если $x^2+18x>1$, то

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} - (x^2+18x)^{\log_{12}13} < 0$ и $-(x^2+18x) < -1$

Причем т.к. $\log_{12}5 < 1 \Rightarrow (x^2+18x)^{\log_{12}5} < \sqrt{x^2+18x}$,

а т.к. $\log_{12}13 > 1 \Rightarrow (x^2+18x)^{\log_{12}13} > x^2+18x > 1$ ~~$\Rightarrow (x^2+18x)^{\log_{12}13} > 1$~~

Имеем:

$0 < (x^2+18x)^{\log_{12}5} < \sqrt{x^2+18x}$ $\Bigg| \Rightarrow (x^2+18x)^{\log_{12}5} - (x^2+18x)^{\log_{12}13} < \sqrt{x^2+18x} - x^2 - 18x$, ;

$0 < (x^2+18x)^{\log_{12}13} - x^2 - 18x > 0$

~~3(1) Можно переписать как~~ получается, что левая часть (*) будет

~~$x^2+18x \ge (x^2+18x$~~ $13^{\log_{12}(x^2+18x)} - 5^{\log_{12}(x^2+18x)}$ всегда меньше правой части для $x^2+18x>1$

~~Если $x^2+18x=1$, то: $1 \ge 1-1=0$ верно~~

~~Если $x^2+18x=2$, то: $2 \ge 13^{\log_{12}2} - 5^{\log_{12}2}$ (3)~~

~~$13^{\log_{12}2} - 5^{\log_{12}2} < \sqrt{13}-\sqrt{5} < 4-2=2$ (3) выполняется~~

~~Если $x^2+18x=3$, то: $3 \ge 13^{\log_{12}2} - 5^{\log_{12}3}$~~

~~и оценку (*) также можно применить.~~

~~Если $x^2+18x = 7$, то ... $13^{\log_{12}7} - 5^{\log_{12}7}$~~

~~$13^{\log_{12}7} + 5^{\log_{12}7} = 13 - 5 = 8$~~

~~$13^{\log_{12}7} < \sqrt{...} ... 12$~~

~~$8^{\log_{12}7}$ 4~~

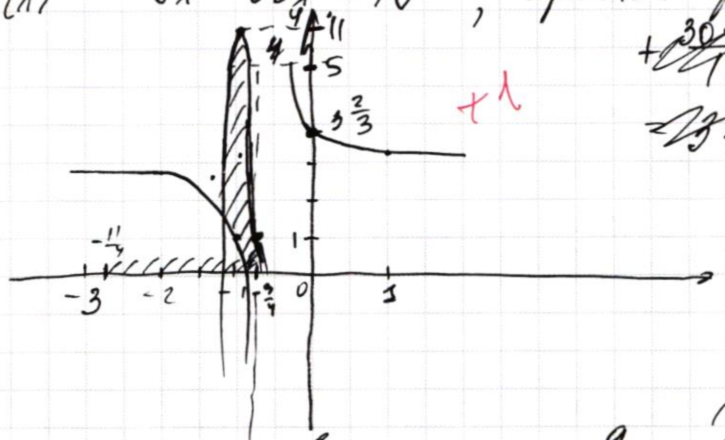
Ответ:

$x \in [-9-\sqrt{82}; -18) \cup (0; -9+\sqrt{82}]$

Задача 5

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$

Нарисуем графики функций $f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$ и $g(x) = -8x^2-30x-17$, вершина при $x = \frac{-30}{2\cdot 8} = \frac{-15}{8}$ ~~и $y = \frac{-8\cdot 15^2}{16\cdot 16} + \frac{30\cdot 15}{16} - 17 = \frac{-225}{32} + \frac{900}{32} - 17 = ...$~~



+1

и $y = \frac{-8\cdot 225}{8\cdot 8} + \frac{30\cdot 15}{8} - 17 = \frac{450-225}{8} - 17 = \frac{225}{8} - 17 = 28\frac{1}{8} - 17 = 11\frac{1}{8}$

Если $x = \frac{-3}{4}$, то: $-8\cdot\frac{9}{16} + \frac{30\cdot 3}{4} - 17 = \frac{-9}{2} + \frac{45}{2} - 17 = 1$

На графике решением будет заштрихованная часть

$K(x) = ax+b$ — прямая, где $a = \text{tg}\,\alpha$ и b — точка пересечения с осью ординат

~~Если~~ $g(0) = -17$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos\alpha \neq 0$! $\quad tg\,\alpha$? ← хотя бы 3 дня

$\sin(2(\alpha+\beta)) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = \frac{-1}{\sqrt5} = \sin 2\alpha$.

$\sin(2\alpha+4\beta)) + \sin 2\alpha = \frac{-4}{5}$

• $\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha \quad 2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta \; + 2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta =$

$\cos 4\beta + 1 = 2\cos^2 2\beta \quad | \quad = 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta) = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta\cdot\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt5}} = \frac{-4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac45} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

1) $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\frac{2}{\sqrt5} = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \quad | \quad \sin 2\alpha + \cancel{2\cos 2\alpha} = 1 \quad |:\cancel{\cos 2\alpha}$

$\cancel{tg 2\alpha + 2 = \frac{1}{\cos 2\alpha}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2(2\cos^2\alpha - 1) = 1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 3 = 0$

$\cancel{2\sin\alpha}$ $\quad \sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\frac{1}{\sqrt5} = \frac{-1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1 = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha$

$\cancel{2\cos\alpha(2\sin\alpha+1)} \quad 4tg\alpha + 2 = 0$

$tg\alpha = \frac{-1}{2}$

2) $\sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt5}$: $\quad \sin 2\alpha\frac{2}{\sqrt5} - \cos 2\alpha\frac{1}{\sqrt5} = \frac{-1}{\sqrt5}$

$4\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2 = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + 1 = 0 \quad | : \cos^2\alpha$

$2tg\alpha - 1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 0$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad 2tg\alpha + tg^2\alpha = 0$

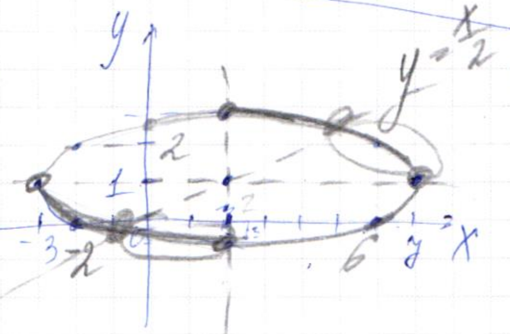
$tg\alpha = 0 \quad tg\alpha = -2$

$tg\alpha(2 + tg\alpha) = 0$

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 - 4 - 9 = 12$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25 = 5^2$



$x - 2y \geq 0$

$y \leq \frac{x}{2}$

$xy - x - 2y + 2 = (y-1)(x-2)$

$x - 2y = \underbrace{\sqrt{(y-1)(x-2)}}_{\geq 0}$ $\quad x = 2: \quad 9(y-1)^2 = 25$

$y - 1 = \pm\frac{5}{3}$

$y = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \quad -\frac{2}{3}$

$x = 2: \; 3y - 3 = 0$

$y = 1$

$y = 0: \quad x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x-6)(x+2) = 0$

$x = 0:$

$9y^2 - 6y - 4 = 0$

$D_1 = 9 + 12 = 21$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 + x - 5xy + 4y^2 + 2y - 2 = 0$

$x^2 + x(1 - 5y) + 4y^2 + 2y - 2 = 0$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 5xy - 2 = 0$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 - 5xy - \frac{5}{2} = 0$

$x = 2$

$x = 2y$ $\quad 1 - 10y + 25y^2 - 16y^2 - 8y + 8 = 9y^2 - 18y + 9 = 9(y-1)^2$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(xy + \frac{1}{2}\right) = 0$

$1 \leq y \leq \frac{3}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y < 1 \\ x < 2 \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad 2y \geq 2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{25}{4}$

$\left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{25}{4}$ $\geq \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$

$xy \geq 2 \Rightarrow \left(xy + \frac{1}{2}\right) \geq \frac{5}{2} \Rightarrow -5\left(xy - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{25}{2}$

~~$D = 2$~~

$y < 1 \Rightarrow 2y < 2 \Rightarrow \left(2y + \frac{1}{2}\right) < \frac{5}{2}$

т.к $y \in \left[-\frac{2}{3}; 1\frac{2}{2}\right]$, то $\left(2y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{25}{4}$

$x < 2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right) < \frac{5}{2}$ т.к $x \in [-3; 2]$, то

$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{25}{4}$

$-3 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

$5\left(xy + \frac{1}{2}\right) < \frac{25}{2}$

$-5\left(xy + \frac{1}{2}\right) \geq \frac{25}{2}$

$y < \frac{x}{2}$

$2 \geq x \geq 2y \geq 2 \Rightarrow x = 2$, то $y = 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

20000387

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}(x-2)^2+(3y-3)^2=25\\ x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)}\end{cases}$$

$(3y-3)^2=25$

$3y-3=\pm 5$

$3y=\frac{8}{3}$

$y=\frac{-2}{3}$

$x>2y \Leftrightarrow y<\frac{x}{2}$

$(x+\frac{1}{2})^2+(2y+\frac{1}{2})^2-5(xy-\frac{1}{2})=0$

$x^2+2x+\frac{1}{4}+4y^2+2y+\frac{1}{4}-5xy+\frac{5}{2}$

$-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{8}{6}+\frac{3}{6}$

$x=2$, $y=1$ | $4+9-8-18=-\frac{1}{2}y$

$x^2-4x+\cancel{3}=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$x=2 \quad y=\frac{-2}{3}$

$2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3}; \sqrt{\frac{-4}{3}-2+\frac{4}{3}+2}$

$x^2+9-4x+18=12$

$x^2-4x+9+\frac{6}{15}=0$

$\frac{1}{2}$ $x=2y$: $0=\sqrt{2y^2-2y-2y+2}$

$y^2-2y+1=0$

$y=1$

$x=-2$

$y=-1$

$4y^2+9y^2-8y-18y=12$

$13y^2-26y-12=0$

$13(y-1)^2-\frac{12}{13}-13=0$

$y=\pm\frac{25}{\sqrt{13}}+1$

$x=2y$: $xy-x-2y+2=2y^2-4y+2$

$2(y^2-2y+1)=\cancel{\sqrt{2}}(y-1)^2$

$y=\pm\frac{5}{\sqrt{13}}+1$; $\sqrt{2}(y-1)^2=\frac{\sqrt{2}\,25}{13}$;

$y=\frac{x}{2}$: $x^2+9\frac{x^2}{4}-4x-\cancel{18}\frac{x}{2}=12$

$\frac{13x^2}{4}-13x-12=0 \quad |\cdot 4$

$13x^2-2\cdot 26x-4\cdot 12=0$

$D_1=26^2-13\cdot 4\cdot 12=13\cdot 4(13-12)$

$x=\frac{26\pm 2\sqrt{13}}{13}=2\pm\frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow y=1\pm\frac{1}{\sqrt{13}}$

$2+\frac{2}{13}$ —

$(y-1)(x-2)=\frac{\pm 1}{\sqrt{13}}\pm\frac{2}{13}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

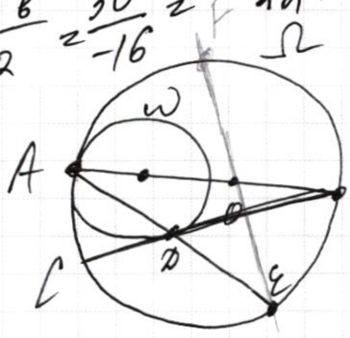
$-8+30-17$ $\quad 13$

$\times\begin{array}{r}28\\8\\\hline 224\end{array}$

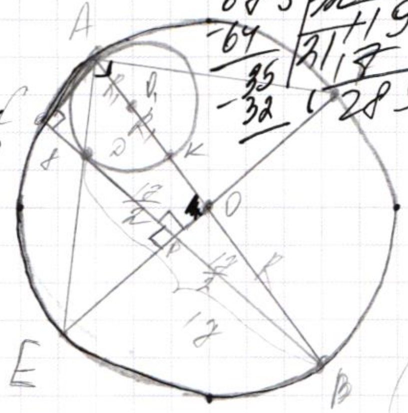
$x=-\frac{b}{2a}=\frac{30}{-16}=$

Ω

$\begin{array}{r}25\\ \times 25\\\hline 125\\ 50\\\hline 625\end{array}$



30 $\quad \begin{array}{r}900\\-225\\\hline 675\\-64\\\hline 35\\-32\end{array}$ $\quad \begin{array}{r}17\\ \times 17\\\hline 119\\ 17\\\hline 289\end{array}$ $\quad \begin{array}{r}17\\+15\\\hline 32\end{array}$



$CD=8 \quad R_1$

$BD=17$

$BD^2=17^2=(2R-2R_1)\cdot 2R$

$\triangle OPB \sim \triangle ACB$

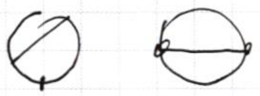
$\frac{OP}{AC}=\frac{R}{2(R+R_1)}=\frac{PB}{25}$

AE – бис по лемме Архимеда

$AD=\sqrt{8^2+\frac{40^2}{3^2}}=$

$\begin{array}{r}1600\\+64\\\hline 1664\end{array}$ $\quad 48 \quad \times\begin{array}{r}64\\9\end{array}$ $\quad 3-\frac{2}{5}$

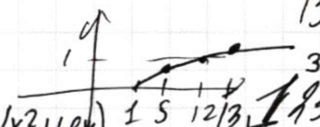
$4\cdot\frac{1}{2}=$



$-8+3=$

$\begin{array}{r}17\\ \times 8\\\hline 136\end{array}$ $\quad \begin{array}{r}85\\+34\\\hline 119\\+17\\\hline 136\end{array}$

$3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ $\quad 24^2+40^2$



$\begin{array}{r}125\\ \times 17\\\hline 875\\125\\\hline 2125\end{array}$ $\quad \begin{array}{r}125\\ \times 17\\\hline 875\\125\\\hline 2125\end{array}$

$\underbrace{x^2+18x}_{>1} \geq \underbrace{13^{\log_{12}\overbrace{(x^2+18x)}^{>0}} - 5^{\log_{12}(x^2+18x)}}_{>0}$

$x^2+18=1$

$1 \geq 0$

$x=2: \quad 4+18\cdot 2 \geq 13$

$2 \geq 13^{\log_{12}2}-5^{\log_{12}2}$

$1>\sqrt{13}-\sqrt{5}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{1}=\frac{1}{4} \quad 1$

$(4)^{\frac{1}{2}}=2$

$4^{1}=4 \quad (4)^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt{x}-x^4<\cancel{8}x^3$

$\sqrt{2} \quad 2\sqrt{x}<x$

$2x<x^2$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5}<\sqrt{x^2+18x}<1$

$(x^2+18x)^{\log_{12}13}-x^2-18x>0$

$x^2+18x=$

$2-4^{-2}<-4$

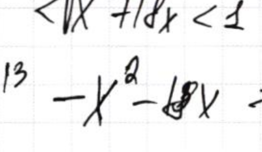
a^x

$\sqrt{x}-x<-x$

$\sqrt{x}<2x$

$\sqrt{x}-1>-x$

$\sqrt{x}-x \quad \cancel{2x}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)