МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

20001049

ВАРИАНТ 1 ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

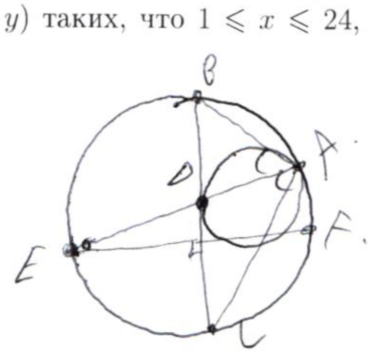
3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.



6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 11 \\ \hline 13 \\ 13 \\ \hline 143 \end{array}$$

№5 $f(ab) = f(a) + f(b)$. $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$.

$\exists x, y \in \mathbb{N}, \in [1; 24]$ - удовл. условию $f(\frac{x}{y}) < 0$.

тогда $f(x) = f(y) + f(\frac{x}{y}) \Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$.

условие $f(\frac{x}{y}) < 0 \iff$ условию $f(x) - f(y) < 0$, $f(x) < f(y)$.

$\rightarrow$ Задачу можно переформулировать найти кол-во пар (x, y): $x, y \in \mathbb{N}$, $x, y \in [1; 24]$: $f(x) < f(y)$

Посчитаем $f(x)$ для всех $x \in [1; 24]$, $x \in \mathbb{N}$.

~~$\exists u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k} = f(p_1) + f(\frac{u}{p_1})$~~

~~$f(p_1) + f(p_1) + f(\frac{u}{p_1 p_2})$~~ для $x = p_1$ затем

вначале посчитаем

$11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 =$

$= 11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 = 143 + 42 + 8 + 3$

$7 \cdot 6 = 42$

$\frac{24 \cdot 23}{2}$

$143 + 42 = 185$, $185 + 11 = 196$

$13 \cdot 11 = 143$

$t^4 + t^6 \ldots \geq 0$

$\log_{12} t = z$.

$t = z^{12}$

$\left(\frac{z^{12}}{5^z}\right)' = \frac{12z^{11} \cdot 5^z - (\ln 5) \cdot 5^z}{5^{2z}}$

$5^{\log_{12} t} + t \geq 13^{\log_{12} t}$.

$t \geq 13^{\log_{12} t} - 5^{\log_{12} t}$.

$z^{12} \geq 13^z - 5^z \quad | : 5^z$.

$\frac{z^{12}}{5^z} \geq \left(\frac{13}{5}\right)^z - 1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$.

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4\sqrt{5}}{10} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

~~1) $\exists\ (2\alpha+2\beta) \in [-\pi+2\pi k; \pi+2\pi k]$, тогда~~

~~$; \cos(2\alpha+2\beta) \geq 0 \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta)$~~

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\cos 2\beta$.

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = \pm 2\beta + 2\pi n \ (n\in\mathbb{Z}) \\ 2\alpha+2\beta = \pi \pm 2\beta + 2\pi n \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{ll} 2\alpha = 2\pi n & (1) \\ 2\alpha+4\beta = 2\pi n. & (2) \\ 2\alpha+4\beta = \pi+2\pi n & (3) \\ 2\alpha = \pi+2\pi n. & (4) \end{array}\right.$

(1) $2\alpha = 2\pi n \Leftrightarrow \alpha = \pi n \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0$

(4) $2\alpha = \pi+2\pi n \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}+\pi n \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha$ — не определён.

(2) и (3) ~~sin~~ $2\alpha+4\beta = \pi k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta) =$
$= 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \pm\frac{3}{5} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \cos^2\alpha = \dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2},\ \cos 2\alpha = \dfrac{3}{5} \\ \cos^2\alpha = \dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2},\ \cos 2\alpha = -\dfrac{3}{5} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \cos^2\alpha = \dfrac{4}{5} \\ \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5}. \end{array}\right.$$

~~tg~~ Воспользуемся формулой:

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$$tg^2\alpha = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg^2\alpha = \dfrac{1 - \frac{4}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)} = \dfrac{1}{4} \\ tg^2\alpha = \dfrac{\left(1 - \frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{1}{5}\right)} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

2

$tg\alpha = \pm\frac{1}{2}$; $tg\alpha = \pm 2$

Лишние корни: $\frac{1}{2}$ и 2.

Ответ: $tg\alpha \in \{0; \pm\frac{1}{2}; \pm 2\}$.

№4 (продолжение. начало на стр №9)

$\angle CAE = \alpha$, тогда $\angle CAB = 2\alpha$ (AD - бис-са $\angle CAB$). $\cup EC = 2\angle CAE = 2\alpha$.

$\angle CBA = \angle BCA - \angle CAB = 90° - 2\alpha \Rightarrow \cup CA = 180° - 4\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cup ECA = \cup EC + \cup CA = 2\alpha + 180 - 4\alpha = 180 - 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EFA = \frac{1}{2}\cup ECA = \frac{1}{2}\cdot(180 - 2\alpha) = 90 - \alpha.$

$\sin 2\alpha = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{25}{2R} = \dfrac{25\cdot 6}{8\cdot 17\cdot 2\cdot 25}\cdot ... = \dfrac{15}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = +\sqrt{\dfrac{289 - 225}{289}} = \dfrac{8}{17}$ ($\cos 2\alpha > 0$ т.к. 2α - острый угол)

$\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{\cos 2\alpha + 1}{2}} = +\sqrt{\dfrac{25}{34}} = \dfrac{5}{\sqrt{34}} = \sin(90 - \alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EFA = \arcsin(90 - \alpha) = \boxed{\arcsin\dfrac{5}{\sqrt{34}}}$ +

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ (x-2)^2-4+9(y-1)^2-9=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2-13=12 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$

Замена: $\left.\begin{array}{l} a=x-2 \\ b=y-1 \end{array}\right)$ $x-2y=(a+2)-(2b+2)=$
$=a-2b.$

Перепишем систему в новых терминах:

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 2b \\ (a-2b)^2=ab \\ a^2+9b^2=25. \end{cases}$

$\begin{cases} a\geq 2b \\ a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$ $\begin{cases} a\geq 2b. \\ a^2-5ab+4b^2=0 \quad (2) \\ a^2+9b^2=25. \end{cases}$

при $b=0$: $\begin{cases} a\geq 0 \\ a^2=0 \\ a^2=25 \end{cases} \Rightarrow 25=0$ Система не имеет решений $\Rightarrow b\neq 0.$

(2) $a^2-5ab+4b^2=0 \quad |:b^2\neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+4=0.$ Замена $t=\frac{a}{b}.$

$$t^2-5t+4=0$$

$$(t-1)(t-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=1 \\ \frac{a}{b}=4 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b. \end{array}\right.$$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} a \geq 2b \\ \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 2b \\ \left[\begin{array}{l} \cancel{a^2} b^2+9b^2=25, a=b \\ 16b^2+9b^2=25, a=4b \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \geq 2b \\ \left[\begin{array}{l} b^2=2{,}5, \ a=b \\ b^2=1, \ a=b \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 2b \\ \left[\begin{array}{l} b=\frac{\sqrt{5}}{2}, \ a=\frac{\sqrt{5}}{2}. \\ a=b=-\frac{\sqrt{5}}{2} \\ b=1, \ a=4 \\ b=-1, \ a=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

4

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=-\frac{\sqrt{5}}{2}. \\ b=1, \ a=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=a+2 \\ y=b+1 \\ \left[\begin{array}{l} a=b=-\frac{\sqrt{5}}{2} \\ b=1, \ a=4. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{5}}{2}. \\ y=1-\frac{\sqrt{5}}{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(2-\frac{\sqrt{5}}{2}; 1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$; $(6; 2)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\exists$ x, y – удовлетворяют условию: $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, $1 \le x, y \le 24$, $x, y \in \mathbb{N}$. $x, y \in \mathbb{N}$, ~~что~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \Rightarrow$ ~~условие~~

$\operatorname{sign}\left(f\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \operatorname{sign}(f(x) - f(y)) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ условие $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ равнозначно условию $f(x) - f(y) < 0$ $(x, y \in \mathbb{N}, 1 \le x, y \le 24)$

$f(x) < f(y) \Rightarrow$ задачу можно переформулировать: ~~найти~~ найти все пары $(x; y)$: $x, y \in \mathbb{N}$, $1 \le x, y \le 24$, $f(x) < f(y)$.

Понятно, что если $f(ab) = f(a) + f(b)$ $(a, b \in D_f)$, то $f(abc) = f(a) + f(bc) = f(a) + f(b) + f(c)$.

И $f(a_1 a_2 \ldots a_n) = f(a_1) + f(a_2 a_3 \ldots a_n) = f(a_1) + f(a_2) + f(a_3 a_4 \ldots a_n) = \ldots = f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)$ $(a_1, a_2, \ldots, a_n \in D_f) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для каждого $x \in \mathbb{N}$ с каноническим разл. $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ $f(x) = \underbrace{f(p_1) + f(p_1) + \ldots + f(p_1)}_{\alpha_1} + \underbrace{f(p_2) + \ldots + f(p_2)}_{\alpha_2} + \ldots + \overbrace{f(p_n) + f(p_n) + \ldots + f(p_n)}^{\alpha_n} = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots +$

№ 5 (пр).

$+ \alpha_n f(p_n)$. $(p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{P}) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{N}$, $x \neq 1$ мы можем посчитать $f(x)$ по этой формулы. Посчитаем $f(x)$ при $2 \le x \le 24$.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(x)	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0

19	20	21	22	23	24	1
4	1	1	2	4	0	0

Примеры вычислений:

$f(21) = f(7) + f(3) = \left[\frac{7}{4}\right] + \left[\frac{3}{4}\right] =$
$= 1 + 0 = 1$.

$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3f(2) + f(3) =$
$= 3\left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{3}{4}\right] = 0$.

Заметим:

$f(7) = f(7) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

] a_1 – кол-во чисел для которых значение функции равно 0, a_2 – для которых 1, a_3 – для 2, a_4 – для 3, a_5 для 4.

Из таблицы: $a_1 = 11$, $a_2 = 7$, $a_3 = 2$, $a_4 = 1$, $a_5 = 3$

Нужно найти такие пары (x, y), что $f(x) < f(y)$.

(1) Если $f(x) = 0$, то таких пар $\underbrace{a_1}_{\text{кол-во } x\text{-ов}} \cdot \underbrace{(a_2 + a_3 + a_4 + a_5)}_{\text{кол-во } y\text{-ков, таких, что } f(y) > f(x)}$

(2) Если $f(x) = 1$, то $a_2 \cdot (a_3 + a_4 + a_5)$

(3) Если $f(x) = 2$, то $a_3 (a_4 + a_5)$

(4) Если $f(x) = 3$, то $\underbrace{a_4}_{x\text{-н}} \cdot \underbrace{a_5}_{y\text{-ки}}$, если $f(x) = 4$, то 0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

Замена $t=x^2+18x$, $t>0$ (ОДЗ).

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq 13^{\log_{12}t}$$

$$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13} \qquad \left(\log_{12}13=\log_{12}12+\log_{12}\frac{13}{12}\right)$$

$$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\overset{1}{\log_{12}12}+\log_{12}\frac{13}{12}}$$

$$t^{\log_{12}5}+t \geq t+t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$$

$$t^{\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)}$$

функция $f(a)=\log_{12}a \nearrow$ при $a\in D_f \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{12}5 > \log_{12}\frac{13}{12}$ $\left(5>\frac{13}{12}\right)$.

① При $t>1$: $g(a)=t^a \nearrow \Rightarrow t^{\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)}$.

② При $t\in(0;1)$ $g(a)=t^a \downarrow \Rightarrow t^{\log_{12}5} \leq t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)}$.

③ При $t=1$: $t^{\log_{12}5}=t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)} \Rightarrow t^{\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)}$

№3 (пр)

случаи ① и ③ подх., ~~всех~~ ② – нет =>

нер-во выполняется при $t \geq 1$

не только! и не при всех $t \geq 1$ выполняется.

$x^2 + 18x \geq 1.$

РУ:

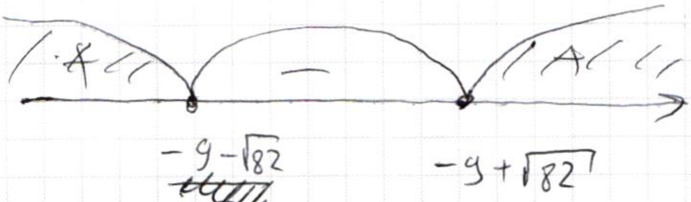
$x^2 + 18x - 1 = 0$

$D = 324 + 4 = 328 = 4 \cdot 82$

$x = \frac{-18 \pm 2\sqrt{82}}{2} = -9 \pm \sqrt{82}$

$\left(x + 9 + \sqrt{82}\right)\left(x + 9 - \sqrt{82}\right) \geq 0$

0



ОДЗ выполняется т.к. $x^2 + 18x \geq 1 > 0$.

Ответ: $(-\infty; -9-\sqrt{82}] \cup [-9+\sqrt{82}; +\infty)$.

№5 (продолжение, начало на стр. №5)

4

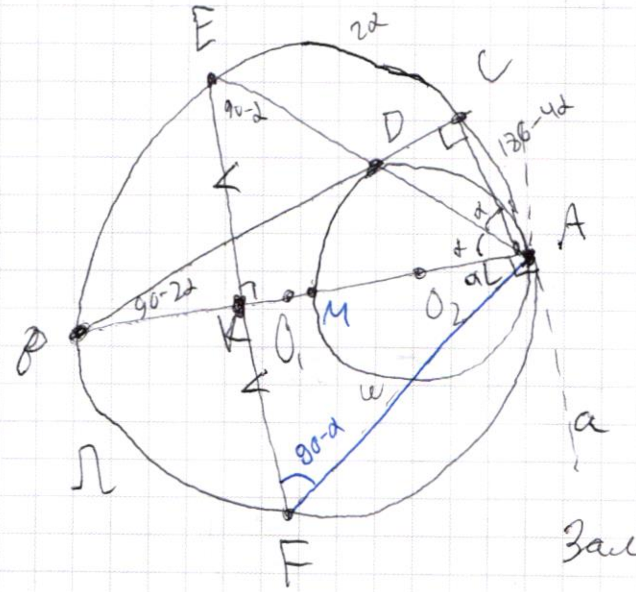
①, ②, ③, ④ => суммарное кол-во пар $S = a_1(a_2+a_3+a_4+a_5) + a_2(a_3+a_4+a_5) + a_3(a_4+a_5) + a_4 \cdot a_5 = 11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \; {+1 \cdot 2} = 143 + 42 + 8 + 3 = 185 + 11 = 196$

Забыл один случай.

Ответ: 196.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 $CD=3,\ BD=17.$



Проведём касательную a к Λ через (·) A.

BA – диаметр $\Lambda \Rightarrow$ $\Rightarrow$ (·) $O_1 \in BA$ (O_1 – центр Λ).

(·) $M = AB \cap \omega$.

Заметим, что $a \cap \Lambda = (\cdot)A$, ω с Λ, (·) $A \in \omega$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \cap \omega = (\cdot)A \Rightarrow a$ – касательная к ω.

MA – хорда ω, $MA \perp a$ – касательной к $\omega \Rightarrow$ $\Rightarrow MA$ – диаметр $\omega \Rightarrow (\cdot)O_2 \in MA$ (O_2 – центр ω).

MA – диаметр $\omega \Rightarrow MA = 2r$ (r – радиус ω), BA – диам $\Lambda \Rightarrow BA = 2R$ (R – радиус Λ).

По Th о квадрате касательной для окр. ω и (·) B: $BM \cdot BA = BD^2$ (BD – кас. к ω).

$(BA - MA)BA = BD^2$

№4 (пр)

$(2R-2r)\cdot 2R = 17^2 \Rightarrow (R-r)R = \left(\frac{17}{2}\right)^2$. (1)

AD – бис-са $\angle BAC$ (*) (известный факт, я докажу его потом) $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{BD} \Rightarrow AC = \frac{AB\cdot DC}{BD} =$

$= \frac{2R\cdot 8}{17} = \frac{16}{17}R$.

$\angle BCA = 90^\circ$ (т.к. опирается на диаметр AB) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ по Th Пифагора: $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$\left(\frac{16}{17}R\right)^2 + 25^2 = (2R)^2 \Leftrightarrow$ $\cancel{R^2\left(2-\frac{16}{17}\right) = 25^2}$

$\cancel{R^2 = \frac{25^2\cdot 17}{18} \Rightarrow R = 25\sqrt{\frac{17}{18}} =}$

$\cancel{= 25\sqrt{\frac{17}{2\cdot 9}} = \frac{25}{3}\sqrt{\frac{17}{2}}}$.

$\cancel{(1):\ (R-r)R = \left(\frac{17}{2}\right)^2 \Leftrightarrow R^2 - rR = \left(\frac{17}{2}\right)^2 \Rightarrow}$

$\cancel{r = \frac{R^2-\left(\frac{17}{2}\right)^2}{R} = \frac{\frac{25^2}{3}\cdot\frac{17}{2} - \left(\frac{17}{2}\right)^2}{25\sqrt{\frac{17}{18}}} = \frac{17}{12}\left(\frac{\frac{25^2}{3}-\frac{17}{2}}{25\sqrt{\frac{17}{18}}}\right) =}$

$R^2\left(4-\left(\frac{16}{17}\right)^2\right) = 25^2 \Rightarrow R^2 = \frac{25^2\cdot 17^2}{50\cdot 18} = \frac{25\cdot 17^2}{4\cdot 36} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{5\cdot 17}{6} = \frac{85}{6} = \boxed{14\frac{1}{6}}$

из (1) $\Rightarrow$, что $r = \frac{R^2-\left(\frac{17}{2}\right)^2}{R} = \frac{\left(\frac{5}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{17}{2}\right)^2}{\left(\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{17}{2}} =$

$= \frac{\frac{17}{2}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^2-1\right)}{\frac{5}{3}} = \frac{\frac{17}{2}\cdot\frac{16}{9}\cdot 3}{5} = \frac{272}{30} = \boxed{9\frac{1}{15}}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 1 0 4 9

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение на стр 9,10 - начало, 2 - середина)

EF - хорда $\perp$ диаметру $AB \Rightarrow EF$ делится AB напополам $\Rightarrow EK = KF$ ($K = EF \cap AB$) $\Rightarrow AK$ - бис-са и высота $\triangle EAF \Rightarrow \triangle EAF$ - равнобедр $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle FAK = \angle KAF = \alpha$ (AK - бис-са)

Площадь не найдена!

4

Ответ: $r = 9\frac{1}{15}$; $R = 14\frac{1}{6}$; $\angle EFA = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin((2\alpha + 2\beta) + 2\beta) =$

$= \sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos(2\alpha + 2\beta)$.

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 28. \end{cases}$ $x(y-1) - 2(y-1)$.

$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 4b^2 = 15. \end{cases}$ $3 \cdot 2$ $6(\sqrt{ab})^2$.

t^{1+x} $a^2 + 4b^2 + (6\sqrt{ab})^2 = 25 - 6(\sqrt{ab})^2$.

$t^{a+b} = t^a + t^b$ $(a + 3b)^2 = 25 - 6(a-2b)^2$.

$(a+3b)^2 + 6(a-2b)^2 = 25$. $a - 2b = \sqrt{ab}$. $a = \sqrt{ab} + 2b$.

$a^2 - 4ab + 4b^2 = ab$.

$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \quad | : b^2 | : 0$

$5 - a_1$

$4 - a_2$

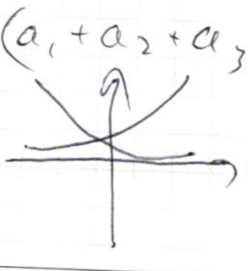
$3 - a_3$

$2 - a_4$

$1 - a_5$

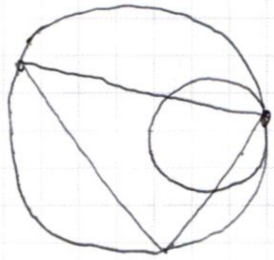
$0 - a_6$

$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)a_6 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)a_5 +$
$+ (a_1 + a_2 + a_3)a_4 + (a_1 + a_2)a_3 + a_1 \cdot a_2$



$\log_{12} x \nearrow$

$$\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25. \end{cases}$$



$24 = 8\cdot 3 = 3f(2)+f(3)$

$a, b \in Q$ и $a, b > 0$: $f(ab) = f(a)+f(b)$.

~~$f(\frac{x}{y}) f(y)$~~ =

$f(2^4) =$
$= f($

$f(x) = f(\frac{x}{y}) f(y)$.

~~$x \in P$~~ $x \in P$: $f(x) = f(\frac{x}{y}) f(y)$.

$x, y \in P$: $f(x) = f(\frac{x}{y}) f(y)$.

$[\frac{x}{4}] = f(\frac{x}{y}) [\frac{y}{4}]$
$0 \qquad 0$

$f(20) = 2f(2)+f(5)$
$f(5) = 0+1$
$f(10) \qquad f(3)+f(7) \qquad f(2)+f(11)$

$x, y \geq 4 \quad f(10) = f(2)+f(5) = 0+1$.

1	2,	3,	5,	7,	11,	13,	17,	19,	23.
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	0	0	1	1	2	3	4	4	5.

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) \to f(\frac{x}{y}) < 0 \iff f(x) > f(y)$

$f(a) = f(1)+f(a) \to f(1)=0$.

$f(18) = 0$
$f(2) + 2f(3)$

$4 = 2\cdot 2 \Rightarrow f(4) = f(2)+f(2) = 0$.

$6 = 2\cdot 3 \Rightarrow f(6) = f(2)+f(3) = 0$.

$8 \to f(4)+f(2) = 0$

$9 \to f(3)+f(3) = 0$

$10 \to f(2)+f(5) = 1$

$12 \to f(3)+f(4) = 0$

$14 \to f(2)+f(7) = 1$

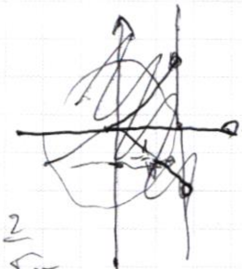
$15 \to f(3)+f(5) = 1$.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.



$\frac{2}{\sqrt{5}}$

$1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{4\beta}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$.

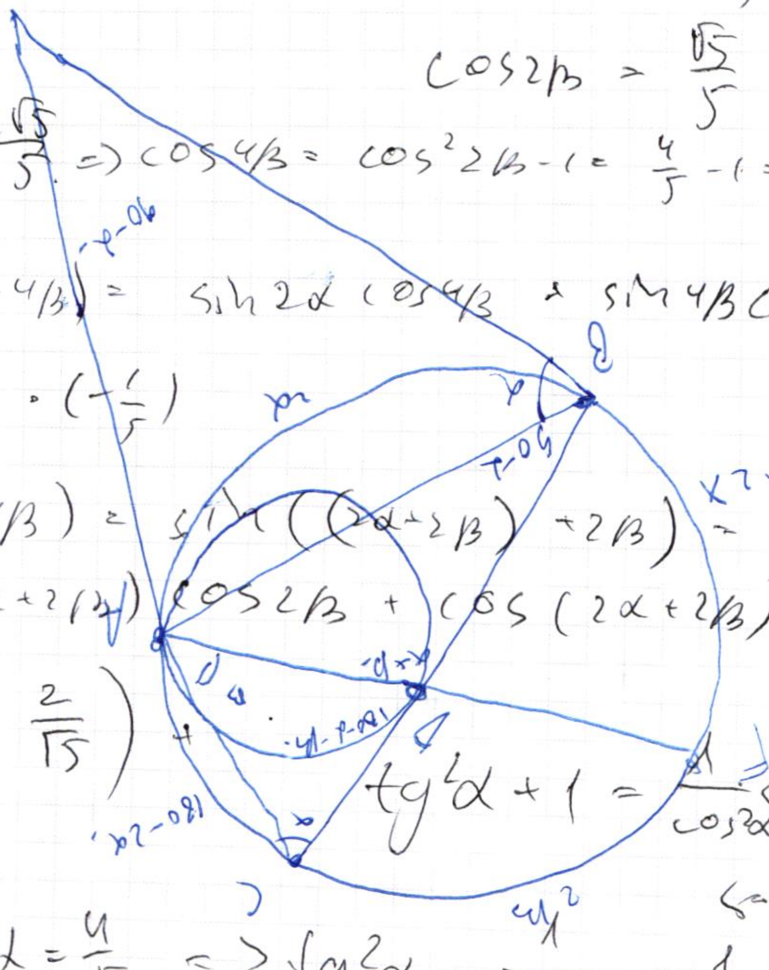
$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$.

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{4}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos 4\beta = \cos^2 2\beta - 1 = \frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$



$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) =$

$= \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{4}{5}-\sin 2\alpha$.

$\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\left[\begin{array}{l}\cos^2\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)} - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}. \\ \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)} - 1 = 5-1 = 4\end{array}\right.$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}.$

] $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$, тогда $2\alpha+2\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \cos 2\beta.$

$\cancel{\cos(2\alpha+2\beta)} = 2\alpha+2\beta = \pm 2\beta + 2\pi k.$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = 2\pi k \Rightarrow \alpha = \pi k \Rightarrow tg\alpha = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 2\pi k \Rightarrow \end{array}\right.$

$\sin(2\alpha+4\beta) = 0$

$\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$

$\cos^2\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$

$\cos^2\alpha = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$\frac{1+\frac{3}{5}}{2}$

$\frac{1-\frac{3}{5}}{2}$

$\log_{12} t$

$5 + t \geq 13^{\log_{12} t}$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$\log_{12} 13 = \log_{12} 12 \cdot$

$\log_{12}\frac{13}{12}.$

$\lg t^{\log_{12} 5} + t \geq \lg t + \lg t^{\log_{12}\frac{13}{12}}.$

$\sin(2\pi k - 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}.$ $\cos 2\beta$

$\sin(-2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}.$

$\sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5}.$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times 18 \\ \hline 144 \\ +18 \\ \hline 324 \end{array}$

$18^2 =$

$328 \mid 8$, -32, 8, 41

$\cos(2\alpha+2\beta) = -\cos(2\beta)$

$2\alpha+2\beta = \pi \pm 2\beta + 2\pi k.$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \pi + 2\pi k. \Rightarrow \\ 2\alpha + 4\beta = \pi + 2\pi k \Rightarrow \end{array}\right.$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow tg\alpha$ — не сущ.

$\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

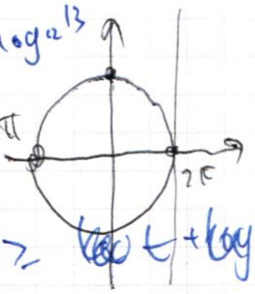
$\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$

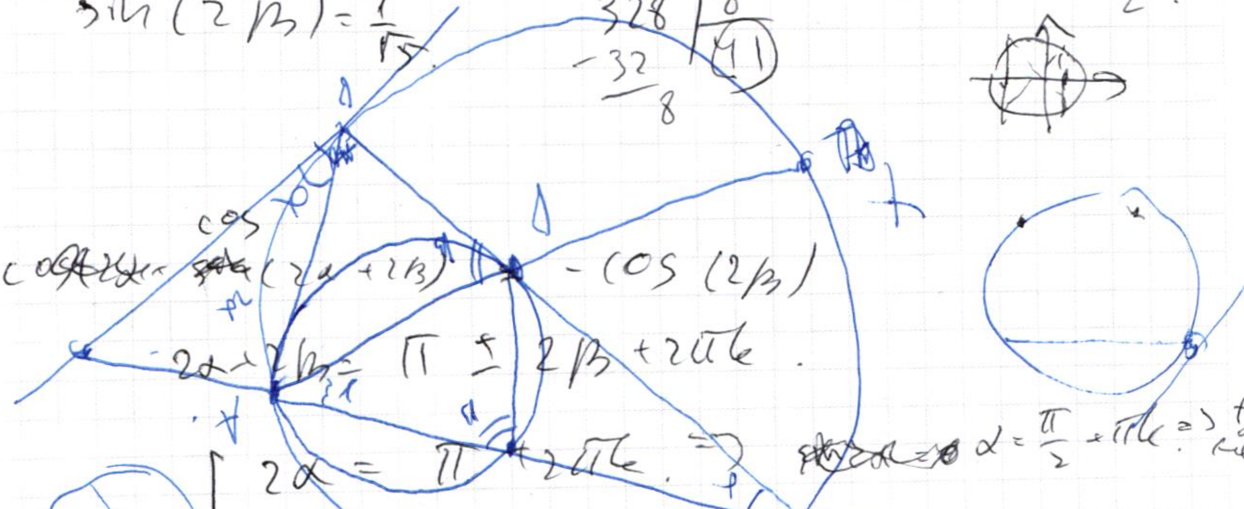
$\cos 2\alpha = \pm\frac{3}{5}.$

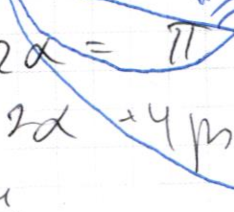
] $\cos 2\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow$

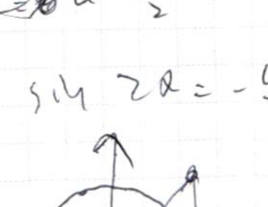
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$









☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$$

$$x-2y=\sqrt{\underbrace{(y-1)}_{b}\underbrace{(x-2)}_{a}}$$

$x=2+a$

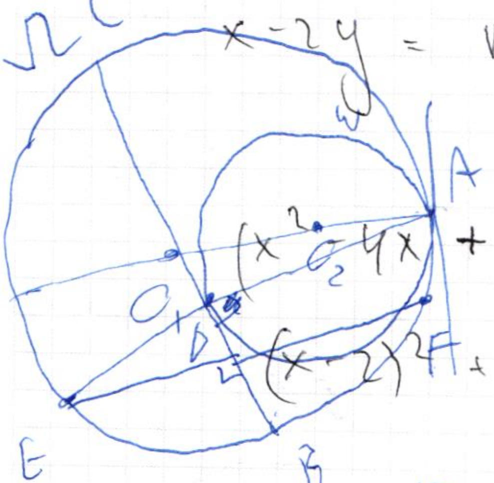
$y=b+1$

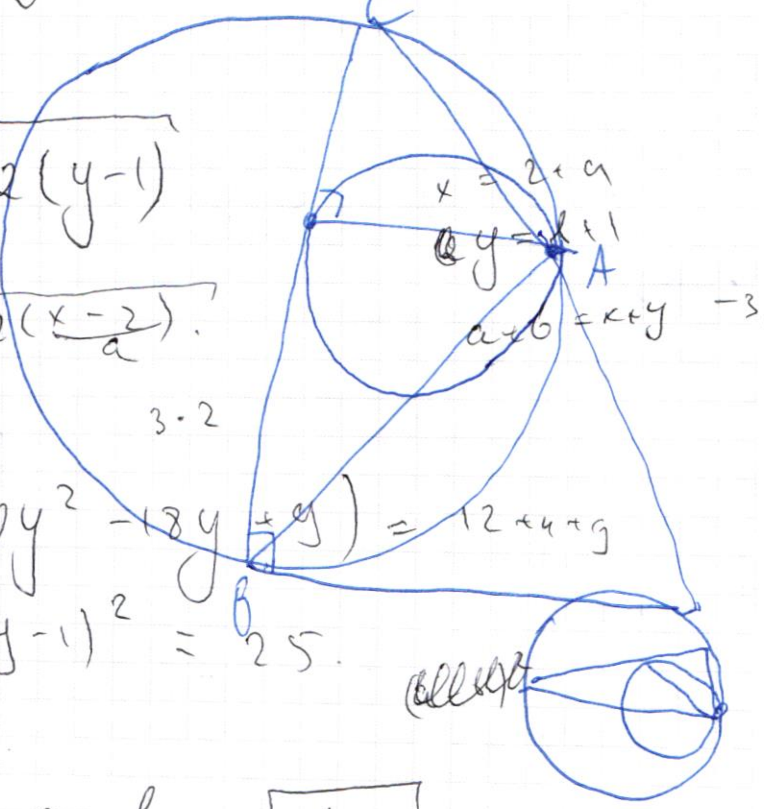
$a+b=x+y-3$

$3\cdot 2$

$$(x^2-4x+4)+(9y^2-18y+9)=12+4+9$$

$$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$$





$CD=3,\ BD=12.$

$$2+a-2(b+1)=a-b=\sqrt{ab}$$

$a-b\ge 0$

$\Rightarrow a\ge b.$

$\boxed{a\ge 2b}$

$$a^2+9b^2=25.$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 2b \\ (a-2b)^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} a\ge 2b \\ a^2+4b^2-4ab=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$b^2+ab-5=0.$$

$$5b^2=25-5ab$$

$$b^2=5-ab.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} a \geq 2b \\ (a-2b)^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 2b \\ a^2 + 4b^2 = 5ab \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$$

$x^2 + 12x = t$.

$5^{\log_{12} t} + t = 13^{\log_{12} t}$.

$-4 \geq -2$

$4 \leq 2$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$5b^2 = 25 - 5ab$

$b^2 = 5 - ab$.

$b^2 + ab - 5 = 0$

$13^{\log_{12} t}$ $D = a^2 + 20$

$b = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2+20}}{2}$.

$5^{\log_{12} t} + t = 13^{\log_{12} t}$.

$t^{\log_{12} 13} \cdot t^{\log_{12}\frac{13}{12} - 1}$ $t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$1 + \log_{12} 5 \cdot t^{\log_{12} 5 - 1}$ $\frac{1}{t}$.

$\log_{12} 5 - 1 < 0 \Rightarrow$

$\log_{12} 5 - 1 < t$.

$\Rightarrow t^{\log_{12} 5 - 1}$

$\cancel{a - 2b = \sqrt{ab}}$

$a^2 + a^2 + 20 + 2a\sqrt{a^2+20}$

$\log_{12} 5 \vee 1$

$1 + t$.

$t(t^{\log_{12} 5 - 1} - 1)$ $a^2 + 9b^2 = 25$.

$b = \dfrac{-a - \sqrt{a^2+20}}{2}$ $a^2 + 9\dfrac{(a + \sqrt{a^2+20})^2}{4} = 25$.

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$. $a^2 + 9\dfrac{2a^2 + 20 + 2a\sqrt{a^2+20}}{4\ 2} = 25$.

$t^{\log_{12} 12}$

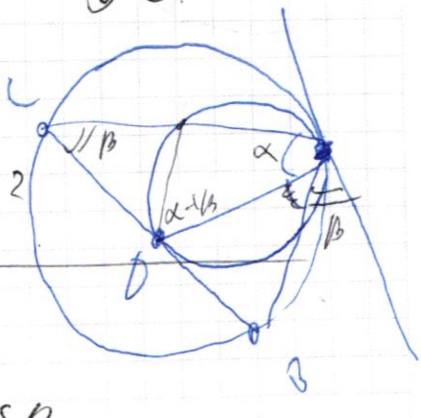
$2a^2 + 9\dfrac{a^2 + a\sqrt{a^2+20} + 10}{a} = 50$.

$12^{\log_{12} t}$

$11a^2 + 9a\sqrt{a^2+20} + 40 = 0$.

$9a\sqrt{a^2+20} = -40 - 11a^2$.

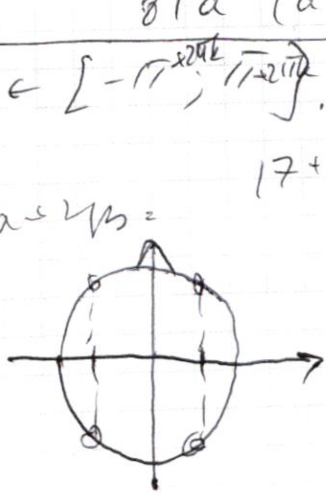
$81a^2(a^2+20) = (40 + 11a^2)^2$



$2\alpha + 2\beta \in [-17^{+24k}; 17 + 2\pi k]$.

$17 + 16$ $\cos(\alpha) = \pm \cos\beta$.

$2\alpha + 2\beta =$



$\sqrt{\frac{25}{10}} = \sqrt{\ } \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} =$

17 $\frac{22}{33} = \frac{2}{3}$ $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$