МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

20004027

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$-\frac{2}{17}=\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\cdot\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{=-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos 2\beta$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2}{17}=\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta \Longrightarrow \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\cos 2\beta}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$ +1

$$-\frac{2}{17}=\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)+\sin 2\alpha=\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta+$$

$$+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta+\sin 2\alpha \quad (*)$$

$$\cos(2\alpha+2\beta)=\pm\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\Downarrow$$

$$(*):\ -\frac{2}{17}=-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\sin 2\alpha$$

$$-\frac{2}{17}=-\frac{1}{17}\pm\frac{16}{17}+\sin 2\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha=-\frac{1}{17}\pm\frac{16}{17}$$

$$\left[\begin{aligned}&\sin 2\alpha=\frac{15}{17}\\&\sin 2\alpha=1\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\pm 1$, но это не подх.

т.к. $\sin(2\alpha+2\beta)=\overset{1}{\sin 2\alpha}\cdot\overset{\frac{1}{\sqrt{17}}}{\cos 2\beta}\pm\sin 2\beta\cdot\overset{0}{\cos 2\alpha}=\frac{1}{\sqrt{17}}\neq-\frac{1}{\sqrt{17}}$ не подход. усл. $\Rightarrow$ этот вар. невозм.

$\sin 2\alpha=\frac{15}{17}\Rightarrow$ из 1 рав-ва:

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{15}{17}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\pm 4\cos 2\alpha=-1-\frac{15}{17}=-\frac{32}{17}\Rightarrow \cos 2\alpha=\pm\frac{8}{17}\Rightarrow 2\cos^2\alpha-1=\pm\frac{8}{17}$$

$$2\cos^2\alpha = 1 \pm \frac{8}{17} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos^2\alpha = \frac{25}{17} \\ 2\cos^2\alpha = \frac{9}{17} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{34}} \\ \cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{34}} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{25}{34}} = \pm\frac{3}{\sqrt{34}} \\ \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{34}} = \pm\frac{5}{\sqrt{34}} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{3}{5} \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Это всевозм знач. tgα необходимо провести проверку: посмотреть из каких sinα и cosα это получ и подставить. Но т.к. его усл. знач. ≥ 3, то только есть либо $\frac{5}{3}$, либо $-\frac{5}{3}$, но т.к. они зависят только от измен. знака cosα, котор. мы получили извлечая квадрат => условие выполняется точно => подходят оба ан-но подх $\pm\frac{3}{5}$

не все
и лишнее
1+0+0=1

Ответ: $\left\{\pm\frac{3}{5};\ \cancel{\pm\frac{5}{3}}\right\}$.

№2 $\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} & (2) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (1) \end{cases}$

(1): $(3x)^2-2\cdot3x\cdot3+3^2+y^2-2\cdot y\cdot6+(6)^2=0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\underbrace{(3x-3)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y-6)^2}_{\geq 0} = 6$ 2у6

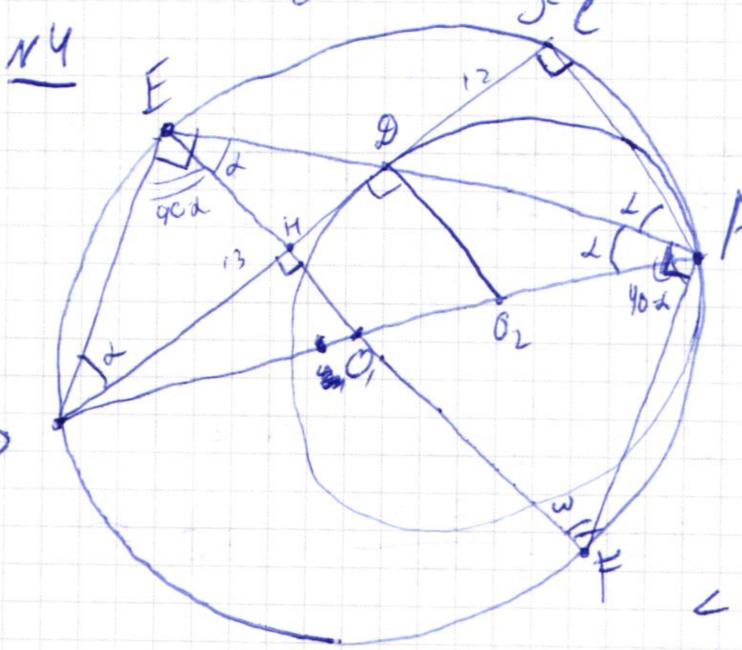
$\Rightarrow$ рав-во когда обе $=0$.

$\Rightarrow x=1 \quad y=6.$ проверим в (2):

$6-6\cdot 1 = \sqrt{1\cdot 6 - 6\cdot 1 - 6+6} \Rightarrow 0=0$ подх.

Ответ: $\{(1;6)\}$.

№4



1) O_1 - центр Ω
O_2 - центр ω

По лемме Архимеда AD - биссa во $ABC \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAE = \angle CAE = \alpha$
$\angle EBC = \angle EAC = \alpha$ (опир на одну дугу)
$\angle BEA = 90^\circ$ (опир. на диам AB)

$EF \cap BD = (\cdot)H$; $\angle BEH = 90-\alpha$; $\angle HED = \alpha$

$\angle BAF = \angle BEF = 90-\alpha$ т.к. опир на BF

$\Rightarrow \angle EAF = \alpha + 90-\alpha = 90^\circ \Rightarrow EF$ - диам $\Rightarrow$

$\Rightarrow EF \cap AB = (\cdot)O_1$ - центр Ω.; $\angle AFE = 90-\angle FEA = 90-\alpha$

2) $\exists\, d_1$ - диам. Ω
d_2 - диам ω.

т.к. BD - касат к ω, то $O_2D \perp BD$

$O_1H \perp BC$, т.к. O_1H это $\perp$ к хорде из ц. окр =>

=> O_1H делит BC пополам => $BH = HC = BC/2 =$

$= \frac{BD+CD}{2} = 12{,}5$

$\triangle BO_1H$: ($\angle H = 90°$): $BO_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{BH}{\sin\angle BO_1H}$

$\angle BO_1H = \angle BO_2D = \angle BAC = 2\alpha$, т.к. $O_1H \parallel O_2D \parallel AC$, т.к.

$O_1H \perp BC$; $O_2D \perp BC$; $AC \perp BC$.

=> $\frac{d_1}{2} = \frac{12{,}5}{\sin 2\alpha}$

$\triangle BO_2D$: ($\angle D = 90°$): $DO_2 = \frac{d_2}{2} = BD \cdot ctg\angle BO_2D =$

$= 13 \cdot ctg\ 2\alpha$.

из этого-же $\triangle$: $BO_2 = \frac{BD}{\sin 2\alpha}$ => $d_1 - \frac{d_2}{2} = \frac{13}{\sin 2\alpha} =$

=> $\frac{25}{\sin 2\alpha} - \frac{13\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{13}{\sin 2\alpha}$ => $13\cos 2\alpha = 12$ =>

=> $\cos 2\alpha = \frac{12}{13}$ => $\sin 2\alpha = \frac{5}{13}$; т.к. $0 < 2\alpha < 180°$ => $\sin > 0$.

=> $r_1 = \frac{d_1}{2} = \frac{12{,}5}{\frac{5}{13}} = \frac{13 \cdot 12{,}5}{5} = \frac{13 \cdot 25}{10} = 32{,}5$

$r_2 = \frac{d_2}{2} = 13 \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{5} = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{24 \cdot 13}{10} = 31{,}2$

$\cos 2\alpha > 0$ => $0 < 2\alpha < 90°$ => $0 < \alpha < 90°$ => $\cos\alpha > 0$

=> $2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha = \frac{12}{13}$ => $2\cos^2\alpha = \frac{25}{13 \cdot 2 \cdot 26}$

=> $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$ => $\angle AFE = 90 - \alpha$ => $\sin\angle AFE = \sin(90-\alpha) =$

$= \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$ => $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 4 0 2 7

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \underset{d_1}{EF} \cdot \underset{d_1 \cdot \cos 2\alpha}{AE} \cdot \sin\angle FEA = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_1 \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha =$

$= \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 \sin 2\alpha = \left(\frac{13\cdot 25}{10}\right)^2 \cdot \frac{5}{13} = \frac{13^2 \cdot 5^2}{2^2} \cdot \frac{5}{13} = \frac{13 \cdot 5^3}{2^2} =$

$= \frac{13 \cdot 125}{4} = 406{,}25$

Ответ: $r_1 = 32{,}5$; $r_2 = 31{,}2$

$\angle AFE = \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}}$

$S_{\triangle AEF} = 406{,}25.$

N5

$f(y) = f\left(\frac{1}{y} \cdot y^2\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(\overset{y \cdot y}{y^2}) = f\left(\frac{1}{y}\right) + 2f(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y) - 2f(y) = -f(y)$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$\Rightarrow f(x) < f(y)$

~~Если~~ Если $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, то $f(x) = \alpha_1 f(p_1) + \ldots + \alpha_k f(p_k)$

$f(2) = 0$ $f(5) = 1$ $f(11) = 2$ $f(17) = 4$ $f(23) = 5.$

$f(3) = 0$ $f(7) = 1$ $f(13) = 3$ $f(19) = 4$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5
(Нумеровать только чистовики)

Начинаем перебор.

$x=4 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow y=5,7,10,11,13,14,15,17,19,20,21,22,23,25,26,28$

Заметим, что если $y=2^k \cdot 3^m$, то

тогда $f(y)=0$, т.к. $f(y)=k f(2)+m f(3)=0$.

$\Rightarrow$ когда $x=2^k \cdot 3^m$, то м.б. 16 вар. для y.

а x таких: 2, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27

т.е. 9 x-ов $\Rightarrow$ уже $16 \times 9 =$ ~~160~~ ~~пар.~~
144 пары.

$x=5$, $x=7$, $x=15$, $x=10$, $x=20$, ~~$x=25$~~, $x=14$, $x=21$, $x=28$

$\Rightarrow f(x)=1$, т.к. это $x=p\cdot 2^k \cdot 3^m$ $p=\frac{5}{7} \Rightarrow f(x)=1$.

$\Rightarrow$ подх все y : $f(y) \geq 2$.

y: 11, 13, 17, 19, 22, 23, 25, 26

$\Rightarrow$ ещё 8×8 пар $=$ ~~72~~ 64

уже: $144+$ ~~72~~ 64 $=$ ~~216~~ ~~пар.~~ 208 пар

остались $x=11, 13, 17, 19, 22, 23, 25, 26$.

$f(11)=2$ и $f(22)=2 \Rightarrow$ подх y из этих x ~~которые~~ $f(y)\geq 2 \Rightarrow$ все кроме $x=11$ и 22

ет $f(25)=2$

$\Rightarrow$ ещё $2\times 6 = 12$ пар

$\Sigma = 220$ пар

3,5

$f(13)=3$; $f(26)=3 \Rightarrow$ подх все y из этих x неравные 11, 22, 13, 26

$\Rightarrow$ ещё $2\times 4 = 8$ пар $\Rightarrow \Sigma = 228$ пар

$f(17)=4$; $f(19)=4 \Rightarrow$ подх $y=23,25 \Rightarrow$ ещё 4 пар $\Rightarrow \Sigma = 232$ пары

$x=23,25$ нет пар $\Rightarrow$ Ответ: 232 пары.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 4 0 2 7

(заполняется секретарём)

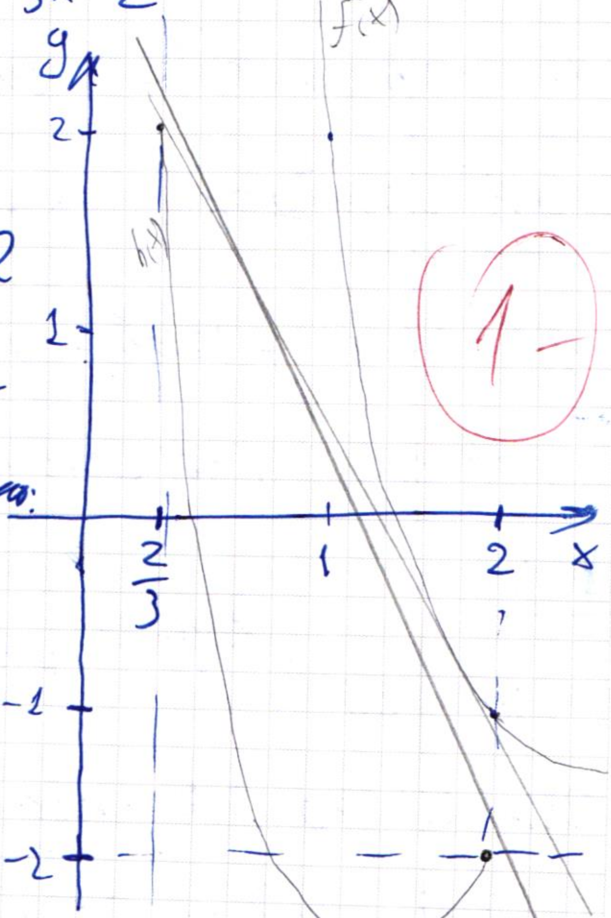
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\underbrace{\frac{8-6x}{3x-2}}_{f(x)} \overset{(1)}{\geq} \underbrace{ax+b}_{g(x)} \overset{(2)}{\geq} \underbrace{18x^2-51x+28}_{h(x)}$$

$f(2)=-1$

$$f(x)=\frac{-2(3x-2)+4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}$$



$h(x)$: $x_0=\frac{51}{36}\in\left(\frac{2}{3};2\right]$

$$h\left(\frac{2}{3}\right)=18\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-51\cdot\frac{2}{3}+28=2$$

$$h(2)=18\cdot 2^2-51\cdot 2+28=-2$$

чтобы выполн. (2) достаточно:

$$\begin{cases} g(2)\geq -2 \\ g\left(\frac{2}{3}\right)\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b\geq -2 \\ \frac{2a}{3}+b\geq 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+b+2\geq 0 \\ 2a+3b-6\geq 0 \end{cases}$$

Для выполн. (1) необх., чтобы $g(x)\downarrow$ так же как $f(x)$, иначе она не м.б. ниже, либо если $\nearrow$ то $g(2)\leq -1 \Rightarrow g\left(\frac{2}{3}\right)\leq -1$, но $g\left(\frac{2}{3}\right)\geq 2$!!! $\Rightarrow \boxed{a<0}$

1−

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7
(Нумеровать только чистовики)

нам подх. сит, когда прямая кас. гиперб. или полностью ниже. $\Rightarrow$

$f(x)=g(x) \to$ имеет ≤ 1 корня

$\Rightarrow -2+\frac{4}{3x-2} = ax+b / (x+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\cdot(3x-2)+4 = a(3x-2)x + b(3x-2)$

$-6x+4+4 = 3ax^2-2ax+3bx-2b$

$3ax^2+(3b-2a+6)x-2b-8=0$

$D=(3b-2a+6)^2+4\cdot 3a(2b+8)=$

$=9b^2+4a^2+36-12ab+36b-24a+24ab+96a=$

$=9b^2+4a^2+12ab+72a+36b+36=$

$=(3b+2a)^2+36(2a+b+1) \leq 0$

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2>0$, т.к. под $\log_5 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x^2-26x| = 26x-x^2$

$t=26x-x^2$, $t>0$, $t\leq 13^2$, т.к. $x_0=13$ $26x-x^2\leq 13^2$

$t^{\log_5 12}+t-13^{\log_5 t} \geq 0 \Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

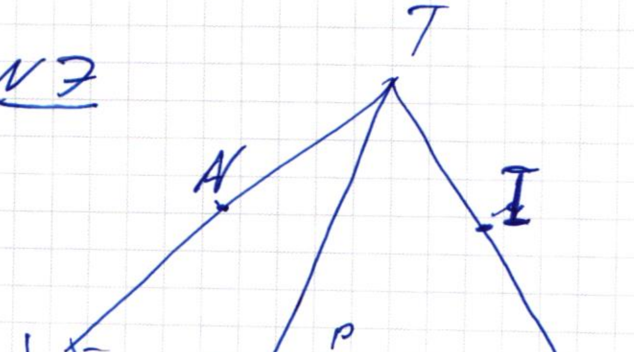
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow t^{\log_5 12} + t - t^{\log_5 13} \geq 0 \;\; |: t>0$

$t^{\log_5 12 - 1} + 1 - t^{\log_5 13 - 1} \geq 0.$

$t^{\log_5\left(\frac{12}{5}\right)} + 1 - t^{\log_5\left(\frac{13}{5}\right)} \geq 0.$

№7

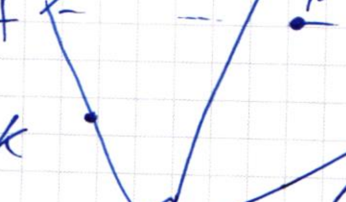


~~Поскольку Y, K, A, N, P, X на одной сфере~~, т.к. Y, K, P, N —

по усл Y, K, P, A, I, N — на одной сфере ⇒

⇒ Y, K, P, A — на одной окр.

⇒



$\left.\begin{array}{l}\angle Y=\alpha \\ \angle X=\beta \\ \angle Z=\gamma\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}\angle KPX=\gamma \\ \angle APZ=\beta\end{array} \Rightarrow \angle KPA=\alpha$

$\Rightarrow$ т.к. вписан $\angle KPA + \angle KYA = 2\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 90$

$\boxed{\alpha = 90^\circ} = \angle XYZ$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$x(y-6)-(y-6)=(x-1)(y-6)$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9x^2-2\cdot 3x\cdot 3+9+y^2-2\cdot y\cdot 6+36=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ \underbrace{9(x-1)^2}_{\geq 0}+\underbrace{(y-6)^2}_{\geq 0}=0. \end{cases}$$

рав-во: $x=1$
$y=6.$

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$x_0 = \frac{26}{-2} = \frac{26}{2} = 13$

$26\cdot\frac{13}{2}-\frac{169}{4}=$

$t = 26x - x^2$

$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} + t \geq 1$

$|t|^{\log_5 12} \geq t + 13^{\log_5 -t}$

$\frac{4\cdot 169}{4}-\frac{169}{4}=$

$=\frac{3\cdot 169}{4}$

$|t|^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$12^{\log_5 t} = t^{\log_5 12}$ $t>0$

$2\cdot 13^2-13^2=13^2$

$t>0.$

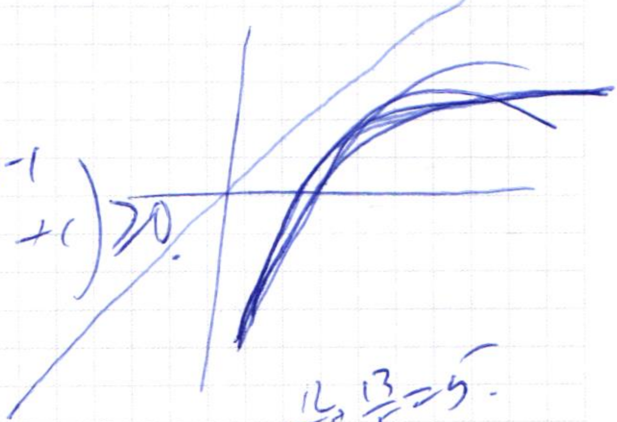
$t \geq 10.$

$t^{\log_5 12} + t - 13^{\log_5 t} \geq 0.$

$\alpha - 1 = \log_5 \frac{12}{25}.$

$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} + t^{\log_5 5} \geq 0.$

$t(\cancel{\log} t^{\log_5 12-1} - t^{\log_5 13 - 1} + 1) \geq 0.$



$\frac{12}{5}, \frac{13}{5} = 5.$

$t(t^{\alpha = \log_5 \frac{12}{5}} - t^{\beta = \log_5 \frac{13}{5}} + 1) \geq 0.$

$t^{\alpha} - t^{\beta} + 1 \geq 0.$

$\alpha + \beta = \log_5 \frac{12\cdot 13}{5\cdot 5}$

$x^{\alpha} - t^{\beta} \geq -1$

$\boxed{5^{\alpha} - 5^{\beta} = \frac{-1}{5}}$

$t^{\beta} - t^{\alpha} \leq 1$

$f' = \alpha t^{\alpha-1} - \beta t^{\beta-1} \vee 0.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

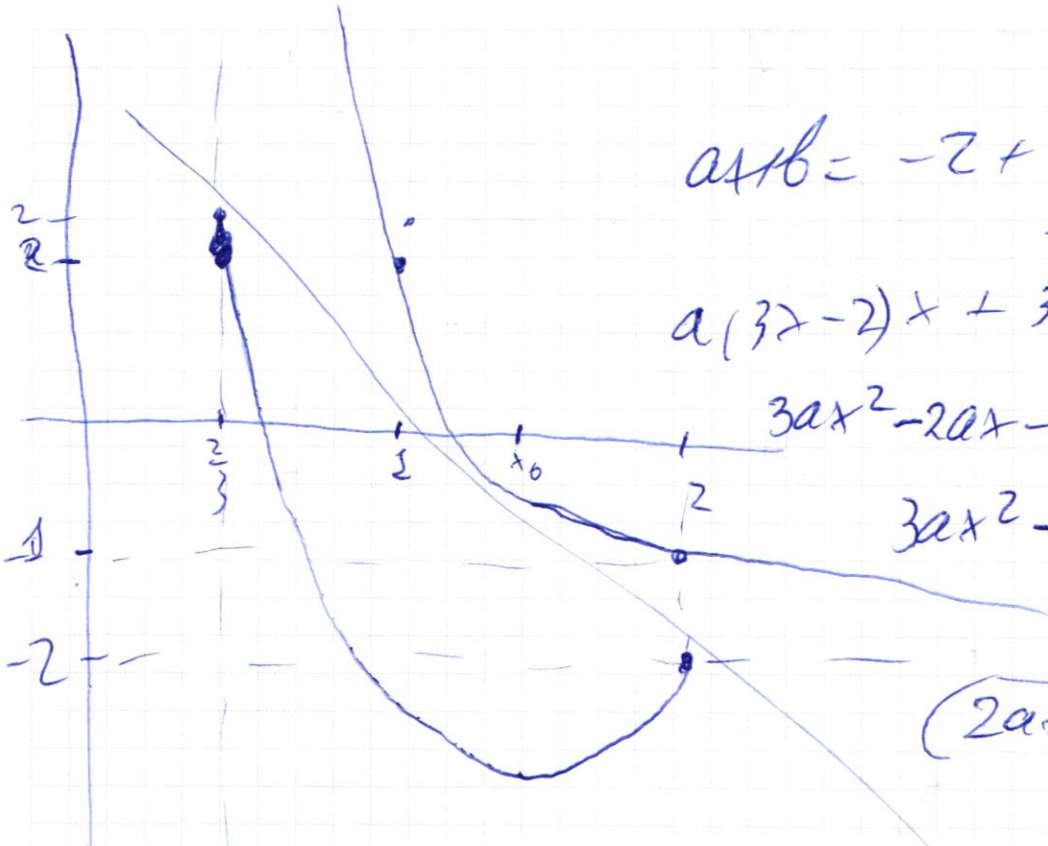
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 4 0 2 7

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$a+b=-2+\frac{4}{3x-2} \quad / \cdot (3x-2)$$

$$a(3x-2)x+3bx-2b=-6x+4+4$$

$$3ax^2-2ax-3bx+6x-2b-8=0$$

$$3ax^2-(2a+3b-6)x-2b-8=0.$$

$$D\le 0.$$

$$(2a+3b-6)^2+4\cdot 3a\cdot(2b+8)=$$

$$=4a^2+9b^2-36+12ab-24a-36b+24ab+96a-$$

$$=4a^2+9b^2+36ab-36-36b+72a\le 0.$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a+b\ge 2 \Rightarrow 2a+3b\ge 6. \\ 2a+b\ge -2 \\ x_0=\frac{\overset{\ge 0.}{2a+3b-6}}{6a}<0. \end{cases}$$

$a<0.$

$f(\frac{2}{3})\cdot f(2)>0$

$f(x_0)$

$x_0<1 \rightarrow f(x_0)\ge 0.$

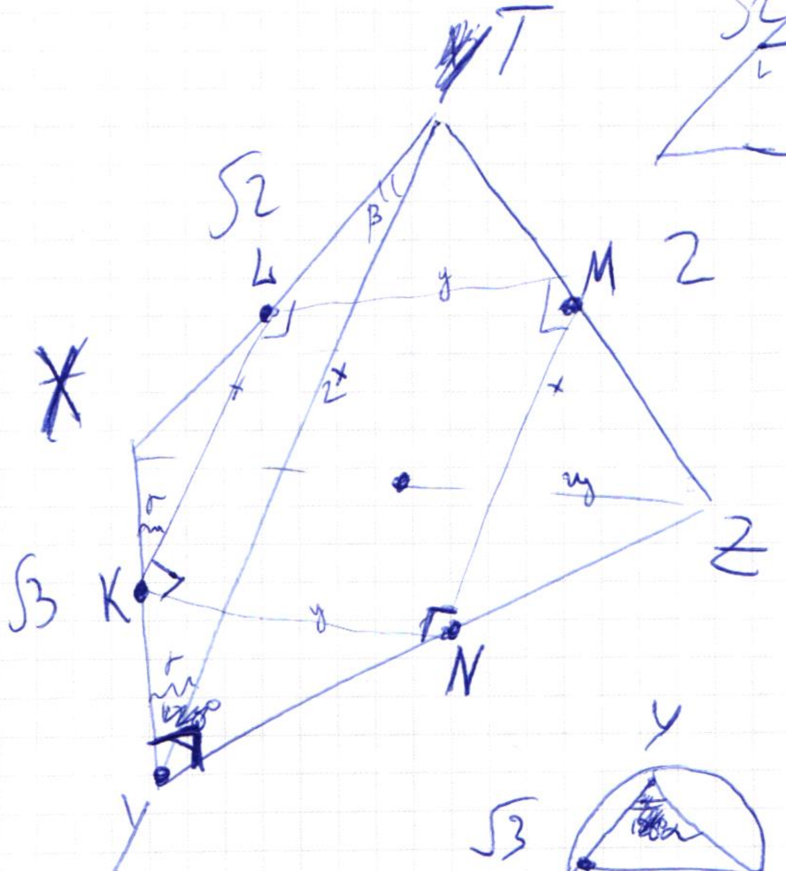
x_0

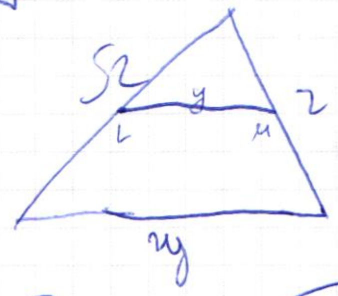
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

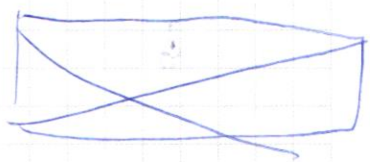
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

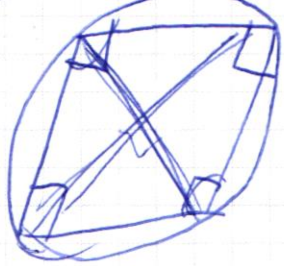
$$\underbrace{3+4+5+3}_{20}+\underbrace{5+5+6}_{30}=\boxed{33}$$

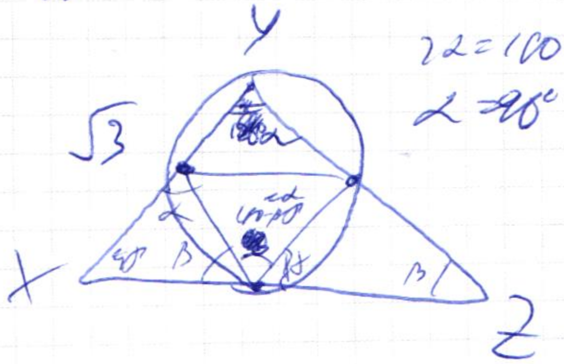
$\sim\boxed{22}$

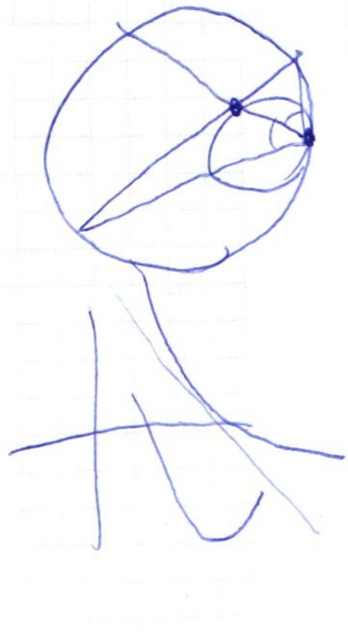












☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

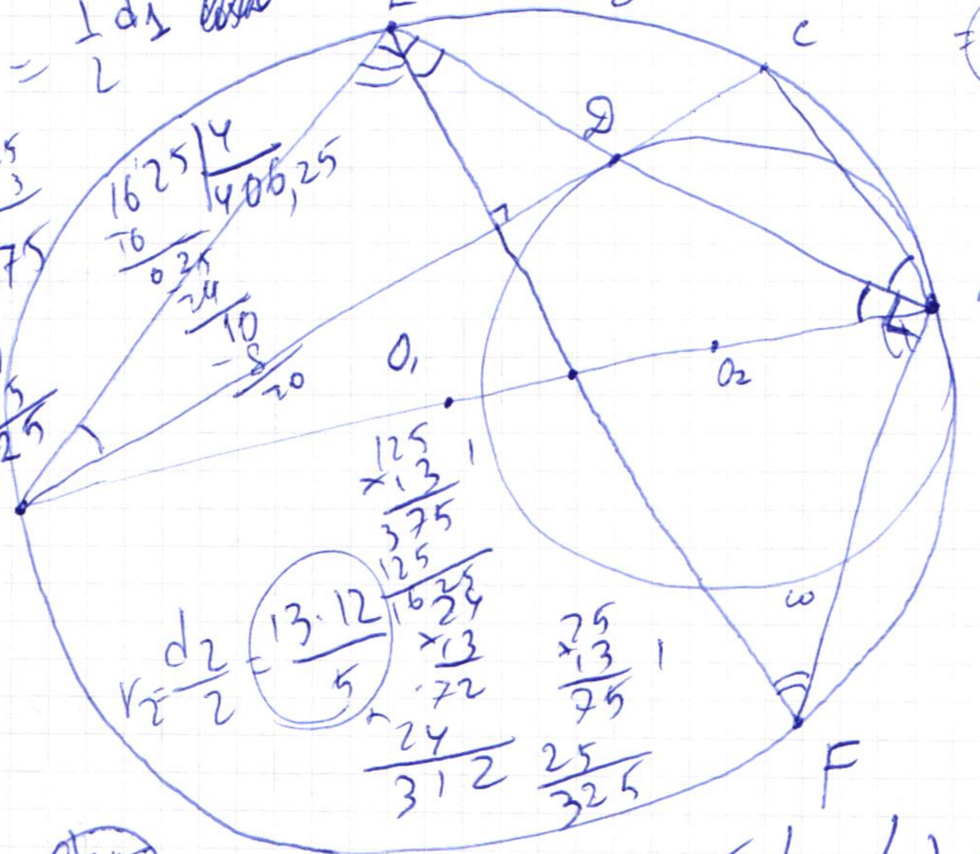
2 0 0 0 4 0 2 7

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S=\frac{1}{2}AE\cdot EF\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1\cdot d_1\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{4}d_1^2\sin 2\alpha = \frac{1}{4}\left(\frac{d_1}{2}\right)^2\cdot\sin 2\alpha = \left(\frac{13{,}5-13}{5}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{5}{13}$

$=\frac{12{,}5^2\cdot 13}{5}$



$\cos\alpha=\frac{5}{\sqrt{26}}$

$\cos^2\alpha=\frac{25}{26}$

$2\cos^2\alpha=\frac{25}{13}$

$2\cos^2\alpha-1=\frac{12}{13}$

$\frac{d_2}{2}=13\cdot ctg\alpha$

$d_2=26\cdot ctg 2\alpha$

$r_2=\frac{d_2}{2}=\frac{13\cdot 12}{5}$

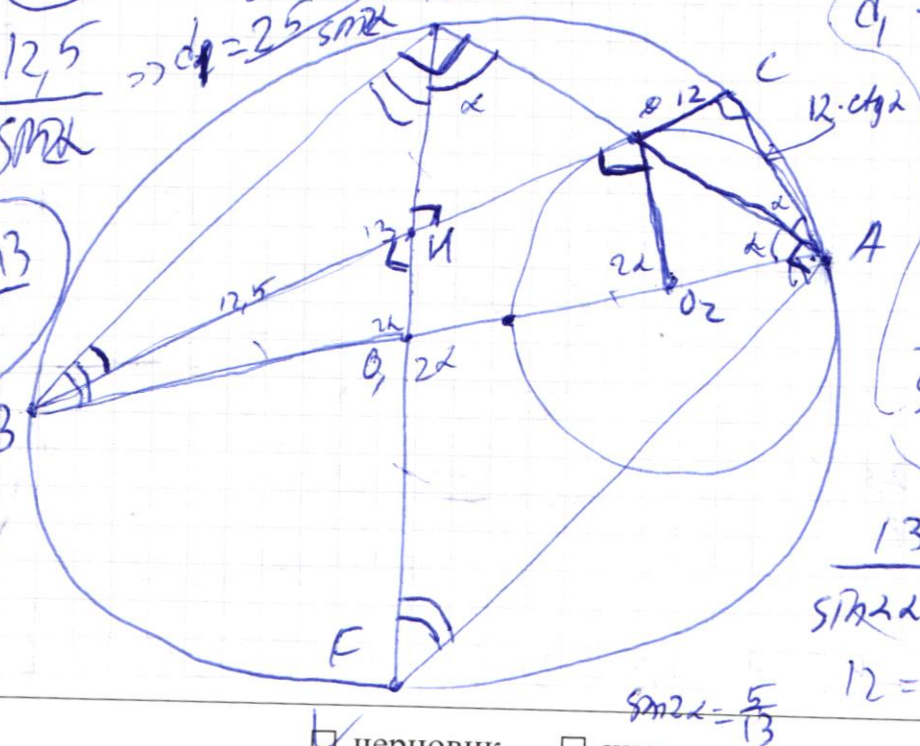
$(d_1-d_2)d_1=13^2$

$d_1^2-d_1d_2=169$

$\frac{d_1}{2}=\frac{12{,}5}{\sin 2\alpha} \Rightarrow d_1=\frac{25}{\sin 2\alpha}$

$\frac{25}{2}=12{,}5$

$r_1=\frac{d_1}{2}=\frac{12{,}5\cdot 13}{5}$



$\frac{12\cdot ctg 2\alpha}{\cos 2\alpha}=d_1$ $\quad ctg=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\frac{13}{\sin 2\alpha}=d_1-\frac{d_2}{2}$

$\frac{13}{\sin 2\alpha}=\frac{25}{\sin 2\alpha}-\frac{13\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$12=13\cos 2\alpha \quad \cos 2\alpha=\frac{12}{13}$

$\sin 2\alpha=\frac{5}{13}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$ $f(28)=0$

$f(3)=0$ $f(7)=1$ $f(13)=3$

$4\le x\le 28$ $f(5)=1$ $f(11)=2$ $f(17)=4$

$4\le y\le 28$ $f(19)=4$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ $f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ $f(23)=5$

$f(x)<f(y)$

$f(x)=f\left(3\cdot\frac{x}{3}\right)=f(3)+f\left(\frac{x}{3}\right)=f\left(\frac{x}{3}\right)=$

$=f\left(\frac{x}{9}\cdot 3\right)=f\left(\frac{x}{9}\right)\ldots=f\left(\frac{x}{3^n}\right)=\ldots=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$

$f(y)=f\left(\frac{1}{y}\cdot y^2\right)=f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y^2)=f\left(\frac{1}{y}\right)+2f(y)$

$18\cdot 4-51\cdot 2+28=$
$=72-102+28=-2$

$18\cdot\frac{4}{9}-51\cdot\frac{2}{3}+28=$
$=8-34+28=$
$=2$

$\frac{8-6x}{3x-2}\ge ax+b\ge 18x^2-51x+28$

$x=\frac{2}{3}$

$\frac{2(2-3x)+4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}$

$f(x)$

$18x^2-51x+28$

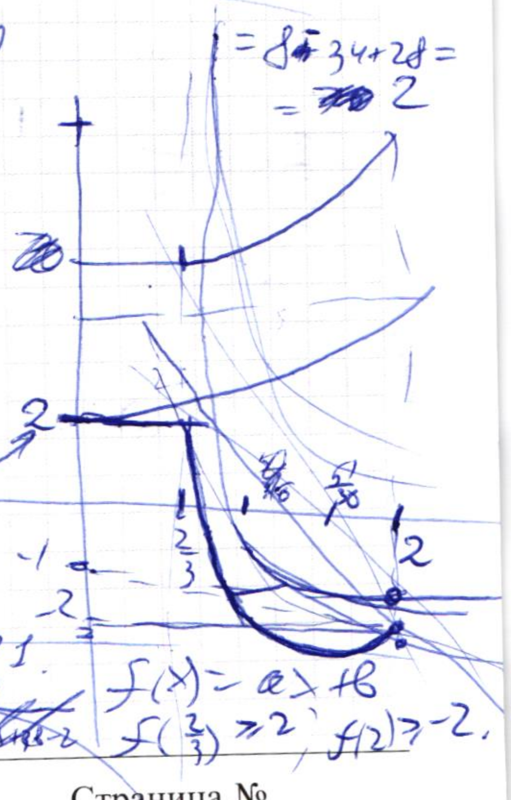
$x^2-\frac{51}{18}x+\frac{28}{18}=0$ $x_0=\frac{51}{2\cdot 18}=\frac{51}{36}$

$51=3\cdot 17$

$\frac{1}{18}\cdot 28$

$D=51^2-4\cdot 18\cdot 28=2601-2016=585$

$g(x)\cap$



$f(x)=ax+b$

$f\left(\frac{2}{3}\right)\ge 2$, $f(2)\ge -2$.

$\checkmark$ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\beta\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$|\cos(2\alpha+2\beta)| = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta =$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta$ $\quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin x + \sin y.$ $\quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$+\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

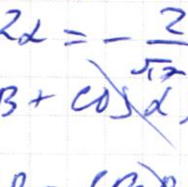
$x = \alpha+\beta \quad y = \alpha-\beta$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = +\frac{\sqrt{17}}{17}$



$2\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad \alpha = \frac{\pi}{4}$

$2\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$

$\alpha = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2} \to tg\alpha = \pm 1$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}}$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm \frac{\cos 2\alpha \cdot 4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1 = -\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha \; / \cos 2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha \pm 4 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha = \sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha \ldots$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq (26x-x^2)^{\log_5 13}$$

$$t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13} \geq 0. \quad / : t^{\log_5 12}$$

$x(26-x)$

$\leq 13^2 \qquad 0 < t \leq 13^2$

$$5^{\log_5 12}=12$$

$$\log_5 5^{\log_5 12}=\log_5 12$$

$0.$

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{8}-\frac{1}{13}$$

~~$2+\frac{1}{t^{\log_5 12}} - t^{\log_5 \frac{13}{12}} \geq 0$~~

~~$\leq t^{\log_5}$~~

4 $\quad x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_k^{\alpha_k} \qquad f(x)=\alpha_1 f(p_1)+\dots+\alpha_k f(p_k)$

$y=q_1^{\beta_1}\cdot q_2^{\beta_2}\cdot\dots\cdot q_m^{\beta_m} \qquad f(y)=\beta_1 f(q_1)+\dots+\beta_k f(q_k)$

$f(\frac{1}{y})=-f(y)$

$f(xy)=f(x)-f(y)<0.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)