МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР 20001434

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$.

$f(a\cdot 1) = f(a) + f(1)$. $f(a^2) = 2f(a)$,

$0 = f(1)$

5

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\ldots x_n) = f(x_1\cdot x_2\cdot\ldots x_{n-1}) + f(x_n) = \ldots$

$\ldots = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \ldots\ldots f(x_n)$.

тогда это любого натур. x мы можем выразить $f(x)$ через простые делители x.

$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(11)=2$, $f(13)=3$,

$f(17)=4$, $f(19)=4$, $f(23)=5$.

$f(a\cdot\frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a})$

$0 = f(a) + f(\frac{1}{a})$

$f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

Тогда нам подходят такие x и y, что $f(x) < f(y)$ $1 \le x, y \le 24$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(4)=0$, $f(5)=1$, $f(6)=0$, $f(7)=1$,

$f(8)=0$, $f(9)=0$, $f(10)=1$, $f(11)=2$, $f(12)=0$, $f(13)=3$, $f(14)=$
$=1$, $f(15)=1$, $f(16)=0$, $f(17)=4$, $f(18)=0$, $f(19)=4$, $f(20)=1$, $f(21)=1$,
$f(22)=2$, $f(23)=5$, $f(24)=0$

Таким образом, у нас есть 6 групп значений функции от 0 до 5.

0 : 11 чисел

1 : 7 чисел

2 : 2 числа

3 : 1 число

4 : 2 числа

5 : 1 число

Тогда если $f(y)$ относится к одной из групп, то $f(x)$ должно быть групп в одной из групп выше.

Кол-во пар $= \underset{f(y)=5}{1} \cdot (2+1+2+7+11) + \underset{f(y)=4}{2} \cdot (1+2+7+11) +$

$\underset{f(y)=3}{1} \cdot (2+7+11) + \underset{f(y)=2}{2} \cdot (7+11) + \underset{f(y)=1}{7} \cdot 11 = 23 + 42 + 20 + 36 + 77 =$

$= 198$

Ответ: 198

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 1 4 3 4
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

~~$x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}$~~ $\begin{cases} x-2y \geq 0 \\ xy-x-2y+2 \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = xy-x-2y+2 & (1) \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 & (2) \end{cases}$$

4

(1) $x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2$

$x^2 - x\cdot(5y-1)+4y^2+2y-2=0$

Решим это ур-ие, ~~с~~ с y как параметр.

$D = (5y-1)^2 - 16y^2-8y+8 = 9y^2-18y+9 = 9(y-1)^2$

$x = \dfrac{5y-1 \pm 3(y-1)}{2}$ $\begin{cases} 4y-2 \\ y+1 \end{cases}$

подставим в (2)

~~$(y-1)^2+9(y-1)^2=25$~~ 1. $x=y+1$

$(y-1)^2+9(y-1)^2=25$

$(y-1)^2 = 2,5$

$y-1 = \pm\sqrt{2,5}$

$y = \pm\sqrt{2,5}+1$

$\Downarrow$

$x = \pm\sqrt{2,5}+2$

$y = \sqrt{2,5}+1$
$x = \sqrt{2,5}+2$: $\sqrt{2,5}+2-2\cdot\sqrt{2,5}-2 < 0$ - не подходит.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$y = -\sqrt{2,5} + 1$
$x = -\sqrt{2,5} + 2$: $x - 2y = -\sqrt{2,5} + 2 + 2\sqrt{2,5} - 2 = \sqrt{2,5} > 0$

$xy - x - 2y + 2 = (-\sqrt{2,5} + 1)(-\sqrt{2,5} + 2) + \sqrt{2,5} - 2 + 2\sqrt{2,5} - 2$
$+ 2 = 2,5 - 3\sqrt{2,5} + 2 + 3\sqrt{2,5} - 2 = 2,5 > 0$

2. $x = 4y - 2$, подставим.

$(4y-4)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$25(y-1)^2 = 25$

$y - 1 = \pm 1$

$y = \pm 1 + 1$ — $2 \Rightarrow x = 6$; $0 \Rightarrow x = -2$

$x = 6,\ y = 2$: $x - 2y = 6 - 4 > 0$

$xy - x - 2y + 2 = 12 - 6 - 4 + 2 = 4 > 0$

$x = -2,\ y = 0$: $x - 2y = -2 < 0$ — не подх.

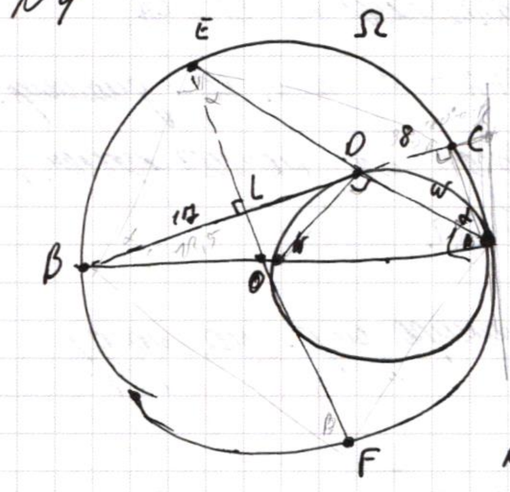
Ответ:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\sqrt{2,5} + 2 \\ y = -\sqrt{2,5} + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{12{,}5}{DE} = \frac{BE}{17}$

$\frac{25}{2}\cdot 17 = BE^2$

№4



$CD = 8$

$BD = 17$

$\deg(D,\Omega) = BD\cdot DC = ED\cdot DA = 17\cdot 8.$

AB - диаметр Ω, а A - точка касания окр., тогда AB проходит не только через центр Ω, но и через центр ω. Пусть точка пересеч. AB не равная A с ω - точка K, тогда $AK = d$ - диаметр ω

$AB = D$ - диаметр Ω.

$\deg(B,\omega) = BD^2 = BA\cdot BK = BA(BA - AK) = D\cdot(D-d)$

$\triangle BDK \sim \triangle ADK$, т.к. $\angle DBA$ - общий, а $\frac{BD}{AB} = \frac{BK}{BD}$ (из степени точки B)., тогда пусть $\angle CAE = \alpha \Rightarrow \angle EBC = \alpha$ (опир. на EC). Пусть $\angle BAD = \beta$, тогда $\angle BDK = \beta$. $\angle KDA = 90°$, т.к. KA - диаметр. $\angle BDA = 90° + \beta = \angle BKD$. $\angle BEA = 90°$, т.к. BA - диаметр. $\Rightarrow \angle DBA = 180° - \angle BEA - \angle EBC - \angle BAE =$

$= 90° - \alpha - \beta.$

$\angle DBA + \angle BDK + \angle BKD = 180°.$

$90° - \alpha - \beta + 90° + \beta + \beta = 180°$

$\beta = \alpha \Rightarrow AE$ - биссектриса $\angle BAC$.

$\angle BAD = \alpha$

$\angle BFE = \angle BAE = \alpha$ (опир. на BE)

$EF \parallel CA$, т.к. если мы обозначим т. пересеч. EF и BC за

L, то LC - секущая, $\angle ELD = \angle ECA = 90^\circ$

$BF \parallel EA$ т.к. ~~BF прямая, отн. $\angle BEF \angle BFE = \alpha$ $\angle$ прям~~

BF повёрнута на $\angle BFE = \alpha$ ~~отн. прямой~~ против. часов. стрелки отн. EF, а EA повёрнута на $\angle CAE = \alpha$ против. час. стрелки отн. CA, а, т.к. CA и EF параллельны, то $BF \parallel EA$.

Тогда $\angle BFA + \angle FAE = 180^\circ$, а $\angle BFA = 90^\circ$, т.к. AB - диаметр. $\Rightarrow$ $\angle FAE = 90^\circ \Rightarrow EF$ - тоже диаметр. Тогда их точка пересеч., ~~где~~ $(AB$ и $EF)$ - точка O - центр Ω.

$BL = LC$, т.к. OL - высота из центра окр. на хорду

$BL = LC = \frac{BD + DC}{2} = \frac{25}{2}$

5

$\triangle BED$ - прямоугольный с высотой из прямого угла, EL, тогда $BE^2 = BD \cdot BL = \frac{25 \cdot 17}{2}$, а $ED^2 = BD \cdot \underset{4,5}{LD} = BD(\underset{4,5}{BD - BL}) =$

$= 17 \cdot (17 - 12,5) = 17 \cdot \frac{9}{2}$

$\angle FEA = \angle BFE = \alpha$, т.к. $BF \parallel EA$.

$\triangle EDL \sim \triangle DCA$, т.к. $\angle LED = \angle DAC = \alpha$, $\angle ELD = \angle BCA = 90^\circ$

$DA = \frac{DC}{LD} \cdot ED = \frac{8}{4,5} \cdot \sqrt{\frac{17 \cdot 9}{2}}$

$DA + ED = \frac{16}{9} \cdot \sqrt{\frac{17 \cdot 9}{2}} + \sqrt{\frac{17 \cdot 9}{2}} = \frac{25}{9} \cdot \sqrt{\frac{17 \cdot 9}{2}} =$

$= AE$

$BEAF$ - прямоугольник, т.к. его диагонали - диаметры ~~оп окр~~ опис. окр. этого прямоуг. $\Rightarrow$ все углы равны 90°.

$BE = AF = \sqrt{\frac{25 \cdot 17}{2}}$

$S_{AFE} = \frac{AF \cdot AE}{2} = \frac{\frac{25}{9} \cdot \sqrt{\frac{17 \cdot 9}{2}} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot 17}{2}}}{2} = \frac{\frac{25}{9} \cdot \frac{17}{2} \cdot 3 \cdot 5}{2} =$

$= \frac{25 \cdot 17 \cdot 5}{12} = \frac{2125}{12}$

$D = AB$, $D^2 = AB^2 = BE^2 + EA^2 = \frac{25 \cdot 17}{2} + \frac{25^2}{81} \cdot \frac{17 \cdot 9}{2} =$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

~~$\sin^2 2\beta = 1-\cos^2 2\beta = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$~~

~~$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$~~

~~$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$~~

$\sin^2 2\beta = 1-\cos^2 2\beta = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

~~$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$~~

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\beta = 2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha \neq 0$, т.к. $tg\alpha$ - не сущ. совсем бы

$\sin(\alpha+2\beta) = 0$

$\sin\alpha\cdot\cos 2\beta = -\sin 2\beta\cdot\cos\alpha$

$\sin\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos\alpha$

Описка.

$tg\alpha = -\frac{1}{2}$

3-

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)-\sin 2\beta = 0$

$2\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+2\beta) = 0$

I) $\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0$

II) $\cos(\alpha+2\beta) = 0$

$\cos\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\beta\cdot\sin\alpha = 0$

$\cos\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \sin\alpha\cdot -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$tg\alpha = -2$

ответ: $tg\alpha = \left\{0; -\frac{1}{2}; -2\right\}$.

№4 (продолж.).

$$D^2 = \frac{17 \cdot 25}{2} \cdot \left(1 + \frac{25}{9}\right) = \frac{17 \cdot 25 \cdot 34}{18} = \frac{17 \cdot 25 \cdot 17}{9} =$$

$$D = \frac{5 \cdot 17}{3}$$

$R = \frac{5 \cdot 17}{6} = \frac{85}{6}$ - радиус Ω

$$\operatorname{tg} \angle AFE = \frac{AE}{FA} = \frac{\frac{25}{9} \cdot \sqrt{\frac{17 \cdot 9}{2}}}{\sqrt{\frac{25 \cdot 17}{2}}} = \frac{\frac{25}{9} \cdot 3}{5} = \frac{5}{3}$$

$$\angle AFE = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)$$

$BE \parallel KD$ т.к. ED - секущ. $\angle BEA = \angle KDA = 90°$.

$$\frac{CD}{DL} = \frac{AD}{ED} = \frac{AK}{BK}$$

$$\|$$

$$\cancel{\frac{8}{4}}\ \frac{16}{9} = \frac{d}{D-d} = \frac{d}{\frac{5 \cdot 17}{3} - d}$$

$$\frac{16 \cdot 5 \cdot 17}{3} - 16d = 9d$$

$$\frac{16 \cdot 5 \cdot 17}{3} = 25d$$

$$d = \frac{16 \cdot 17}{15}$$

$$r = \frac{8 \cdot 17}{15} = \frac{136}{15}$$

Ответ: $r = \frac{136}{15}$, $R = \frac{85}{6}$, $\angle AFE = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)$, $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 1 4 3 4

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12} x^2+18x} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$$

пусть $x^2+18x = t$, $t>0$ т.к. $\log_{12} t$

$$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$$

$$5^{\left(\frac{\log_5 t}{\log_5 12}\right)} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$$

$$t^{\left(\frac{1}{\log_5 12}\right)} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$$

$$t^{\log_{12} 5} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$$

$t>0 \Rightarrow$

$$\frac{\log_{12} 13}{\log_{12} 5} = \log_5 13$$

$$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$$

$$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}$$

$$1 + t^{\log_{12} \frac{12}{5}} \geq t^{\log_{12} \frac{13}{5}}$$

$$f(t) = 1 + t^{\log_{12}\frac{12}{5}} - t^{\log_{12}\frac{13}{5}} \geq 0$$

$$f'(t) = \log_{12}\frac{12}{5} \cdot t^{\log_{12}\frac{1}{5}} - \log_{12}\frac{13}{5}\, t^{\log_{12}\frac{13}{60}} \ ?\ 0$$

$$\log_{12}\frac{12}{5} - \log_{12}\frac{13}{5}\, t^{\log_{12} \frac{13}{60}\cdot\frac{5}{1}} \ ?\ 0$$

$$\log_{12}\frac{12}{5} \ ?\ \log_{12}\left(\frac{13}{5}\right)\cdot t^{\log_{12} 13}$$

$$\log_{\frac{13}{5}} \frac{12}{5} = \frac{\log_{12}\frac{12}{5}}{\log_{12}\frac{13}{5}} \ ?\ t^{\log_{12} 13}$$

$$\left(\log_{\frac{13}{5}} \cdot \frac{12}{5}\right)^{\cancel{}\log_{13}12} \quad ? \; t$$

при $t > \underbrace{\left(\log_{\frac{13}{5}} \frac{12}{5}\right)^{\log_{13}12}}_{\wedge\; 1}$ г $f(t)$ - убывает

Равенство достигается при 12^2, а при $x \to 0$ левая часть ~~вели~~ меньше 1, тогда

$t \in [0; 144]$

3

$x^2 + 18x = t$

$D = 18^2 - 4t$

$x = \cancel{} \; \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4t}}{2} = -9 \pm \sqrt{9^2 - t}$

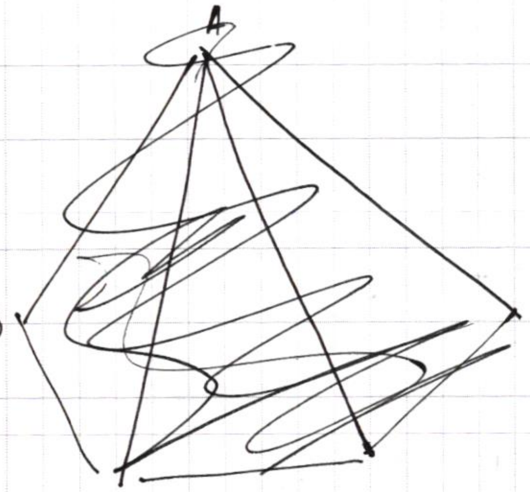
Неверно решено рац. неравенство!

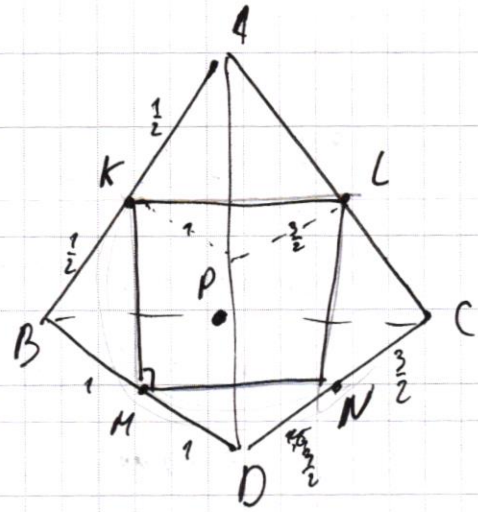
~~x∈~~ Ответ: $x \in [-18; 0]$

~~$1-a=0$~~

~~$0 < 48x + 36 - 12x - 11$~~

№7





Обозначим середины отрезков так, как показано на рисунке.

KLMN – параллелограмм, т. к. KM ∥ AD ∥ LN по ср. линиям.

KL ∥ BC ∥ MN

Тогда эти точки лежат в одной плоскости.

т.к. любая плоскость пересекает сферу по окружности или по точке (если пересекает),

KMNL – впис. параллелограмм., тогда он прямоугольник.

Центр сферы лежит на перпендикуляре ~~[illegible]~~ к плоскости KMNL с основанием в точке пересечения KN и ML.

Т. к. $KM \perp KL$, то $BC \perp AD$

2

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 1 4 3 4

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b$

$0 \le \frac{(ax+b)(4x+3)-12x-11}{4x+3}$

При $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$, $4x+3<0$ всегда.

$0 \ge 4ax^2 + 3ax + 4bx + 3b - 12x - 11$

$0 \ge 4ax^2 + x(3a+4b-12) + (3b-11)$

1. Если $a=0$.

$\max\left(\frac{12x+11}{4x+3}\right) \le b \le (8x^2 - 30x - 17)$ min.

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$, $4x+3<0$ всегда, максимум

при $x \to -\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ $3+\frac{2}{4x+3} \to +\infty$, а мы не можем

подобрать такое b.

2. Если $a>0$

~~$D = (3a+4b-12)^2 - 16a(3b-11)$~~

то справа парабола ветвями вверх., тогда

проверим крайние точки

Докажем, что нет таких пар чисел., Найдём

такой $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$, что $\frac{12x+11}{4x+3} > ax+b$.

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} > ax+b$, $4x+3<0$.

$12x+11 < (4x+3)(ax+b)$

$0 < 4ax^2 + x(3a+4b-12) + 3b-11$,