# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР 20002018

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина $N$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $KN$. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра $LM$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 2 0 1 8

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

N-1

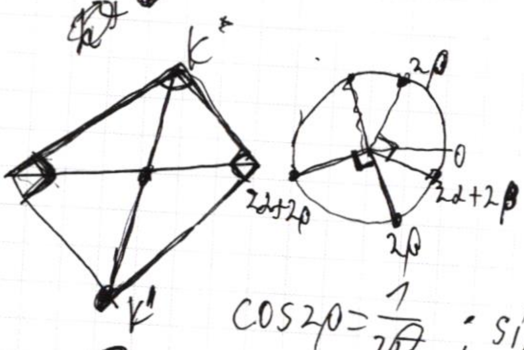
$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin(2\alpha+2\beta-2\beta)=-\frac{2}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

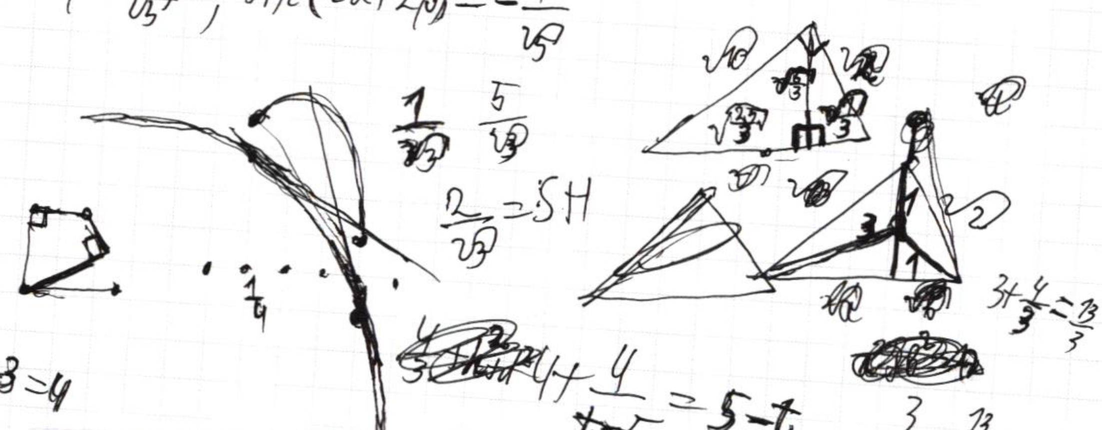
$h^2+3$



– изобразим углы $2\beta$ и $2\alpha+2\beta$ на единич. окружности с условием

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ; $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{3}$



$\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\frac{5}{\sqrt{3}}$

$\frac{2}{\sqrt{3}}=SH$

$-2+9-3=4$

$4+\frac{4}{t-5}=5-t$

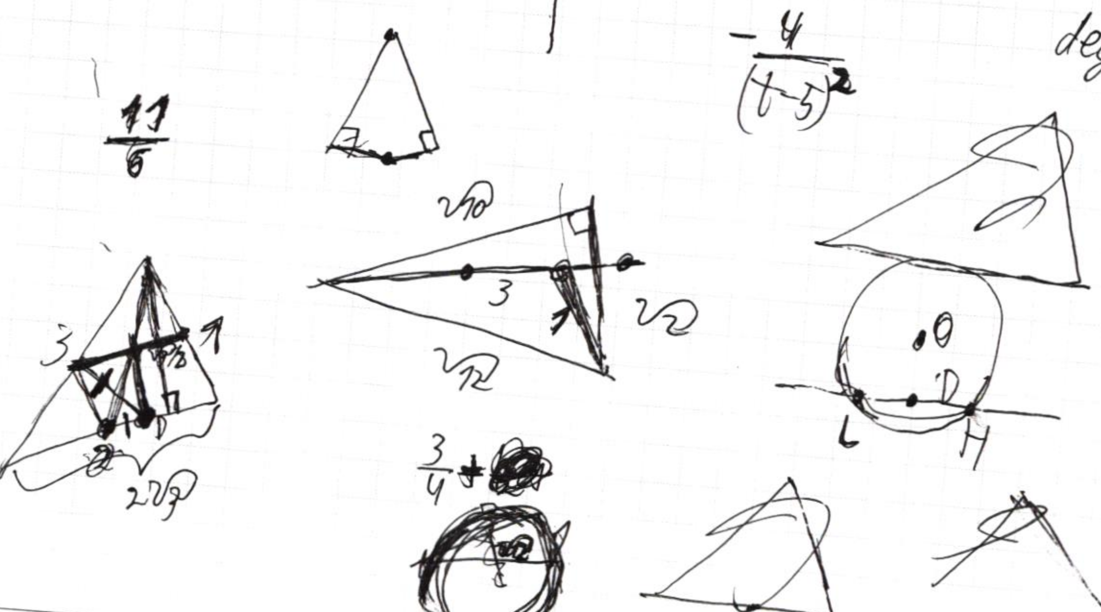
$-\frac{4}{(t-5)^2}$

$3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{13}{3}$

$\deg L=\frac{13}{3}$

$\frac{11}{6}$



$\frac{3}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

20002018

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N-2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \Leftrightarrow x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \Leftrightarrow (x-6)^2+(6y-3)^2=45+6^2+3^2=90 \end{cases}$$

Пусть $t=x-6$, $z=2y-1$; тогда $x-12y=(x-6)-6(2y-1)=$ $=t-6z$ и система принимает вид

$$\begin{cases} t-6z=\sqrt{tz} \\ t^2+9z^2=90 \end{cases} \quad tz\geq 0; \ \cancel{t-6z\geq 0} \ t-6z\geq 0 \quad \begin{cases} t^2-12tz+36z^2=tz \\ t^2+9z^2=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t-4z)(t-9z)=0 \\ t^2+9z^2=90 \end{cases},$$

заметим, что из $(t-4z)(t-9z)=0$ следует $\left[\begin{array}{l} t=4z \\ t=9z \end{array}\right.$ и

$tz>0$; Случай 1: $t=4z$, тогда $\overset{4z-6z\geq 0 \Rightarrow z\leq 0}{\vee}$ ~~$16+9$~~ $(4^2+9)z^2=90$,

~~$z^2=\frac{90}{25}=9\cdot\frac{2}{5}$; $z=3\sqrt{\frac{2}{5}}$, $t=12\sqrt{\frac{2}{5}}$ или, тогда~~

~~$x=12\sqrt{\frac{2}{5}}+6$, $y=\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}+1}{2}$ или~~ $z=-3\sqrt{\frac{2}{5}}$, $t=-12\sqrt{\frac{2}{5}}$,

тогда $x=-12\sqrt{\frac{2}{5}}+6$, $y=\frac{-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1}{2}$; Случай 2: $t=9z$,
также $9z-6z\geq 0 \Rightarrow z\geq 0$

значит $(9^2+9)z^2=90 \Rightarrow z^2=1$, значит $z=1$, $t=9$, $x=15$, $y=1$,

~~или $z=-1$, $t=-9$, $x=-3$, $y=0$~~ Ответ: $(15;1)$ и $\left(-12\sqrt{\frac{2}{5}}+6; \frac{-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1}{2}\right)$

+4

N-3.

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$; Пусть $u=10x-x^2>0$,

поскольку $\exists \log_3(10x-x^2)$; $u+|-u|^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 u}$ — равносильно

исходному при условии $u>0$; $u+u^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 u}=$ ~~$3^{\log_3 5\log_3 u}$~~ $=$ ~~$u^{\log_3 5}$~~

$u=3^{\log_3 u}$, $u^{\log_3 4}=3^{\log_3 u\cdot\log_3 4}=4^{\log_3 u}$; пусть $w=\log_3 u$,

тогда $3^w+4^w\geq 5^w$; ~~зат~~ докажем, что решениями

являются все $w\leq 2$ — действительно, при $w=2$ получим

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

20002018

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

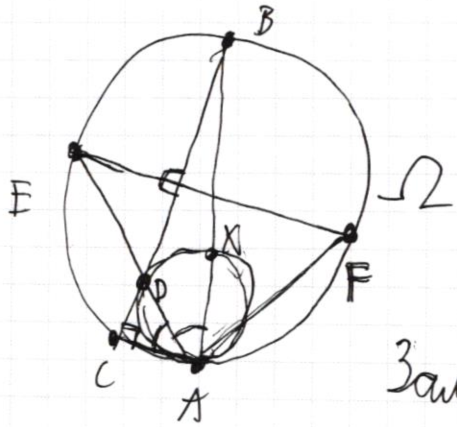
$3^2+4^2=5^2$; если $w>2$, то $3^w+4^w<3^2\cdot5^{w-2}+4^2\cdot5^{w-2}=5^w$, а если $w<2$, то $3^w+4^w>\frac{3^2}{5^{2-w}}+\frac{4^2}{5^{2-w}}=5^w$; $w\leq2$ равносильно

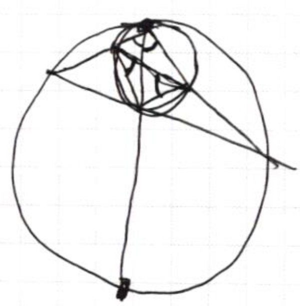
$\log_3 y\leq2$, $y\leq3^2=9$; $10x-x^2\leq9$; заметим, что

$10x-x^2\leq9 \Leftrightarrow x\notin(1;9)$, а $10x-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(0;10)$; ~~так~~

Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$ +5

N-4.



Заметим, что есть гомотетия с центром $A$, переводящая $\Omega\to\omega$, пусть тогда $C\to C'$, $B\to B'$; $B'C'\parallel BC$, $BC$ касается $\omega$ в точке $D$, поэтому дуги $B'D$ и $DC'$ в $\omega$ равны, т.е. $\angle CAE=\angle C'AD=\angle DAB'=\angle EAB$, тогда $E$ — середина дуги $BC$ в $\Omega$, т.е. $BE=CE$, значит, $EF$ — сер. пер. к $BC$; центр $\Omega$ лежит на $EF$, $\Rightarrow EF$ — диаметр, $\angle EAF=90°$, $\angle AFE=90°-\angle FEA=\angle EDB=\angle CDA$;

по т. синусов $\frac{CA}{BA}=\frac{CA\cdot\sin CDA}{\sin CDA}:\frac{BA\cdot\sin ADB}{\sin ADB}=\frac{CD\cdot\sin CDA}{\sin CAD}:$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$: \frac{\cancel{BD}\, AD \sin ADB}{\sin BAD}$; но $\angle ADB + \angle CDA = 180°$; $\angle BAD = \angle CAD$, т.е.

$\frac{CA}{BA} = \frac{CD}{BD} = \frac{15}{17}$; $CA^2 + CB^2 = AB^2$, т.к. $\angle ACB = 90°$ ($AB$ - диаметр)

$\left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = 1$, откуда $\frac{BC}{AB} = \frac{8}{17}$ $(8^2+15^2=17^2)$; Но $BC =$

$= BD + CD = \frac{15+17}{2} = 16$, так что $AB = 2 \cdot 17 = 34$, $AC = 2 \cdot 15 = 30$

Радиус $\Omega$ равен $\frac{AB}{2} = 17$; Если $X$ – вторая точка пересечения $\omega$ с $AB$, то радиус $\omega$ равен $\frac{AB-XB}{2}$ $\cancel{=}$

$\cancel{AB}$ но $AB \cdot BX = BD^2$, так что $BX = \left(\frac{17}{2}\right)^2 / 34 = \frac{17}{8}$;

$\frac{AB-XB}{2} = \frac{15 \cdot 17}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$; ~~$\sin\angle CAD$~~ $=$

$\operatorname{tg} \angle CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{15/2}{30} = \frac{1}{4}$; $\angle CDA = \operatorname{arcctg} \frac{1}{4}$, $\angle AEF =$

$= \operatorname{arcctg} \frac{1}{4} = \operatorname{arctg} 4$; Площадь $\triangle AEF$ равна верно

$\cancel{AB}\ \frac{EF \cdot AF \cdot \sin\angle AFE}{2} = \cancel{\frac{EF \cdot \sin 2\angle AFE}{4}}$ $\frac{EF^2 \sin\angle AFE \cdot \cos\angle AFE}{2} =$

$= \frac{EF^2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 AFE}}}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 AFE}} = \frac{AB^2 \cdot \operatorname{tg} AFE}{2(1+\operatorname{tg}^2 AFE)} = \frac{17^2 \cdot 4}{2 \cdot (1+16)} = 34$

А это нет

Ответ: ~~$\frac{30}{2}$~~, $17$, $\frac{255}{16}$, $\operatorname{arctg} 4$ и $34$

Итог: 4

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

20002018

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~4~~ Нарисуем графики $y=\frac{16x-16}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}$

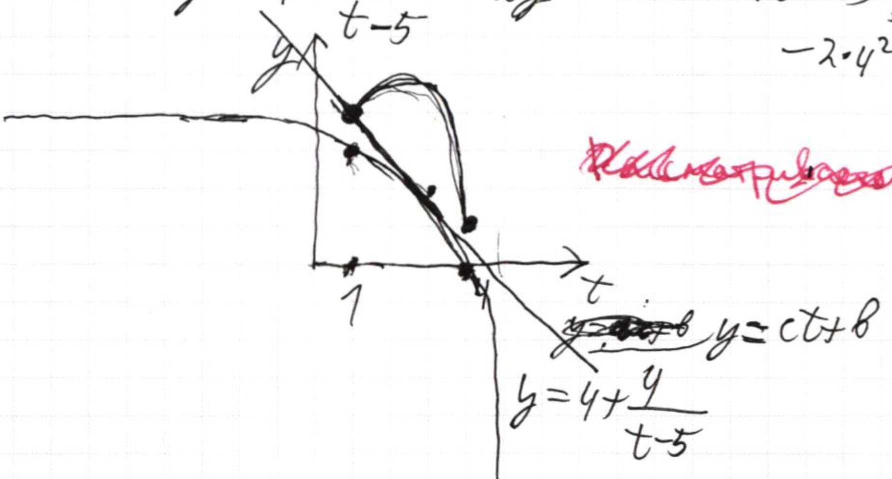
$y=-32x^2+36x-3$ на коорд. пл-ти $Oxy$; заметим, что $f(x)=-32x^2+36x-3$ - выпукла вверх, ибо $f''(x)=-2\cdot 32<0$

$ax+b$ - прямая; тогда если $ax+b\le -32x^2+36x-3$ на концах отрезка, то это верно везде; ~~вообще~~

пусть $t=4x$, тогда $t\in[1;4]$;

$y=4+\frac{4}{t-5}$ и $y=-2t^2+9t-3$; $-2\cdot 1^2+9\cdot 1-3=4$;

$-2\cdot 4^2+9\cdot 4-3=1$




~~Тогда прямая проходящая через точки (1;4) и (4;1) задаётся ур-ем~~ ~~$y=5-t$~~ Для каждого ~~при~~ углового коэф-та $c$ определим возможные значения $b$; (все такие прямые получаются переносом прямой $ct+b_0$, касающейся гиперболы $y=4+\frac{4}{t-5}$ вверх, при том достаточно чтобы $\begin{cases} c\cdot 1+b\le 4 \\ c\cdot 4+b\le 1\end{cases}$

Пусть прямая $ct+b_0$ касается $y=4+\frac{4}{t-5}$; тогда

$(ct+b_0)'=\frac{-4}{(t-5)^2}$, $c=-\frac{4}{(t-5)^2}\in[-\frac{4}{16};-\frac{1}{4}]$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

что единственно возможные параметры это $c=-1$, $b=5$; $4c=a \Rightarrow a=-4$; остаётся доказать что $a=-4$, $b=5$ подходят:

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le -4x+5 \Leftrightarrow 16x-16 \geqslant -(4x-5)^2 = -(16x^2-40x+25)$$

$$0 \geqslant -16x^2+24x-9 = -(4x-3)^2 \text{ — верно}$$

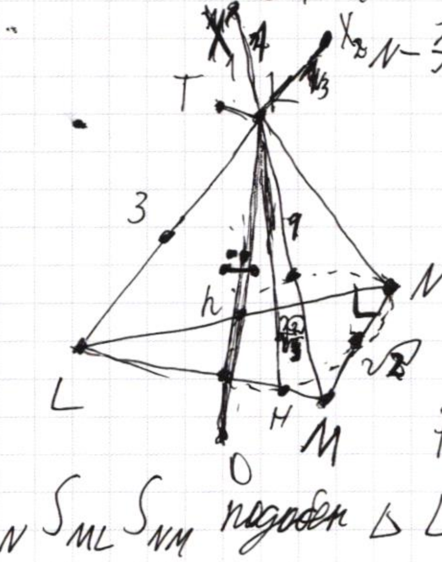
$$-4x+5 \le -32x^2+36x-3 \Leftrightarrow -32x^2+40x-8 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x^2+5x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow -(4x-1)(x-1) \geqslant 0,$$ верно, т.к.

$4x-1 \geqslant 0$, $x-1 \le 0$, ч.т.д.

Ответ: $a=-4$, $b=5$ +5

$N-7$:




Рассмотрим пересечение сферы $\omega$ (из условия) с пл-тью $LMN$; пусть $S_{PQ}$ — середина отрезка $PQ$ для $\forall$ $P$ и $Q$ в пространстве, $\triangle S_{LN}S_{ML}S_{NM}$ подобен $\triangle LNM$, поэтому $\angle S_{LN}NS_{NM} = \angle S_{LN}S_{LM}S_{NM}$, но $S_{LN}, N, S_{NM}, S_{LM}$ лежат в $\omega \cap LMN$; $N$ и $S_{LM}$ в разных полуплоскостях относительно $S_{LN}S_{NM}$; тогда их сумма равна $180°$, значит $\angle LNM = 90°$ Пусть $H$-основание высоты

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 2 0 1 8

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $x=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$, $y=\prod_{i=1}^{n-5\cdot m} q_i^{\beta_i}$, где все $p_i q_i$ — простые числа; $\alpha_i, \beta_i$ — целые; тогда $f\left(\frac{x}{y}\right)=$ $f(x)-f(y)$; (+1)

Если $f(x)\neq f(y)$, то среди чисел $f\left(\frac{x}{y}\right)$, $f\left(\frac{y}{x}\right)$ ровно одно отрицательно; вычислим некоторые значения:

$f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(10)=1$, $f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(14)=1$, $f(15)=1$, $f(17)=4$, $f(19)=4$ (+1)

$f(4)=0$, $f(6)=0$, $f(8)=0$, $f(9)=0$, $f(12)=0$, $f(16)=0$, $f(18)=0$

$f(20)=1$, $f(21)=1$, $f(22)=2$, $f(23)=5$, $f(24)=0$, $f(25)=2$

для 10 чисел $a$ из $\{2,3,\dots,25\}$ $f(a)=0$, для 7 чисел $a$ из $\{2,3,\dots,25\}$ $f(a)=1$, для 3 $f(a)=2$, для 2 $f(a)=3$, для 2 $f(a)=4$, для 1 $f(a)=5$

Таким образом, кол-во пар чисел $x,y$: $f(x)\neq f(y)$ равно $C_{25}^2-C_{10}^2-C_7^2-C_3^2-C_2^2-2\cdot C_1^2=$

$=25\cdot 12-5\cdot 9-3\cdot 7-3-1=300-45-21-4=230$

не число сочетаний, порядок $(x,y)$ в паре важен.

Ответ: 230

Итог: +2

N-6.

$\frac{16x-16}{4x-5}$ $\cancel{\leq ax+b}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{16x-20}{4x-5}+\frac{4}{4x-5}\leq ax+b \Leftrightarrow \frac{4}{4x-5}\leq ax+b-4$;

для любого $x\in[\frac{7}{4};1]$ ~~верно $4x-5<0$, так что написанное равносильно~~ $4\geq(ax+b-4)(4x-5)$

Страница №4

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

опущенной из $N$ ~~в~~ $\triangle LNM$; $\angle NS_{LN}S_{LM} = 90°$ т.к. $S_{LN}S_{LM} \parallel NM$, $\perp NS_{LN}$, тогда $NS_{LM}$ диаметр окружности $\omega \cap LNM$, $\angle NHS_{LM} = 90° \Rightarrow H \in \omega$; Пусть $\omega \cap MK$ (прямую) $= \{S_{MK}, X_1\}$; тогда $MS_{NM} \cdot MN = MS_{MK} \cdot MX_1$, поскольку точки $S_{KM}, X_1, N, S_{NM}$ лежат на 1 окружности $\omega \cap KNM$, откуда $MX_1 = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{1/2} = 2$, причём $M$ вне $\omega$, поэтому $KX_1 = |KM - MX_1| = |1-2| = 1$, однако $KM - MX_1 < 0$, значит $K$ внутри $\omega$; Аналогично, если $\{S_{KL}, X_2\} = \omega \cap KL$, то $KX_2 \cdot KS_{KL} = KX_1 \cdot KS_{KM}$ и $KX_2 = \frac{1 \cdot 1/2}{3/2} = \frac{1}{3}$; $K$ лежит на отрезке $S_{KL}X_2$, так что $L$ вне сферы $\omega$, $LS_{KL} \cdot LX_2 = $ ~~$LS_{LM} \cdot LM$~~ $LS_{LN} \cdot LN = \frac{LN^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{3} = 5 \Rightarrow LN = \sqrt{10}$; по т. Пифагора $LM = \sqrt{10+2} = \sqrt{12}$

~~Теперь заметим, что центр опис. сферы $\Omega$ лежит в пл-ти $\alpha$, содерж. $S_{LM}$ и перпендикулярной $LMN$. Пусть $T = \Omega \cap \alpha$ такова, что $OT \perp LM$~~

Пусть $O'$ это центр $(KLM)$, тогда расстояние от $O'$ до $LM$ не ~~нет~~ больше расстояния от $O$ центра опис. сферы до $LM$ ~~$\frac{3}{2}$~~, а поэтому радиус сферы не меньше радиуса $(KLM)$ и в точности ему равен если $KLM \perp NLM$, поскольку $S_{LM}N = S_{LM}L = S_{LM}M$, т.е. $O$ лежит в пл-ти $\perp KLM$ и содержащей $S_{LM}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Остаётся найти радиус $\Gamma KLM$

$1^2+3^2-2\cdot3\cdot\cos\varphi=12$, где $\varphi=\angle LKM$,

откуда $\cos\varphi=-\frac{1}{3}\Rightarrow\sin\varphi=\frac{\sqrt{8}}{3}$ и радиус

~~и~~ равен $\frac{\sqrt{12}}{2\sin\varphi}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=\frac{3\sqrt{6}}{4}$

Ответ: $\cancel{\frac{3\sqrt{6}}{4}}$ $\sqrt{12}$, $\frac{3\sqrt{6}}{4}$.

* использовался факт: ~~если~~ центр сферы $\Gamma$ лежит на перпендикуляре к $\alpha$ в ~~то~~ центре $\alpha\cap\Gamma$

+6

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Также выполнено~~ ~~$ct + b_0 = 4 + \frac{4}{t-5} = -\frac{4}{(t-5)^2}\cdot t + b_0 = 4 + \frac{4}{t-5}$;~~

$b_0 = 4 + \frac{4t}{t-5} + \frac{4(t-5)+20}{(t-5)^2} = 4 + \frac{8}{t-5} + \frac{20}{(t-5)^2}$

~~$c + b_0 + (b - b_0) \le 4$, $c + b_0 + (b - b_0) = 4 + \frac{8}{t-5} + \frac{16}{(t-5)^2} + b - b_0 \le 4$~~

$c + b \le 4$

$4c + b \le 1$

$$\begin{cases} b \le 4 - c = 4 + \frac{4}{(t-5)^2} \\ b \le 1 - 4c = 1 + \frac{16}{(t-5)^2} \\ b \ge 4 + \frac{8}{t-5} + \frac{20}{(t-5)^2} \end{cases}$$

~~Случай 1) $c \ge -1$~~

~~тогда из $b \le 1 - 4c$ следует $b \le 4 - c$ и остаётся найти~~

~~$1 + \frac{16}{(t-5)^2} \ge b \ge 4 + \frac{8}{t-5} + \frac{20}{(t-5)^2}$~~

Пусть $\frac{2}{t-5} = -z$;

$c = -z^2$

$$\begin{cases} b \le 4 + z^2 \\ b \le 1 + 4z^2 \\ b \ge 4 - 4z + 5z^2 \end{cases}; \quad z \in [\tfrac{1}{2}; 2]$$

~~Случай 1) $z \ge 1$; тогда из $b \le 4 + z^2$ следует $b \le 1 + 4z^2$,~~

~~$\begin{cases} b \le 4 + z^2 \\ b \ge 4 + z^2 + 4(z^2 - z) \end{cases}$~~

Заметим, что ~~4~~ точки $(1;4)$. $(3;2)$ $(4;1)$ лежат на прямой $y = 5 - t$, однако $y = ax + b$ лежит не ~~ниже~~ выше $(1;4)$ и $(4;1)$ и не ниже $(3;2)$, т.к. $2 = 4 + \frac{4}{3-5}$, т. е. $(3;2)$ лежит на гиперболе. Отсюда заключаем,