МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР 20001112

Заполняется ответственным сек...рём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

1

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

4

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

0

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

4

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

0

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

5

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

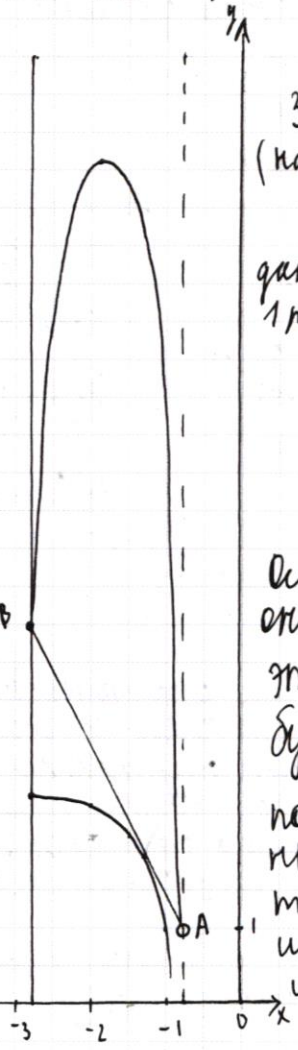
1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 Нарисуем графики этих функций. • $ax+b$ – прямая

• $\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$ – обр. пропорциональность. график – гипербола $f(-\frac{11}{4}) = 2{,}75$; $f(-\frac{3}{4})$ не опр, ф-я ~~возраст~~ убыв. на пром

• $-8x^2-30x-17$ – парабола, ветви вниз. $x_в = -\frac{15}{8}$, $y_в = \frac{89}{8}$. $f(-\frac{11}{4})=5$, $f(-\frac{3}{4})=1$. ↑ на $[-\frac{11}{4}; -\frac{15}{8}]$, ↓ на $[-\frac{15}{8}; -\frac{3}{4}]$. $x_в \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$.



Заметим, что прямая, проходящая через крайние точки, (найдем ее: $\begin{cases} -\frac{11a}{4}+b=5 \\ -\frac{3a}{4}+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -8a=16 \\ a=-2 \\ b=-0{,}5 \end{matrix}$, прямая $-2x-0{,}5$) касается данной гиперболы, т.к. у ур-я $3+\frac{2}{4x+3} = -2x-0{,}5$ всего 1 решение: $2x+\frac{2}{4x+3}+3{,}5=0 \mid \cdot(4x+3\neq0)$

$2x(4x+3)+3{,}5(4x+3)+2=0$

$8x^2+20x+12{,}5=0 \mid \cdot 2$

$16x^2+40x+25=0$

$(4x+5)^2=0$ $\quad 4x+5=0$ $\quad x=-\frac{5}{4}$

Остальные прямые, кроме этой не подойдут, т.к. они будут пересекать один из графиков (хотя бы) на этом участке ⇒ не при всех x из промежутка будет выполнено условие.

Покажем это более строго: такие прямые должны лежать не ниже касательной и гиперболе, проходящей через точку A (имеется в виду на данном промежутке), иначе они пересекут график ~~парабол~~ гиперболы и при каких-то x из промежутка $ax+b$ будет $< \frac{12x+11}{4x+3}$. Аналогично эти прямые должны лежать не выше прямой через точку B, которая касается гиперболы (не выше именно на промежутке), иначе прямая $ax+b$ будет пересекать график параболы и не при всех x будет выполняться нер-во из усл-я. Но такой системе удовлетворяет в нашем случае только одна прямая $-2x-0{,}5$, которая является одновременно касательной и через A, и через B. Значит, решение только одно: $a=-2$, $b=-0{,}5$

Ответ: $(-2; -0{,}5)$

№1 $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$= 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{4^2}{8\sqrt5}\cdot\frac{\sqrt5}{2} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\cos^2 2\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin^2 2\beta = \frac{1}{5}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\cdot \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ +1 $\cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta =$

$= \frac{\sin 2\alpha\cdot 2}{\sqrt5} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha = a$, $\cos 2\alpha = b$; $|a|\le1$, $|b|\le1$

$\begin{cases} 2a+b=-1 \\ a^2+b^2=1\end{cases}$ $b=-1-2a$

$a^2+1+4a^2+4a=1$

$5a^2+4a=0$

$\cdot a=0$ $\cdot a=-\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha = 0$ $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

~~$\cos 2\alpha = \pm1$~~   ~~$\cos 2\alpha = \pm\frac{3}{5}$~~

$b=-1$ $b=\frac{3}{5}$

$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1+1}{1-1}$ ∅

$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1-0{,}6}{1+0{,}6} = \frac{0{,}4}{1{,}6} = \frac{1}{4}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \pm\frac{1}{2}$

оба случ не все

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta =$

$= \frac{\sin 2\alpha\cdot 2}{\sqrt5} - \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

аналогичная замена

$\begin{cases} 2a-b=-1 \\ a^2+b^2=1\end{cases}$ $b=2a+1$

$5a^2+4a=0$

$\cdot a=0$ $\cdot a=-\frac{4}{5}$

$b=+1$ $b=-\frac{3}{5}$

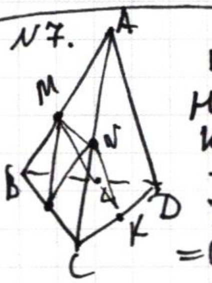
$\cos 2\alpha=+1$ $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$

$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1-1}{1+1} = 0$ $\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1+0{,}6}{1-0{,}6} = 4$

$\mathrm{tg}\,\alpha = 0$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \pm 2$

Ответ: $\left\{\pm2;\ 0;\ \pm\frac{1}{4}\right\}$

№7.



т.к. в грани ABCD окружность (сечение сферы) проходит через 4 точки, которые образуют параллелограмм – по св-ву ср. линии, то это прямоуг., т.к. сумма равных противоп. углов $=180^\circ \Rightarrow$ каждый по $90^\circ \Rightarrow \angle A = 90^\circ$

1

MNKL – тоже пар-м $\Rightarrow$ тоже прямоуг.

$NM = 0{,}5BC = LK$; $ML = KN = 0{,}5AD$ по св-ву ср.л.

$\Rightarrow \angle D = 90^\circ$ тоже по ср.л. $\Rightarrow BC = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ по т. Пиф в $\triangle BCD$.

ИК

треугольники ADO_2 и AEO_1 подобны по 2 углам: $\angle A$ общий, а прямые DO_2 и EO_1 параллельны т.к. обе $\perp$ BC. $k = \frac{DO_2}{EX} = \frac{AO_2}{AX}$ (X - точка пер. EF и AB).

~~[illegible]~~, $k = \frac{AD}{DE}$.

Найдем AD: $CD = 8$ по усл-ю, $AC = \frac{25r}{17}$, т.к. $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$. => по Т. Пиф в $\triangle ADC$ $AD = \sqrt{8 + \frac{25}{17}\cdot\frac{136}{15}} = \sqrt{\left(\frac{40}{5}\right)^2 + \left(\frac{40}{3}\right)^2} = 40\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{9}} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$

степень точки D: $BD \cdot DC = DE \cdot DA$ — по св-ву ст. точки.

$$DE = \frac{BD \cdot DC}{DA} = 136 : \frac{8\sqrt{34}}{3} = \frac{136 \cdot 3}{8\sqrt{34}} = \frac{51}{\sqrt{34}} = 3\sqrt{8{,}5}.$$

по Т. Фалеса т.к. $XE \parallel DO_2$, то $AD : DE = AO_2 : O_2X$

$\frac{AD}{DE} = \frac{8\sqrt{34}}{3 \cdot 3\sqrt{8{,}5}} = \frac{16}{9}$. Заметим, что $\frac{r}{R-r} = \frac{16}{9}$, т.к. $r = \frac{16}{25}R$, то есть точка X_2 совпадает с точкой O_1 => EF - диаметр Ω, т.е. $\angle EAF = 90°$.

поэтому $\triangle EFA \sim \triangle EDY$ ($Y = BC \cap EF$) по 2 углам: $\angle E$ общ, $\angle Y = \angle A = 90°$ => $\angle EFA = \angle EDY$, который $= \angle ADC$ как верт. в прямоуг. $\triangle ADC$

$\operatorname{tg}\angle ADC = \frac{AC}{DC} = \frac{40}{3 \cdot 8} = \frac{5}{3}$ => $\angle ADC = \angle AFE = \operatorname{arctg}\frac{5}{3}$

Найдем $AE = AD + DE = \frac{8\sqrt{34}}{3} + \frac{9\sqrt{8{,}5}}{3} = \frac{16\sqrt{8{,}5} + 9\sqrt{8{,}5}}{3} = \frac{25\sqrt{8{,}5}}{3}$

$EF = 2R = \frac{85}{3}$. Найдем AF по т Пиф: $AF = \sqrt{\frac{85^2}{9} - \frac{625 \cdot 8{,}5}{9}} =$

$= \frac{1}{3}\sqrt{8{,}5 \cdot 10 \cdot 85 - 625 \cdot 8{,}5} = \frac{1}{3}\sqrt{8{,}5(850-625)} = \frac{1}{3}\sqrt{225 \cdot 8{,}5} = 5\sqrt{8{,}5}$

$S_{AFE} = \frac{FA \cdot AE}{2} = \frac{5\sqrt{8{,}5} \cdot 25\sqrt{8{,}5}}{2 \cdot 3} = \frac{125 \cdot 8{,}5}{6} = \frac{125 \cdot 17}{12} = \frac{10625}{6}$

Ответ: $\frac{85}{6}$ и $\frac{136}{15}$; $\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$; $\frac{10625}{6}$

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x + (x^2+18x)^{\log_{12}13} \ge 0$

ОДЗ $x^2 + 18x > 0$ => модуль можно раскрыть.

-18 0 x

замена $t = x^2 + 18x$ $t > 0$

$5^{\log_{12} t} - t^{\log_{12} 13} + t \ge 0$

$\log_{12} t = \log_5 t \cdot \log_{12} 5 \Leftrightarrow 5^{\log_{12} t} = (5^{\log_5 t})^{\log_{12} 5} = t^{\log_{12} 5}$

$t^{\log_{12} 5} - t^{\log_{12} 13} + t \ge 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$ замена $x-2=a$, $y-1=b$

$x-2y=x-2-2(y-1)=a-2b$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$ $ab\geq 0$ $a-2b\geq 0$ ОДЗ $\uparrow^2$ $a^2+4b^2-4ab=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$(a-4b)(a-b)=0$

• $a=4b$

$16b^2+9b^2=25$

$b^2=1$

• $a=b$

$10b^2=25$

$b^2=2{,}5$

$\begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases}$ $\begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} b=\sqrt{2{,}5} \\ a=\sqrt{2{,}5} \end{cases}$ $\begin{cases} b=-\sqrt{2{,}5} \\ a=-\sqrt{2{,}5} \end{cases}$

$\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2=-4 \\ y-1=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2=\sqrt{2{,}5} \\ y-1=\sqrt{2{,}5} \end{cases}$ $\begin{cases} x-2=-\sqrt{2{,}5} \\ y-1=-\sqrt{2{,}5} \end{cases}$

$\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\sqrt{2{,}5}+2 \\ y=\sqrt{2{,}5}+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-\sqrt{2{,}5} \\ y=1-\sqrt{2{,}5} \end{cases}$

Проверка:

• $6-4=\sqrt{4\cdot 1}$

$2=2$ И, входит в ОДЗ

• $-2-0<0$ в ОДЗ не вх. пост. корень

Проверка:

• $\sqrt{2{,}5}+2-2\sqrt{2{,}5}-2=-\sqrt{2{,}5}<0$ - п.к

• $2-\sqrt{2{,}5}-2+2\sqrt{2{,}5}=\sqrt{(-\sqrt{2{,}5})\cdot(-\sqrt{2{,}5})}$

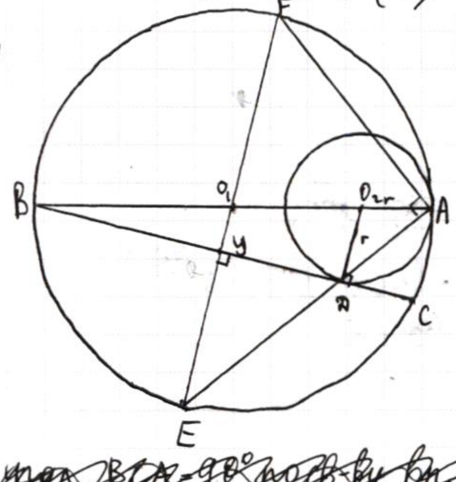
$\sqrt{2{,}5}=\sqrt{2{,}5}$ И, входит в ОДЗ

~~Ответ: (6; 2) и (2-√2,5; 1-√2,5)~~

4

Ответ: $(6;2)$ и $(2-\sqrt{2{,}5};\ 1-\sqrt{2{,}5})$

N 4



$AO_2=r$ - маленькой ω

$AO_1=R$ - большой Ω

$O_2D=r$, $O_1E=R$

Допустим EF пересекает AB не в O_1, а в точке X.

~~∠BCA=90° по св-ву вп. углов. BC=25 ⇒ по Т.Пиф~~

$\angle BCA=90°$ по св-ву вп. углов, $\angle BDO_2=90°$ по св-ву кас $\Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$, $k=BD:BC=\frac{17}{25} \Rightarrow CA=\frac{25r}{17}$. $k=\frac{BO_2}{BA}=\frac{2R-r}{2R}=\frac{17}{25} \Leftrightarrow 50R-25r=34R \Leftrightarrow 25r=16R \Leftrightarrow r=\frac{16R}{25}$.

~~[illegible]~~. Т прямоуг. $\triangle BDO_2$. по Т.Пиф $17^2+r^2=(2R-r)^2$

$4R^2-4Rr-289=0$

$4R^2-\frac{4R\cdot 16R}{25}-289=0 \Leftrightarrow 100R^2-64R^2-289\cdot 25=0 \Leftrightarrow 36R^2=289\cdot 25 \Leftrightarrow R^2=\frac{289\cdot 25}{36} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R=17\cdot 5:6=\frac{85}{6}=14\frac{1}{6} \Leftrightarrow r=\frac{16\cdot 85}{25\cdot 6}=\frac{136}{15}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 заметим, что $f(1 \cdot x) = f(1) + f(x)$ по усл

$f(x) = f(x) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

Также можем однозначно сказать, что $f(2) = f(3) = 0$, $f(5) = f(7) = 1$, $f(11) = 2$, $f(13) = 3$, $f(17) = 4 = f(19)$, $f(23) = 5$ по усл-ю.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 1 1 1 2

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$-8x^2-30x-17 \quad x_в = \frac{-30}{-16} = -\frac{15}{8} = -1\frac{7}{8}$

$\frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$5^{\log_5 2}$

$= \log_5 t \cdot \log_{12} 5$

$5^{\log_{12} t} - 5^{\log_5 t \cdot \log_{12} 13} + 5^{\log_5 t} \ge 0$

$x(y-1) - 2(y-1)$

$x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x-2 \quad -2y-2$

$a \qquad 2b$

$\log_5 2 = x \qquad 5^x = 2$

$5^{\log_{12} 5} - 5^{\log_{12} 13} + 1 \ge 0$

$-\frac{225}{8}$

$5^{\log_5 2} \qquad t = 5^{\log_5 t}$

$-\frac{225}{8} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17 =$

$= \frac{-225+450}{8} - 17 =$

$= \frac{225}{8} - \frac{136}{8} =$

$= \frac{89}{8} = 10\frac{9}{8}$

$x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}$

$a^{\log_a b} = a$

$a^{\log_a b} = b$

$x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 25$

$17 \cdot 8 = 136$

$225 - 136 = 89$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 5^2$

$3y$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 5^2 \qquad 9(y^2-2y+1)$

$t^{\log_{12} 5} \qquad t^{\log_{12} 5} \qquad t = 5^{\log_5 t}$

$x - 2 = a \qquad a^2 + 9b^2 = 25$

$y - 1 = b$

$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$

$ab \ge 0 \quad a - 2b \ge 0$

$\cancel{5^{\log_5 t \cdot \log_{12} t}}$

$5^{\log_5 t \cdot \log_{12} t}$

$a^2 + 4b^2 - 4ab = ab$

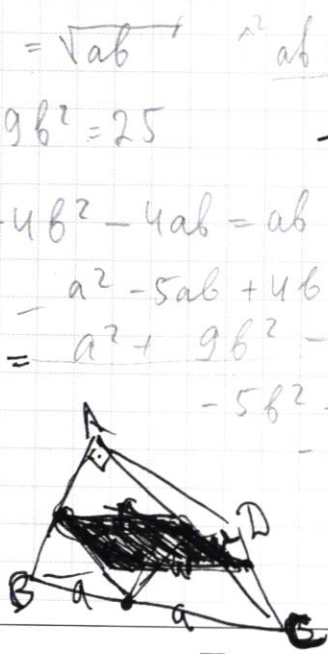
$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \qquad (a-4b)(a-b) = 0$

$\log_{12} 5 + \log_{12} 13 = \qquad a^2 + 9b^2 - 25 = 0$

$= \frac{\log_{12} 5}{\log_{13} 12}$

$-5b^2 - 5ab + 25 = 0$

$-b^2 - ab + 5 = 0$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t^{\log_{13}5\cdot\log_{12}13} - t^{\log_5 13\cdot\log_{12}5} + t \geq 0$

$1 - t^{\log 5^{13}} + t^{\log_5 12} \geq 0 \qquad t^{\log_5 12}\left(1 - t^{\log_5 \frac{12}{13}}\right) \geq -1$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} + 1 \geq 0$

$\frac{-1}{t^{\log_5 12}} = -t^{\log_{12}5}$

$\log_{12}12 = \log_5 12\cdot\log_{12}5$

$125 \times 8{,}5 = 625 \quad 1000 \quad 10625$

$\frac{2\sin 2\alpha}{\sqrt5} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \qquad y = 5$

$f\left(\frac{3}{5}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{5}\right)$

$x = 1$

$f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

4Rr

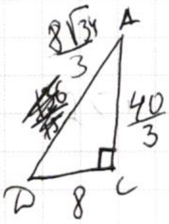
$125\cdot 8 = 250\cdot 4 = 1000$ л

$1 - \frac{4}{5}$

$\pm\sqrt{\frac{1}{5}} \quad \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\begin{cases} R = \frac{85}{6} \\ r = \frac{136}{15} \end{cases}$

$\frac{25}{17}\cdot\frac{136}{15} =$



$AD = \sqrt{\left(\frac{40}{8}\right)^2 + \left(\frac{40}{3}\right)^2} = 40\sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{9}} = 40\sqrt{\frac{34}{25\cdot 9}} = \frac{40}{8\cdot 3}\sqrt{34} = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{34}{3}}$

$AD = \frac{8}{3}\sqrt{34}$

$DE = 3\sqrt{8{,}5}$

$AD\cdot DE = 136$

$DE = 136 : \frac{8\sqrt{34}}{3} = \frac{136\cdot 3}{8\sqrt{34}} = \frac{51}{\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{17}\cdot\sqrt{17\cdot 3}}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{2}} = 3\sqrt{8{,}5}$

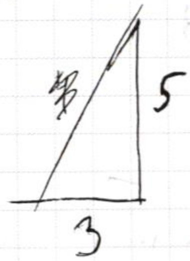
$17 \times 8 = 136$

$AD : DE = \frac{8\sqrt{34}}{3\cdot 3\sqrt{8{,}5}} = \frac{16}{9} \qquad \frac{r}{R-r} =$

$AE = \frac{8\sqrt{34}}{3} + 3\sqrt{8{,}5} =$

$r = \frac{16\cdot 85}{6\cdot 25}\cdot = \frac{136}{15}$

$\frac{136}{15}\cdot\frac{25}{17} = \frac{40}{3}$



$\frac{8\sqrt{17}\sqrt2}{3} + 3\sqrt{17}$

$\frac{1600}{64}$

$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{25} = \frac{34}{}$

$\frac{8\sqrt{34} + 9\sqrt{8{,}5}}{3} = \frac{25}{3} =$

$= \frac{41\sqrt{8{,}5}}{3}$

$17\cdot 8 = AD\cdot DE$

$17\cdot 8 = 32\sqrt{\frac{7}{3}}\cdot x \qquad x = \frac{17\cdot 8}{32\sqrt{\frac{7}{3}}} = 17 : \sqrt{\frac{28}{3}} = 17\sqrt{\frac{3}{28}}$

$8\sqrt{\frac{28}{3}} + 17\sqrt{\frac{3}{28}} \qquad \frac{r}{R-x} = \quad 8\sqrt{\frac{28}{3}} : 17\sqrt{\frac{3}{28}} = \frac{8\cdot 28}{17\cdot 3} = \frac{136}{15} : O_2X$

$O_2X = \frac{136\cdot 17\cdot 3}{15\cdot 8\cdot 28} = \frac{289}{140}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

20001112

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$ $\quad x^2+18x \geq 0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} - (x^2+18x)^{\log_{12}13} + x^2+18x \geq 0$

$\sin\alpha + \sin\beta =$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$5^{\log_{12}t} - t^{\log_{12}13} + t \geq 0$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$5^{\log_{12}t}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta$

$\log_{12}t = \log_5 t \cdot \log_{12}5$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$

$(5^{\log_5 t})^{\log_{12}5} - t^{\log_{12}13} + t \geq 0$

$\log_a b = \log_c b \cdot \log_a c$

$t^{\log_{12}5} - t^{\log_{12}13} + t^{\log_{12}12} \geq 0$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}} - t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1 \geq 0$

$\log_{12}12 = \log_{13}12\cdot\log_{12}13$

$\underbrace{t^{\log_{12}5}}_{>0}\left(1 - t^{\log_{12}\frac{13}{5}} - t^{\log_{12}\frac{12}{5}}\right) \geq 0$

$\log \quad t^{\log_{12}\frac{13}{5}} - t^{\log_{12}\frac{12}{5}} \leq \cancel{t}$

$x(x+18) > 0$ $\quad t^{\log_{12}}$

$-18 \quad 0 \quad x$

$\underbrace{\log_{12}5}_{a} = \underbrace{\log_{13}5}_{c}\cdot\underbrace{\log_{12}13}_{b}$

$\log_{12}12 - \log_{12}13$

$\log_{12}5 = \log_{25}5\cdot\log_{12}25$

$\log_{12}5 = \log_{13}5\cdot\log_{12}13$

$0{,}5\log_{12}25$

$\cancel{\log}\ \frac{0{,}5}{\cancel{\log_{12}25}}$

$\log_{12}13 = \log_5 13\cdot\log_{12}5$

$\log_{12}5 = 0{,}5\log_{12}25 = 0{,}5\log_{13}25\cdot\log_{12}13$

$t^{\log_{12}5} = t^{0{,}5\log_{13}25\cdot\log_{12}13} - t^{\log_{12}13} + t \geq 0$

$t^{\cancel{0{,}5}\log_{13}5} - 1 + t^{\log_{13}12} \geq 0$

$t^{\log_{12}5} + t^{\cancel{\log}} \geq t^{\log_{12}13}$

$\log_{12}\cancel{5} \ \cancel{+\log}\ 13 = \log_{12}5 = a$

$\log_{12}13 = b$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

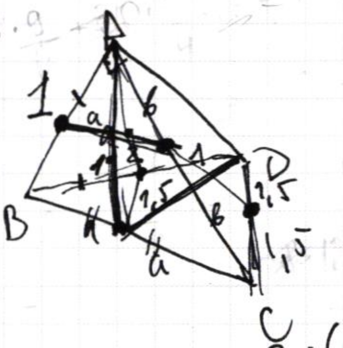
(Нумеровать только чистовики)

$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2 - 30x - 17$

$\frac{1}{2}\sqrt{26 - 4a^2}$

$\left(-\frac{15}{8}; \frac{89}{8}\right)$

$\begin{cases} 2a+b=-1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases}$ $\quad b=-1-2a$



$a^2 + \cancel{1} + 4a^2 + 4a = \cancel{1}$

$5a^2 + 4a = 0$

$a = 0 \qquad 5a+4=0$

$5a = -4$

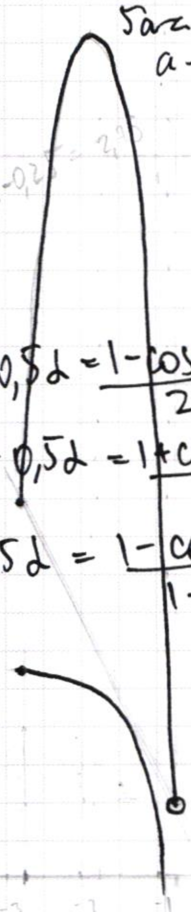
$a = -\frac{4}{5}$

$2 \cdot (4+9)$

$4a^2 - 1$

tg

$-\frac{4}{5} \qquad -1 + \frac{8}{5} =$



$\sin^2 0{,}5\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{2}$

$\cos^2 0{,}5\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{2}$

$\mathrm{tg}^2 0{,}5\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

$3 + \frac{2}{4x+3} = ax+b$

$-\frac{11}{4}a + b = 5$

$b = 5 + \frac{11a}{4}$

$3 + \frac{2}{4x+3} = ax + 5 + \frac{11a}{4}$

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(\frac{1}{y}) = f(1) + f(\frac{1}{y})$

$-\frac{11a}{4} + b = 5$

$-\frac{3a}{4} + b = 1$

$\frac{-11a+3a}{4} = 4$

$-8a = 16$

$a = -2$

$+\frac{22}{4} + b = 5$

$b = 5 - 5{,}5 = -0{,}5$

$+\frac{6}{4} + b = 1$

$1{,}5 + b = 1$

$b = -0{,}5$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$x = 1 \qquad f(y) = f(1) + f(y)$

$f(1) = 0$

~~$f(2 \cdot 4 y) = f(24)$~~

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = ?$

$f(2b) = \underbrace{f(2)}_{=0} + f(b)$

$f(4b) = f(\cancel{b}) + f(4)$

$f(4 \cdot 2) = f($

$f(b) = f(2b) = f(3b)$

$f(5) = 1$

$f(6) - ?$

$f(7) = 1$

$f(8)$

$f(9)$

$f(10)$

$f(11) = 2$

$f(12) =$

$f(13) = 3$

$f(14)$

$f(15)$

$f(16)$

$f(17) = 4$

$f(18)$

$f(19) = 4$

$f(20)$

$f(21)$

$f(22)$

$f(23) = 5$

$f(24) =$

$2x + \frac{2}{4x+3} + 3{,}5 = 0$

$2x(4x+3) + 3{,}5(4x+3) + 2 = 0$

$8x^2 + 6x + 14x + 12{,}5 = 0$

$8x^2 + 20x + 12{,}5 = 0$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$

$(4x+5)^2 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)