МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР 20001948

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$
$= \sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = 2\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta +$
$+ 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot$
$\cos 2\alpha) = 2\cos 2\beta \cdot \underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{= -\frac{1}{\sqrt5}} = 2\cos 2\beta \cdot -\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

① ситуация: $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$; $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$ $\quad \cos\alpha \neq 0$ т.к. $tg\alpha$ определён по условию.

$\Rightarrow 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \Rightarrow 2tg\alpha + 1 = 0 \Rightarrow tg\alpha = -\frac{1}{2}$

② ситуация $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$; $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1$

$2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0 \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \Rightarrow \text{т.к. } \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow 2 + tg\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = -2 \end{array}\right.$

~~Т.к. мы получили три значения то все они существ.~~

~~Ответ: 0; −2; −1/2~~

Найденные значения существуют т.к. по условию не менее 3 ответов

Ответ: $0; -2; -\frac{1}{2}$

№2

$$\begin{cases} x-2-(2y-2)=\sqrt{y(x-2)-(x-2)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Замена: $x-2=a$

$y-1=b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$a-2b\geq 0$

(1) $a^2-4ab+4b^2=ab$ при условии: $a-2b\geq 0$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$(a-4b)(a-b)=0 \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a-2b\geq 0 \end{cases}$

① случай: $a=b$

$b^2+9b^2=25 \Rightarrow b^2=\frac{25}{10}$ $b^2=\frac{5}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ a=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} \sqrt{\frac{5}{2}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}<0 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{5}{2}};\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \text{ решением не является} \\ -\sqrt{\frac{5}{2}}+2\sqrt{\frac{5}{2}}>0 \Rightarrow \left(-\sqrt{\frac{5}{2}};-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \text{ является решен.} \end{array}$

② случай: $a=4b$

$16b^2+9b^2=25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=-4 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} 4-2\geq 0 \\ -4+2<0 \end{array} \Rightarrow$

$(4;1)$ является реш., а $(-4;-1)$ не является.

Обратная замена:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3

Т.к. $x^2+18x>0$ (условие существов. логарифма) $\Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$. Замена $x^2+18x = t$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

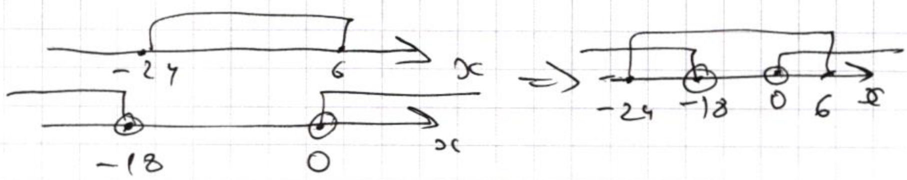
Заметим, что $t^{\log_{12}13} = 13^{\log_{12}t}$, т.к. если взять от обоих частей рав-ва $\log_{12}$ то получится $\log_{12}13 \cdot \log_{12}t = \log_{12}13 \cdot \log_{12}t$; $t = 12^{\log_{12}t} \Rightarrow$ неравенство принимает вид:

$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$ замена $\log_{12}t = a$

$5^a + 12^a \geq 13^a$; 5^a - монотонно возр. ф-ия; 12^a монотонно возр ф-ия; $\Rightarrow 5^a+12^a$ - монотонно возр ф-я по св-у монотонно возр. ф-ий; 13^a также монотонно возр. $\Rightarrow$ ~~ф-ии $f(a)=5^a+12^a$ и $\varphi(a)=13^a$ могут пересекаться только 1 раз~~. ф-ия $f(a) = 5^a+12^a-13^a$ является либо монотонно возрастающей либо монотонно убывающей, а значит нет если x_0 является корнем, то решением неравенства $f(a)\geq 0$ является промежуток либо $(-\infty; x_0]$ либо $[x_0; +\infty)$. $5^a+12^a=13^a$ имеет единственный очевидный корень 2 ($\text{т.к. } 25+144=169$). Подставим 1 получим, что $5+12>13 \Rightarrow$ нам подходит промежуток $\leq 2 \Rightarrow a \leq 2 \Rightarrow \log_{12}t \leq 2 \Rightarrow \log_{12}t \leq \log_{12}144$ т.к. $\log_{12}t$ возр ф-ия

$\Rightarrow t \leq 144 \Rightarrow \begin{cases} x^2+18x \leq 144 \\ x^2+18 > 0 \end{cases}$ - условие сущ. логариф.

$$\begin{cases} x^2+18x-144 \le 0 \\ x^2+18x \ge 0 \end{cases}$$



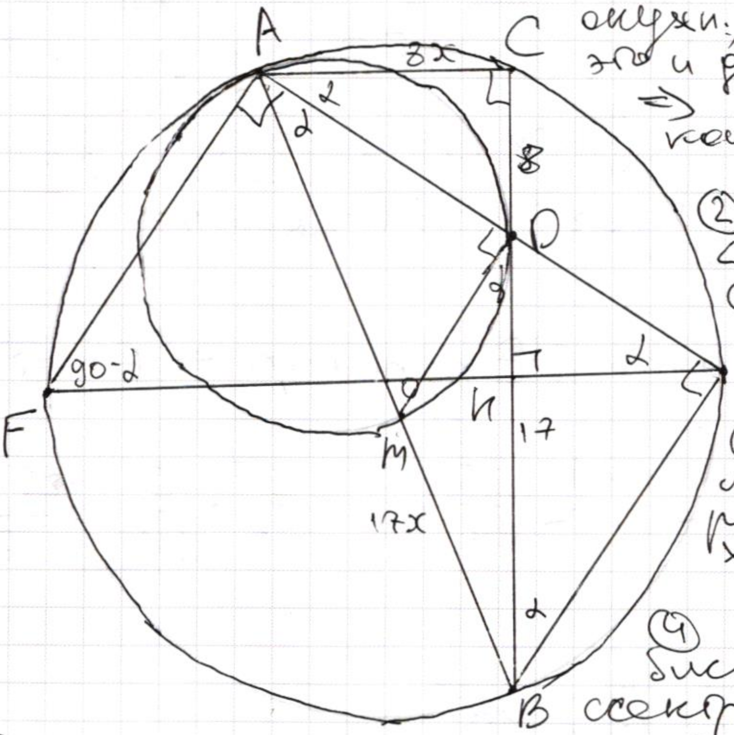
Ответ: $[-24; -18] \cup [0; 6]$ +1

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

20001948
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① Т.к. AB диаметр (большой окружн., а т.к. окружн. касается её и диаметр меньш. окр.) $\Rightarrow \angle ACB = \angle AEB = \angle MDA = 90^\circ$ как углы опир. на диаметр



② Пусть $\angle DBE = \alpha$, тогда $\angle CAD = \alpha$ как впис. углы.

③ $MD \perp AE$ и $BE \perp AE \Rightarrow MD \parallel BE \Rightarrow \angle MDB = \angle EBD = \alpha$ как накрест леж.

③ $\angle MAD = \angle MDB$ т.к. угол между касат. и хордой равен углу опир. на хорду.

④ $\angle CAD = \angle BAD = \alpha \Rightarrow AD$ биссектр. $\Rightarrow$ по св-у биссектр: $AC : AB = CD : DB = 8x : 17x$ (+1)

⑤ По теореме Пифаг. $\triangle ACB$: $AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow$

$64x^2 + 25^2 = 289x^2 \Rightarrow 25^2 = 225x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow AB = 2R = 17x \Rightarrow \boxed{R = \frac{17}{2}x = \frac{17}{2}\cdot\frac{5}{3} = \frac{85}{6}}$ ✓ (+1)

⑥ Пусть O центр окружн. тогда $AB = 2R$; $BM = 2R - 2r$.

По теореме о касат. и сек.: $BD^2 = AB \cdot BM = 2R\cdot(2R-2r)$

$= 4(R^2 - Rr) = 17^2 \Rightarrow 4\left(\frac{85^2}{6^2} - \frac{85}{6}r\right) = 17^2$

$4\left(\frac{17\cdot 25}{6^2} - \frac{\cancel{175}\,5}{6}r\right) = 17 \Rightarrow \cancel{\frac{17\cdot 25}{4\cdot 36} - \frac{5}{6}r = 17}$

$\frac{17\cdot 25}{9\cdot 4} - \frac{17}{4} = \frac{5}{6}r \Rightarrow \frac{17\cdot 25 - 17\cdot 9}{9\cdot \cancel{4}\, 6} = \frac{5}{\cancel{6}}r \Rightarrow \frac{17\cdot \cancel{16}\,8}{15} = \boxed{r =}$

$\boxed{= \frac{136}{15}}$ ✓ (+1)

⑦ $\angle ABE = 90° - \angle BAE = 90° - \alpha$; $\angle ABE = \angle AFE$ как впис углы опир на 1 хорду $\Rightarrow \angle AFE = 90° - \alpha$

⑧ $\triangle BBE$ прямоуголь ; $\angle DBE = \alpha \Rightarrow \angle HEB = 90 - \alpha$; $\Rightarrow \angle DEK = 90 - (90 - \alpha) = \alpha = \angle AEF = \Rightarrow \angle AFE + \angle AEF = 90° \Rightarrow FAE$ прямоугол

⑩ $z \cos \cancel{A}AC = \frac{8x}{17x} = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{8}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{34} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$ $\cos\angle AFE = \cos(90 - \alpha) = \sin\alpha$.

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \angle AFE = \underline{\overset{\text{arccos}}{\text{arcsin}}\frac{3}{\sqrt{34}}}$ -1

⑪ По теореме син $\frac{AF}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow AF = 2R \cdot \sin\alpha =$

$= \cancel{2} \cdot \frac{85}{\cancel{6}} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{85}{\sqrt{34}}$

⑫ Т.к. $\angle FAE$ прямой $\Rightarrow$ FE диаметр $\Rightarrow FE = 2R = \frac{85}{3}$

⑬ $S_{\triangle AEF} = \frac{AF \cdot FE \cdot \sin(90 - \alpha)}{2} = \frac{85}{\cancel{\sqrt{34}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{3} \cdot \frac{5}{\cancel{\sqrt{34}}} = \frac{125 \cdot 17}{6 \cdot 2} =$

$= \frac{2125}{12}$

Ответ: $\frac{85}{6}$; $\frac{136}{15}$; $\arcsin\frac{3}{\sqrt{34}}$; $\frac{2125}{12}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6

$y = \frac{12x+11}{4x+3} = \frac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$ асимптоты: ~~$(-\frac{3}{4}; 3)$~~

$x = -\frac{3}{4}$ $\quad y = 3$.

$y = -8x^2 - 30x - 17$ парабол ветви вниз.

$x_в = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$y_в = -8 \cdot \frac{225}{64} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17 = \frac{225 - 17 \cdot 8}{8} = \frac{89}{8}$

$y(-\frac{3}{4}) = -8 \cdot \frac{9}{16} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17 =$

$= -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17 =$

$y(-\frac{11}{4}) = -8 \cdot \frac{121}{16} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17$

$-\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 17 = 4$ нет

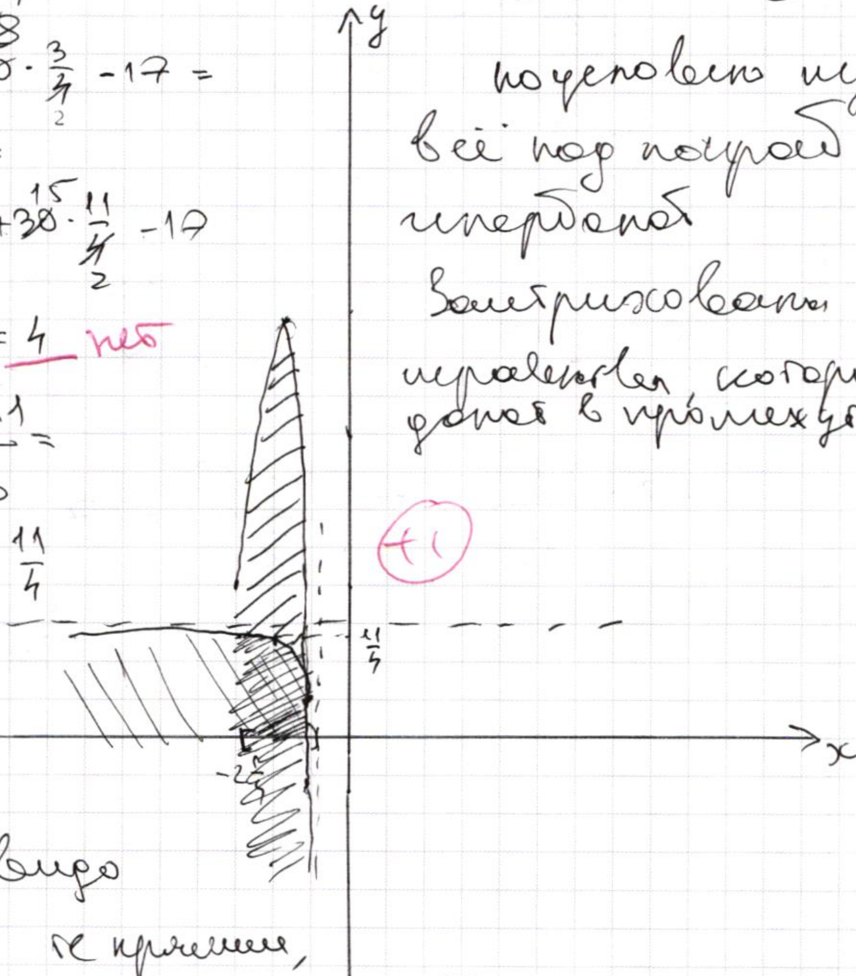
$y(-\frac{11}{4}) = \frac{12 \cdot (-\frac{11}{4}) + 11}{4 \cdot (-\frac{11}{4}) + 3} =$

$= \frac{11 - 33}{3 - 11} = \frac{-22}{-8} = \frac{11}{4}$

по условию нужно всё под параболой и ~~над~~ над гиперболой

Заштрихованы ГМТ решения неравенства, которые попадают в промежуток.

+1



Из графика видно что проходят ГМТ решения, которые ~~лежат под гипрб. и пар~~, которые лежат ~~ниже~~ выше точки $(-1; 1)$, ~~но выше~~ ниже точки $(-2\frac{3}{4}; \frac{11}{4})$, таким образом: $\begin{cases} -a\frac{11}{4} + b \le 4 \\ -a + b \ge 1 \end{cases}$ 5

$\begin{cases} -11a + 4b \le 16 \\ b - a \ge 1 \end{cases}$ ← Ответ подходят все точки $(a; b)$ удовлетворяющие данной систем

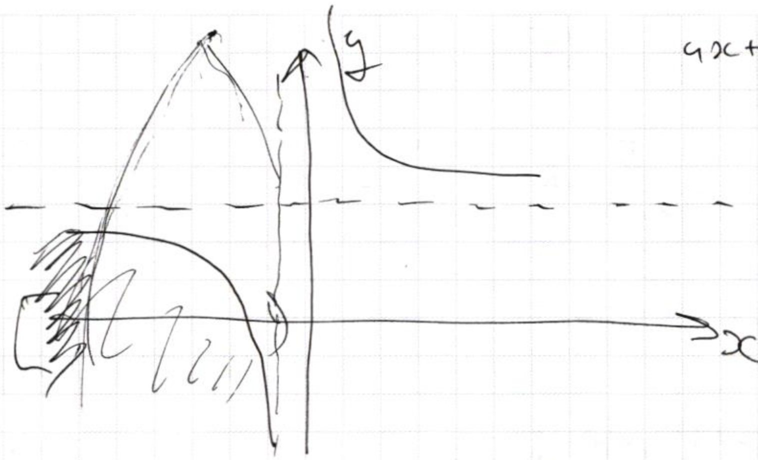
нет

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{3(4x+3) \quad 12x+9+2}{4x+3}$$

$$3+\frac{2}{4x+3}$$



$4x+3=0$
$x=-\frac{3}{3}$

$'' \le 0$

$$\frac{30}{-16}=-\frac{15}{8}$$

$$\frac{89}{8}$$

$-\cancel{8}\cdot\frac{225}{\cancel{64}\,8}+\frac{30\cdot15}{8}-17$

$\frac{225-178}{8}$

$450-225$

$225-136=89$

$17\times8=136$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

20001948

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta \cos 2\alpha$

$2\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha =$

$= 2\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha =$

$= 2\cos^{\cancel{2}} 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cancel{2}\sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha) =$

$= 2\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}$

$+\frac{\cancel{2}}{\sqrt{5}} \cos 2\beta = +\frac{\cancel{4}\,2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

① $\frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} \sin 2\alpha + \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

~~$\frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha$ $\sin(2\alpha +$~~

$\cancel{4}\sin\alpha\cos\alpha \cancel{+} 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2\cos\alpha(\cos\alpha + 2\sin\alpha) = 0$

$\cos\alpha + 2\sin\alpha = 0$

$1 + 2\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0$

$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{1}{2}}$ $\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = 0}$

$2 + \mathrm{tg}\,\alpha = 0$

$\boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = -2}$

$-\cancel{8} \cdot \frac{9}{\cancel{16}_{2}} + \cancel{30}^{15} \cdot \frac{3}{\cancel{4}_{2}} - 17$

$\frac{45}{2} - \frac{9}{2} - 17$

$\frac{36}{2} =$

$-(1 - 2\sin^2\alpha)$

② $\cancel{s}\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha - 1 = -1$ $2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$ $\begin{array}{r} 13 \\ +\ 5 \\ \hline 98 \end{array}$

$3-\frac{2}{37}$ $-40+3$

$\begin{array}{r} 15 \\ 11 \\ \hline 15 \\ 15 \\ \hline 165 \\ -121 \\ \hline 42 \end{array}$

-1 -2 2

-3 -18 12

$\begin{array}{r} 225 \\ -136 \\ \hline 89 \end{array}$

$3+\frac{2}{3-8}$

$3-\frac{2}{5}=2\frac{3}{5}$

$6x^2-24xy+24y^2=6xy-6x-12y+12$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$-\frac{22}{8}$

$9y^2-18y+9$

$9(y^2-2y+1)$

$5x^2-24xy+24y^2-x^2-9y^2+4x+18y=$

$=6xy-6x-12y$

$2\cdot(3y)\cdot 2=18y$

$4x^2-30xy+15y^2+10x+30y=0$

$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 9 \\ \hline 225 \\ -60 \\ \hline 165 \end{array}$

$4x^2+10x(1-3y)+15y^2+30y=0$

$25(1-3y)^2-4(15y^2+30y)=$

$=25-150y+225y^2-60y^2-120y=165y^2-270y+25=$

$(x^2-4x+4)+9y^2-18y+9=25$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$ $\boxed{(x-2)^2+9(y-1)^2=25}$

$x(y-1)-2(y-1)=\boxed{(y-1)(x-2)}$

$x-2=a$

$y-1=b$

$x-2-2y+2=(x-2)-2(y-1)$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+3b^2=25 \end{cases}$ $a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2+b^2=25$

$25b^2-16b^2$

$\frac{5b\pm 3b}{2}=4b;\ b$

$a-b>0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2 0 0 0 1 9 4 8
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{\cancel{35}\cdot\cancel{25}}{\cancel{15}\cdot\cancel{15}} =$

$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+3b^2=25 \end{cases}$ $\begin{cases} (a-4b)(a-b)=0 \\ a^2+3b^2=25 \end{cases}$ $16b^2+3b^2=25$

$4b^2+3b^2=25$

N 3

$t(\cancel{\log}\ t^{\log_{12}13-1}-1)$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}t}+\cancel{t} \geq t^{\log_{12}13}$ $\log_{12}t\cdot\log_{12}5 \geq \log_{12}t$

$\cancel{\log_{12}(5}$ $\log_{12}(5^{\log_{12}t}+t) \geq \log_{12}13\cdot\log_{12}t$

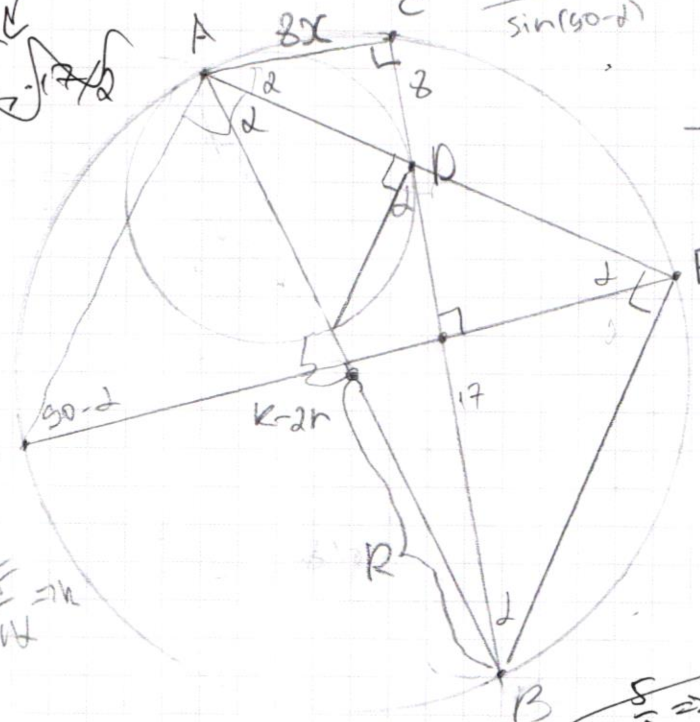
$64x^2+289x^2=25^2$ $5^x=x\cdot\cancel{\log}\ln 5$

$\cancel{\log_{12}t\cdot\ln 5}$

$\frac{AE}{\sin(90-\alpha)}=2R$

$\boxed{AD\cdot BD E=8\cdot17}$

$R=x=\frac{25}{\sqrt{353}}\cdot\frac{17}{2}$



$\frac{CD}{DE}=\frac{AD}{BD}$

$\frac{8}{BE}=\frac{AD}{17}$

AD

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{8x}$

$\frac{AF}{\sin\alpha}=2R$

$\boxed{x=\frac{5}{3}\Rightarrow R=\frac{17x}{2}=\frac{85}{6}}$

$\operatorname{tg}\alpha=$

$2R\cdot(2R-2r)=17^2$

$4(R^2-Rr)=17^2$

$64x^2+25^2=289x^2$

$5^2=9x^2$ $25^2=225x^2$

$289-64=225$

$17\cdot17=289$, $289-64=225$

$\log_{12} t \cdot \log_{12} 5 \geq \log_{12} t(t^{\log_{12} 13 - 1} - 1)$

$\log_{12} t \cdot \log_{12} 5 \geq \log_{12} t \cdot \log_{12}(t^{\log_{12} 13-1} - 1)$

$\log_{12} t(\log_{12} 5 - \log_{12} t^{\log_{12} 13 - 1} - 1) \geq 0$

$(12-1)(5 - 5^{\log_{12} 13 - 1} + 1) \geq 0$

$4\left(\frac{85^2}{6^2} - \frac{85}{6} r\right) = 17 \cdot 17$

$4\left(\frac{17 \cdot 25}{36} - \frac{5}{6} r\right) = 17$ $\qquad 17^2 \cdot 5^2$

$\frac{17 \cdot 25}{36} - \frac{5}{6} r = \frac{17}{4}$

$\frac{17}{4}\left(\frac{25}{9} - 1\right) = \frac{5}{6} r$

$\frac{17}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{5}{\cancel{6}_{2}} r \Rightarrow \boxed{r = \frac{17 \cdot 8}{15}}$ $\qquad \frac{85}{6}$

$\frac{\cancel{85}^{5}}{\cancel{6}_{2}} \cdot \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{17 \cdot 8}} = \frac{25}{1\cancel{8}}$

$\frac{17 \cdot 25 - 17 \cdot \cancel{24}^{36}}{6} =$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$

$(\log_{12} 5 - 1)$

$\cancel{17}\ \frac{8}{17} + 1 = \frac{8+17}{17} = \frac{25}{34}$

$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 17 \\ \hline 875 \\ 125 \\ \hline 2125 \end{array}$

$\log_{12} t \log_{12} \frac{5}{12} \geq \log_{12} t^2 - 1$

$t^{\log_{12} \frac{5}{12}} \geq t^2 - 1$

$t^{\log_{12} 5 - 1} \geq \log_1$

$5^{\log_{12} t} \geq t(t^{\log_{12} 13 - 1} - 1)$

$\log_{12} t \cdot \log_{12} 5 \geq \log_{12} t(t^{\log_{12} 13 - 1} - 1)$

$\log_{12} t\ \cancel{\cdot} \log_{12} 5 \geq \log_{12} t + \log_{12} t^{\log_{12} 13 - 1} - 1$

☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

20001948

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~N3~~

$\cancel{5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x}$

~~Из условия существования логарифма $x^2+18x>0$~~

~~$\Rightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$; Замена $x^2+18x=t$~~

$\cancel{5^{\log_{12}t}\ \cancel{t} \geq t^{\log_{12}13}-t}$

$t^{\log_{12}5-1} \geq t^{\log_{12}13}-1$ $\quad \log_{12}13-\log_{12}5+\log_{12}12$

$\log_{12}\frac{13}{5}+\log_{12}12$

$t^{\log_{12}5-1}-t^{\log_{12}13}+1\geq 0$ $\quad \log_{12}\frac{13\cdot 12}{5}$

$t^{\log_{12}5-1}\left(1-t^{\log_{12}\frac{13\cdot12}{5}}\right)+1\geq 0$

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$\log_{12}13\ t^{\log_{12}13-1}$

$a\geq 2$

$\log_{12}t\cdot\ln 5\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\cdot\cancel{\ln}\ln 2+t^{2} \quad x = x\cdot\ln 2$

$\log_2 x = \frac{1}{x\ln 2}$

$(13-12)^a+12^a\geq 13^a$ $\quad \ln x = \frac{1}{x}$

$\frac{t\cdot\log_{12}t\cdot\ln 5\ln 2+t^2}{t}$

$\cancel{t\left(-\frac{12}{5}\right)}$

$\log_{13}13^{\log_{12}t}$

$\log_{12}\left(5^{\log_{12}t}+t\right)\geq\log_{12}13\cdot\log_{12}t$ $\quad 12^{\log_{12}t}$

$\log_{13}\frac{5^{\log_{12}t}+t}{}\geq\log_{12}t$

$5^a+12^a\geq 13^a$ $\quad 5^{\log_{12}t}+t\geq 13^{\log_{12}t}$ $\quad 5^a+t=13^a$

$a\geq 2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

$5^9 \cdot \ln 5 + 12^9 \cdot \ln 12 - 13^9 \cdot \ln 13$

$\begin{array}{r} 4 \\ 18 \\ \times 6 \\ \hline 108 \\ +36 \\ \hline 144 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1 \\ 17 \\ 8 \\ \hline 25 \end{array}$

$\frac{AE}{\cos\alpha} = \frac{85}{3}$

$AE = \frac{85}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\frac{AF}{\frac{3}{\sqrt{34}}} = \frac{85}{8}$

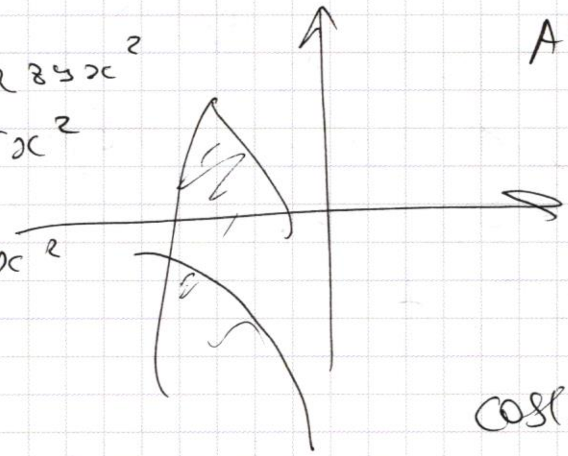
$\frac{\frac{85}{\sqrt{34}} \cdot \frac{85}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}}}{2}$

$64x^2 + 25^2 = 289x^2$

$25^2 = 225x^2$

$5^4 = \cancel{5}^2 \cdot 3^2 x^2$

$x = \frac{5}{3}$



$\cos(90 - \alpha) = \sin\alpha$

$\frac{17 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{85}{6}$

$4b - 11a \le 16$

$b - a > 1$

$4b - 4a - 7a \le 16$

$4 > \quad -7a \le 11$

$\frac{17 \cdot 5 \cdot \cancel{17} \cdot 5 \cdot 5}{\cancel{17} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{}{12}$

$\begin{array}{r} 5 \\ 17 \\ \times 8 \\ \hline 136 \end{array}$

$\begin{array}{r} 13 \\ 125 \\ 17 \\ \hline 875 \\ 125 \\ \hline 2125 \end{array}$

$17^2 \cdot 5^2$

$a \ge -\frac{11}{7}$

$4\left(\frac{85^2}{36} - \frac{85}{6} r\right) = 17^2 \quad b > 1$

$\cos 2\alpha = \frac{8}{17} =$

$4\left(\frac{17 \cdot 5^2}{36} - \frac{5}{6} r\right) = 17$

$= 1 - 2\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha = \frac{9}{17}$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\frac{17 \cdot 5^2}{36} - \frac{17}{4} = \frac{5}{6} r$

$\frac{17 \cdot 5^2 - 17 \cdot 9}{\cancel{36}\ 6} = \frac{5}{\cancel{6}} r$

$\frac{17(25 - 9)}{30} = r$

$\frac{17 \cdot 16}{30} = r$

$\frac{17 \cdot 8}{15}$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

20001948

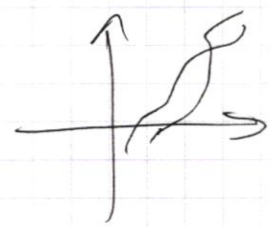
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq 13^{\log_{12} t}\ 13^{\log_{12} t}$



$5^a + 12^a \geq 13^a$

$a = 2$ $\quad a \leq 2 \quad \log_{12} t \leq \log_{12} 144$

$0 < t \leq 144$

$\begin{array}{r} 144 \\ 81 \\ \hline 225 \end{array}$

$x^2 + 18x - 144 \leq 0$

$12 \cdot 12$

$\frac{-9 \pm 15}{\cancel{2}} = \cancel{3; -12}$

$6; -24$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)