МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

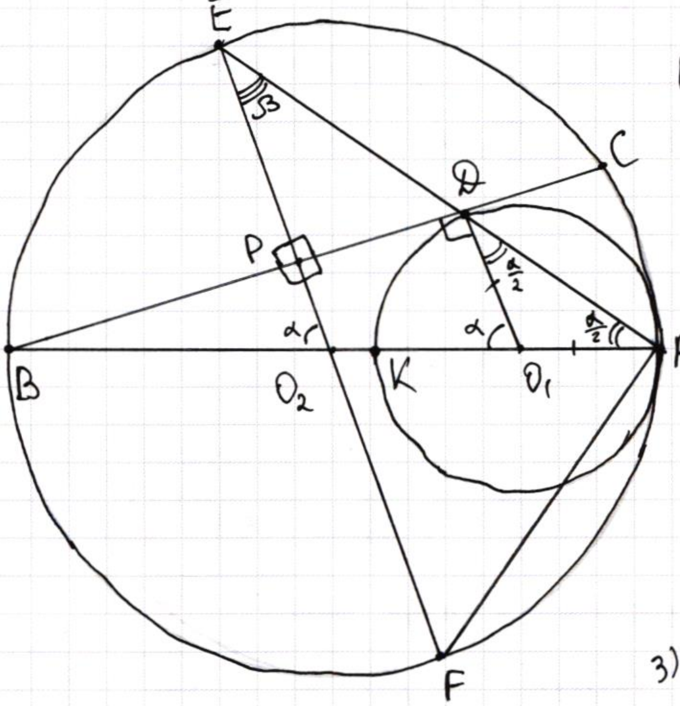
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$ $\quad r - ?$ $R - ?$ $S_{AEF} - ?$ $\angle AFE - ?$



1) Пусть O_1 – ц. окр-ти ω, r – её радиус; ~~...~~ Ω, R – радиус. Ω

Пусть $BC \cap EF = P$; $AB \cap EF = O_2$

2) $O_1D \perp BC$ (рад. к касат.)
$FP \perp BC$ (по усл.)

Зн, $FP \parallel O_1D$. Тогда $\angle BO_2P = \angle BO_1D = \alpha$ (из подобия пр/уг-ных $\triangle BPO_2$ и $\triangle BDO_1$)

3) $\angle BO_1D$ – внешн. угол для $\triangle O_1DA \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle O_1AD + \angle O_1DA = \angle BO_1D = \alpha$. $\triangle O_1DA$ – р/б ($O_1A = O_1D = r$)
Тогда $\angle O_1AD = \angle O_1DA = \frac{1}{2}\alpha$

4) $\angle BO_2E = \alpha$; $\angle BAE = \frac{\alpha}{2}$; оба угла опираются на $\overset{\frown}{BE}$, причем $\angle BAE$ – вписан в Ω. Значит, $\angle BO_2E$ – центр. угол. Тогда т. O_2 – ц. окр-ти Ω

5) BC – хорда; EF – диаметр; $BC \perp EF \Rightarrow$ т. P – сер. BC
$BC = CD + BD = \frac{5}{2} + \frac{13}{2} = \frac{18}{2} = 9$; $BP = PC = \frac{1}{2}BC = \frac{9}{2}$

6) • По т. о квадрате касат. и сек.: $BD^2 = BK \cdot BA$
$BK = 2R - 2r$; $BA = 2R$, т.е. $\left(\frac{13}{2}\right)^2 = 2R \cdot 2(R-r) = 4R(R-r)$

• $\triangle BPO_2 \sim \triangle BDO_1 \Rightarrow \frac{BO_2}{BO_1} = \frac{BP}{BD}$. $BO_2 = R$; $BO_1 = 2R - r$
$BP = \frac{9}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$. Тогда $\frac{R}{2R-r} = \frac{9}{13} \Rightarrow 13R = 18R - 9r$

Система ур-ний:

$$\begin{cases} 9r = 5R \\ \left(\frac{13}{2}\right)^2 = 4R(R-r) \end{cases} \qquad r = \frac{5}{9}R \qquad \left(\frac{13}{2}\right)^2 = 4R\cdot\left(R-\frac{5}{9}R\right) \quad (1)$$

$$(1):\ \left(\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{4R\cdot 4R}{9} \Rightarrow \frac{13}{2} = \frac{4R}{3} \Rightarrow \boxed{R=\frac{39}{8}}$$

$$R = \frac{39}{8}$$

$$r = \frac{5}{9}\cdot\frac{39}{8} = \frac{5\cdot 13}{3\cdot 8} = \frac{65}{24}\ ;\ \boxed{r=\frac{65}{24}}$$

7) • Пусть $\angle FEA = \beta$. ΔEAF – впис., опир. на диаметр EF $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow \Delta EAF$ – пр/уг. $\angle EFA = 90^\circ - \beta$

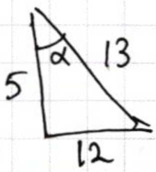
• Из ΔPDE – пр/уг: $\angle PDE = 90^\circ - \beta$

• $\angle PDE = \angle CDA = 90^\circ - \beta$ (вертик.)

• $\angle ODC = 90^\circ \Rightarrow \angle ODA = 90^\circ - \angle ADC = \beta = \frac{\alpha}{2}$, т.е. $\beta = \frac{\alpha}{2}$

8) Р/м пр/уг ΔBPO_2 : $\angle BO_2P = \alpha$

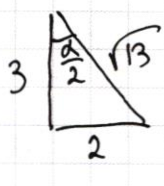
$$\sin\alpha = \frac{BP}{BO_2} = \frac{BP}{R} = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 39} = \frac{4\cdot 3}{13} = \frac{12}{13}$$



Тогда $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ (угол острый, т.к. в пр/уг Δ-ке)

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}\ ;\ \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}\ ;\ \frac{\alpha}{2} = \beta$$



$$\angle EFA = 90^\circ - \beta$$

$$\sin\angle EFA = \sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta = \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\boxed{\angle EFA = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}}$$

9) • $EF = 2R = \frac{39}{4}$

• По т. синусов в ΔAFE (вписан в Ω)

$$\frac{AF}{\sin\beta} = 2R \Rightarrow AF = \frac{39}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$$

• $EA = EF\cdot\cos\beta = 2R\cos\beta = \frac{39}{4}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}\cdot 3}{4} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

• $S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF = \frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{2} =$

$$= \frac{27\cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{\text{Ответ: } r=\frac{65}{24};\ R=\frac{39}{8};\ \angle AFE=\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}};\ S_{AEF}=\frac{351}{16}}$

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

Усл. *: $x^2+6x>0$, $x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

Из усл. *: $|x^2+6x|=x^2+6x$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geqslant (x^2+6x)^{\log_4 5}$

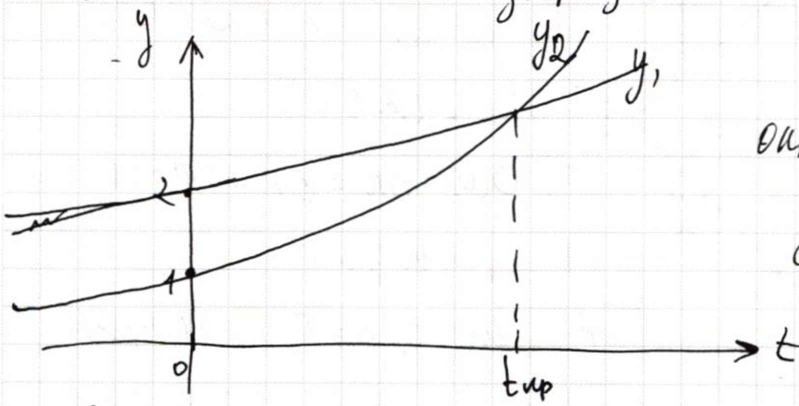
$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)} \geqslant 5^{\log_4(x^2+6x)}$

Пусть $\log_4(x^2+6x)=t$, тогда

$3^t+4^t\geq 5^t$

Р/м ф-ции $y_1=3^t+4^t$ и $y_2=5^t$

Схематически изобразим их графики:



Из графика видно, что до определенного момента $y_1>y_2$. В некот. точке $y_1=y_2$, далее $y_2<y_1$ $\forall t$, больших крит. значения. $t_{кр}$.

Значит, ~~урав-на~~ нер-во $y_1\geq y_2$ имеет реш. при $t\leq t_{кр}$

$3^t+4^t=5^t$, $t=2$ $(9+16=25)$

Обр. замена:

$\log_4(x^2+6x)\leq 2$

$\log_4 (x^2+6x) \le \log_4 16$

Метод рационализации:

$(4-1)(x^2+6x-16) \le 0$

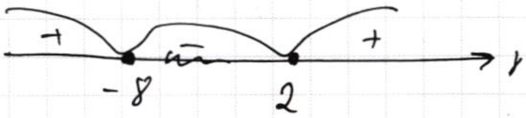
$x^2+6x-16 \le 0$

$(x+8)(x-2) \le 0$

$x^2+6x-16=0$

$D_1 = 9+16 = 25 = 5^2$

$\left[\begin{array}{l} x = -3-5=-8 \\ x=2 \end{array}\right.$



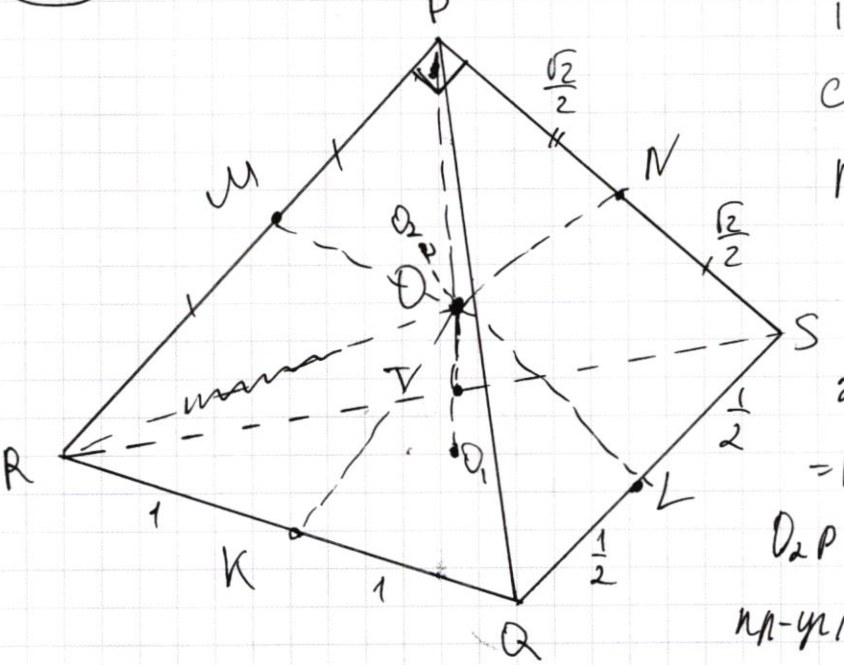
$x \in [-8;2]$

Соглас. с усл. (*):

$\begin{cases} x \in [-8;2] \\ x \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty) \end{cases}$ $x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

$\boxed{\text{Ответ: } x \in [-8;-6) \cup (0;2]}$

№7



1) Пусть O - ц. искомой сферы; M, N, L, T, K - серед. ребер (см. рис.)

O_2 - пр-ция т. O на (RSP)

$OO_2 \perp (RSP)$

2) $OM = ON = OT = OP = OK = OL =$
$= R$ - радиус

$O_2P = O_2M = O_2N = O_2T$ (из рав-ва пр-уг/ных $\triangle O_2OM, O_2OP, O_2ON, O_2OT$)

3) $P \in (RSP)$. Пусть ω_2 - ~~сфера~~ окр-ть с ц. O_2 в пл-ти RSP, т.е. ω_2 - сечение сферы пл-тью (RSP)

Точки $P, M, T, N \in \omega_2 \Rightarrow PMTN$ - впис. 4-уг-ник

но также PMTN - парал-м

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(т.к. $NT \parallel AP$ - ср. лин; $MT \parallel PS$ - ср. лин.)

Если парал-м вписан в окр-ть, то этот парал-м - пр/уг-ник. Значит, $TMON$ - пр-уг-ник и $\angle MON = 90°$.

Зн, $ON = MN$ ~~...~~

4) Р/м пл-ть (RQS):

Пусть ω_1 - окр-ть с ц. O_1 - сеч. сферы пл-тью (RQS)

$O_1O \perp (RQS)$

$T, K, L \in \omega_1 \Rightarrow \triangle TKL$ вписан в ω_1

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

1) P/м $f_1(x) = 8x^2 - 34x + 30$ – квадр. ф-ция, график парабола, ветви ↑

$x_в = \frac{34}{16} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$

$y_в = 8\cdot\left(\frac{17}{8}\right)^2 - \frac{34\cdot 17}{8} + 30 = \frac{17^2}{8} - \frac{2\cdot 17^2}{8} + 30 = -\frac{17^2}{8} + 30 =$

$= \frac{-289+240}{8} = -\frac{49}{8} = -6\frac{1}{8}$

$f_1(1) = 8 - 34 + 30 = 4$

$f_1(3) = 8\cdot 9 - 34\cdot 3 + 30 = 72 + 30 - 102 = 0$

2) P/м $f_2(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$

$D(f) = x \neq 1$

$\lim\limits_{x\to 1+0} \frac{4x-3}{2x-2} = +\infty \Rightarrow x = 1$ – асимптота

$f_2'(x) = \frac{(4x-3)'(2x-2) - (4x-3)(2x-2)'}{(2x-2)^2} = \frac{4(2x-2) - 2(4x-3)}{(2x-2)^2} =$

$8x - 8 - 8x + 6 = -2 < 0 \Rightarrow f(x)$ уб. $\forall x \in D(f)$

$f_2(2) = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2}$; $f_2(3) = \frac{12-3}{6-2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

3) $8x^2 - 34x + 30 = 0$

$D_1 = 17^2 - 240 = 49 = 7^2$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{17-7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} \\ x = \frac{17+7}{8} = 3 \end{array}\right.$

4) P/м $y = ax + b$; $y \geq f_1(x)$ и $y \leq f_2(x)$

Если $a = 0$: $y = b$ – прямая, ||-ная оси x

Если $a \neq 0$: $y = ax + b$ – накл. прямая

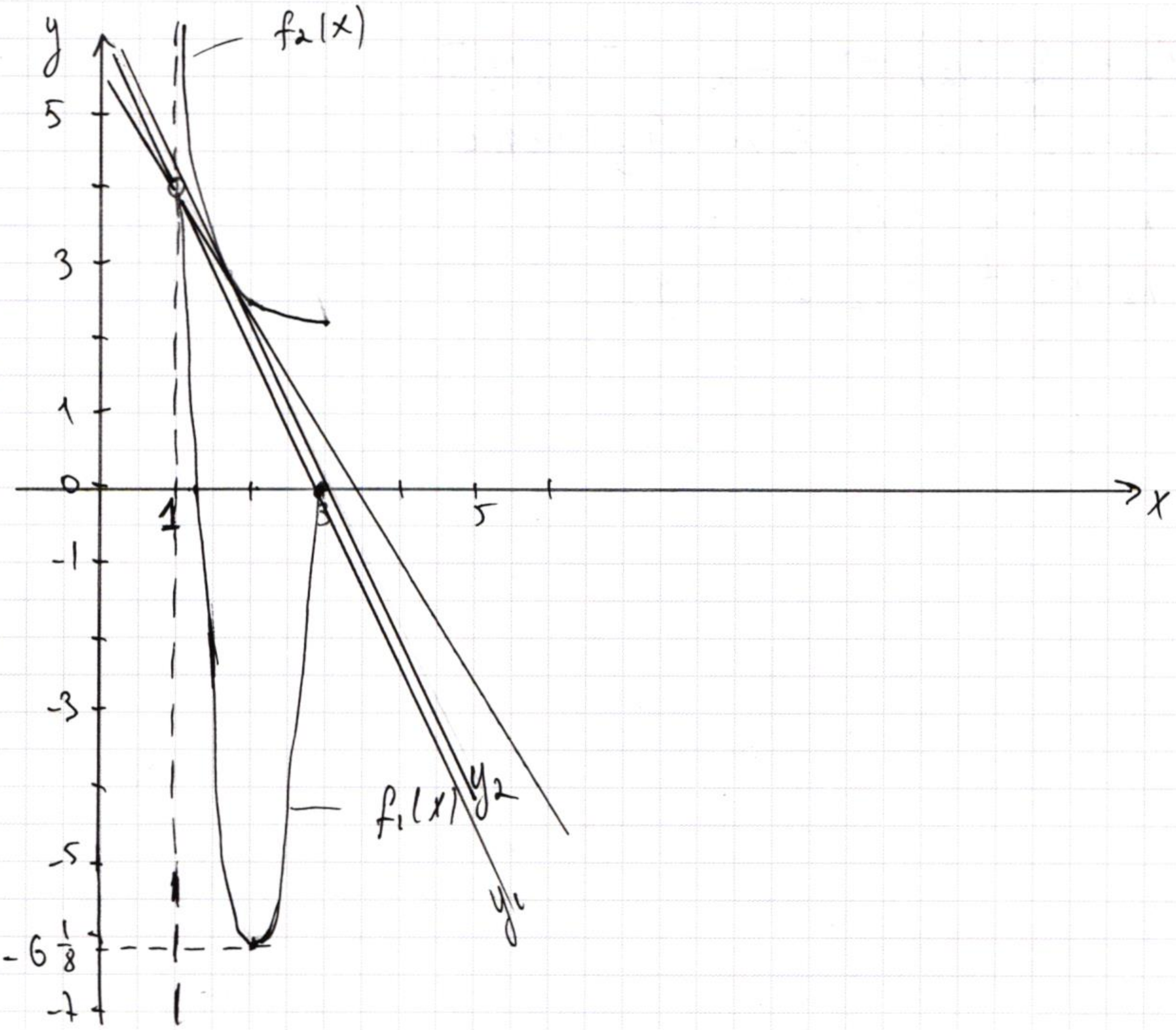
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



4) Ур-ние касат. к графику ф-ции $f_2(x)$

$y_{кас} = f_2(x_0) + f_2'(x_0)(x-x_0)$, где x_0 – ордината т. касания

5) $\begin{cases} y_1 \text{ – погр. случай, не входит в решение} \\ y_2 \text{ – погр. случай, входит в решение } (y_2 = y_{кас}) \end{cases}$

y_1: $(1;4)$; $(3;0)$

$\begin{cases} 4 = a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases}$ $-$ $\quad 2a = -4 \quad a = -2 \quad b = 4 - a = 6$

$y_1 = -2x + 6$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$y_2 \parallel y_1 \Rightarrow k_2 = k_1 = -2$

y_2 - касат. к $f_2(x)$; т.кас. x_2

$f_2'(x) = \frac{-2}{4(x-1)^2} = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

$k_2 = f_2'(x_2) \Rightarrow -2 = -\frac{1}{2(x_2-1)^2}$

$(x_2-1)^2 = \frac{1}{4}$, $x_2 > 0$ (из графит)

$\left[\begin{array}{l} x_2 - 1 = \frac{1}{2} \\ x_2 - 1 = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x_2 = \frac{3}{2} \ + \\ x_2 = \frac{1}{2} \ \text{- неуд.} \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3y(x-1)-2(x-1)=(3y-2)(x-1)$

$3y-2+2-2x=3y-2-2(x-1)$

$3y-2x=a$; $3xy+2=b \Rightarrow a=\sqrt{a+b}$

~~$3y^2-6x=3$~~

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$3y^2=3y^2-2xy+2xy=y(3y-2x)+2xy$

$3x^2=-2x^2+5x^2=5x^2+3xy-2x^2=5x^2+x(3y-2x)$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+4x^2=2-2x-3y$

$9y^2+3y+4x^2+2x=15xy+2$

$(3y)^2+2\cdot 3y\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+(2x)^2+2\cdot 2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=$

$=15xy+2$

$(3y+\frac{1}{2})^2+(2x+\frac{1}{2})^2=15xy+\frac{3}{2}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x\geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$

$x^2+6x=4^{\log_4(x^2+6x)}$

$3^t+4^t\geq 5^t$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}+x^2+6x\geq(x^2+6x)^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}+t^{1}-t^{\log_4 5}\geq 0$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

~~$3y^2-2y+2y=3y(y-2)+2y$~~

$y(3y-2)+3x^2-6x-2y=4$

$y(3y-2)+$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\cancel{f(ab) = f(a) + f(b)}$ $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

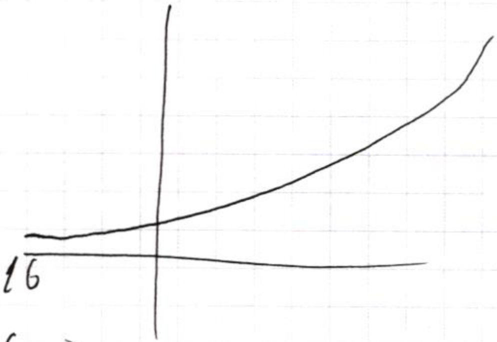
$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

$x^2+6x = (x+3)^2 - 9$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq \underbrace{5}_{\text{растет быстрее}}{}^{\log_4(x^2+6x)}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} = 5^{\log_4(x^2+6x)}$



$3^t + 4^t \geq 5^t$

$3^t + 4^t = 5^t$

$t = 2:$

$\log_4(x^2+6x) = 2$ $\qquad x^2+6x = 16$

$x^2+6x-16=0$

$D_1 = 9+16 = 25 = 5^2$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$(3^t+4^t)' = 3^t \cdot \ln 3 + 4^t \cdot \ln 4$

$(5^t)' = 5^t \cdot \ln 5$

$3^t \cdot \ln 3 + 4^t \cdot \ln 4 = 5^t \cdot \ln 5$

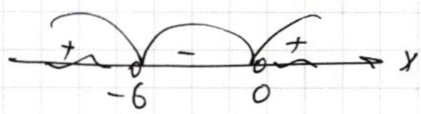
$\ln 3 + \left(\frac{4}{3}\right)^t \cdot \ln 4 = \left(\frac{5}{3}\right)^t \cdot \ln 5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

Уш. (*): $x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$



$x \in (-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

Выкл.

Если $x^2+6x-1=0$ $\quad D_1 = 9+1=10 \quad x=-3\pm\sqrt{10}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

Пусть $x^2+6x=t$, $t>0$

$t^{\log_4 3} + t - t^{\log_4 5} \geq 0$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$\log_4(t^{\log_4 3}+t) \geq \log_4 t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} \geq -t \quad |:t$

$t^{\log_4 3-1} - t^{\log_4 5-1} \geq -1$

$\log_a b -$

$a^x - a^y \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)(x-y)\geq 0$

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$$

Усл. *: $3xy-2x-3y+2 \geq 0$

(2): $3x(x-2x)+y(3y-4)=4$

(1): $3y-2x=\sqrt{}$

(1): $9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x+3y+2$

(2): $3(3y-2x$

$9y^2-15xy+4x^2=3y-2x+2$

$(3y-2x)^2=\underline{3y-2x}+3xy+2$

$\underline{3x^2}+3y^2-\underline{6x}-4y=4$

$3x(x-2)+y(3y-4)=4$

$4x^2+9y^2-x^2-6y^2-6x-4y=4$

$9y^2-12xy+4x^2+12xy-x^2-6y^2-4y-6x=4$

$(3y-2x)^2$

$3x^2+\cancel{3y^2}-6x-4y=4$

$3y^2-2xy+2xy+\underline{3x^2}-\underline{6x}-4y=4$

$y(3y-2x)+3x(x-2)+2y(x-2)=4$

$y(3y-2x)+(x-2)(3x+2y)=4$

$3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}=\sqrt{(3y-2)(x-1}$

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$3x^2+\underline{3y^2}-6x-\underline{4y}=4$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

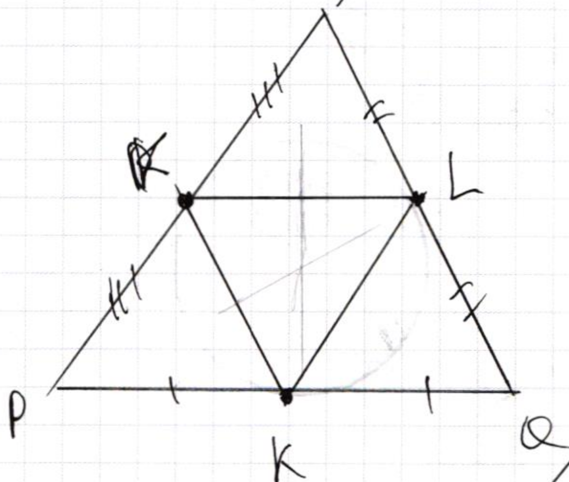
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

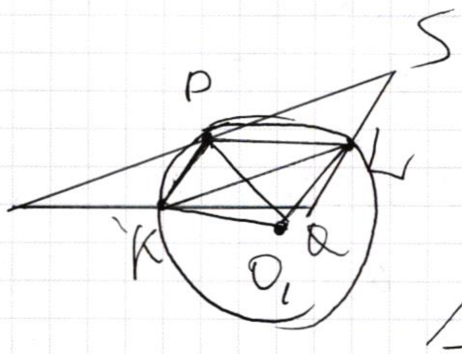
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

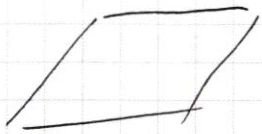
ШИФР

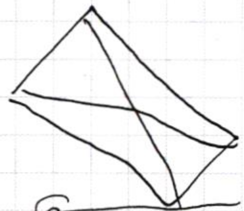
(заполняется секретарём)

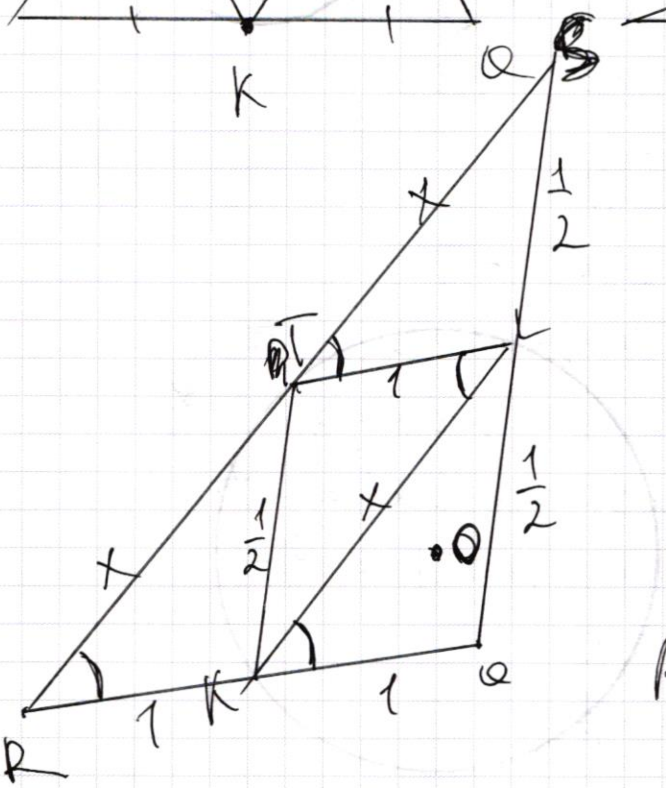
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

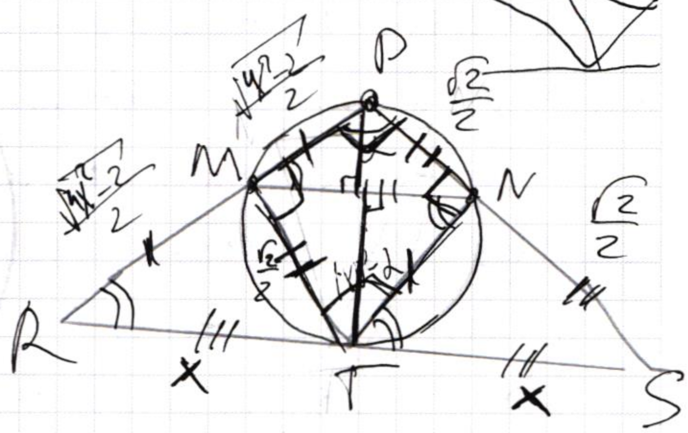


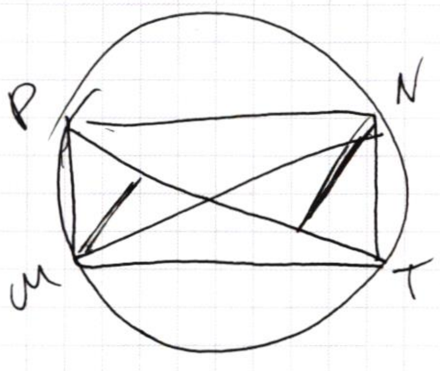


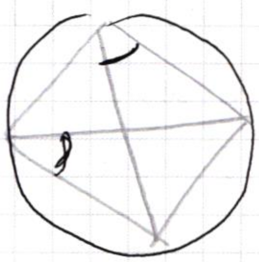












☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $\quad tg\alpha - ?$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta - \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta - 1) - \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 4\beta = 1 - 2\sin^2 2\beta$

$+2\sin 2\alpha \cdot \sin^2 2\beta + 2\cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = +\frac{8}{17}$

$2\sin 2\beta\ (\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta) = \frac{8}{17}$

$2\sin 2\beta \cdot \cos(2\beta - 2\alpha) = \frac{8}{17}$ $\quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{2}\sin 2\beta\ (\cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta) = \frac{4}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + 2\cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$-\sin 2\alpha \cdot \cancel{2}\sin^2 2\beta + \cancel{2}\cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{17}$

$\sin 2\beta\ (-\sin 2\beta \sin 2\alpha + \cos 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{4}{17}$

$\sin 2\beta\ (\cos 2\beta \cos 2\alpha - \sin 2\beta \sin 2\alpha) = -\frac{4}{17}$

$\sin 2\beta \cdot \cos(2\beta + 2\alpha) = -\frac{4}{17}$

$\sin 2\beta \cdot \cos(2(\beta + \alpha)) = -\frac{4}{17}$

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~$2\sin(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha-\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$~~

$1 - \cos^2(2(\alpha+\beta)) = \frac{1}{17}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

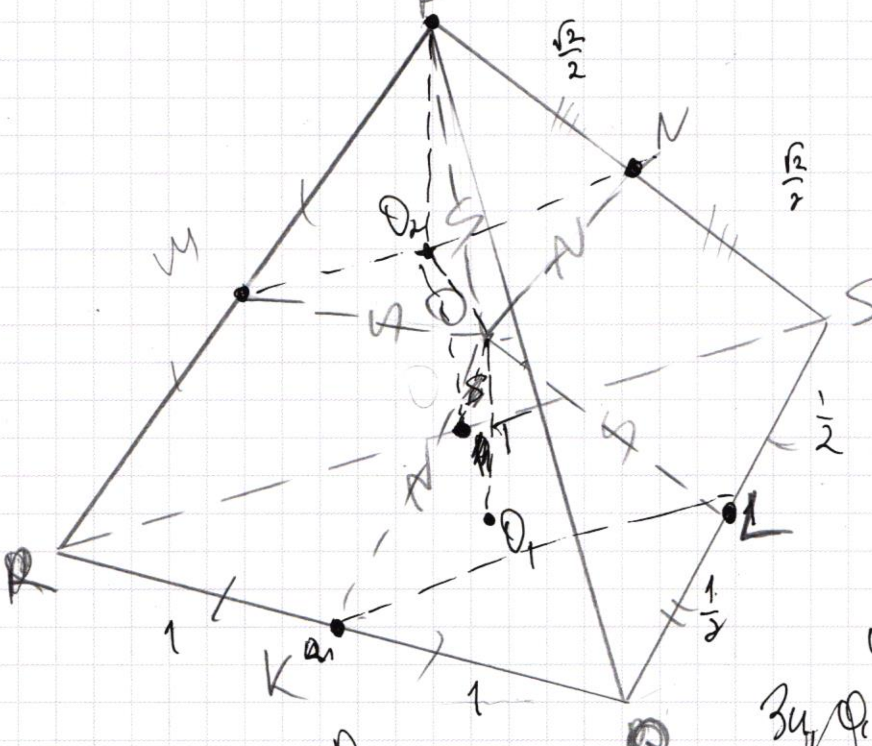
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$QR = 2;\ QS = 1,\ PS = \sqrt2$

RS — ?

R_{min} — ?

$OO_1 \perp (RQS)$

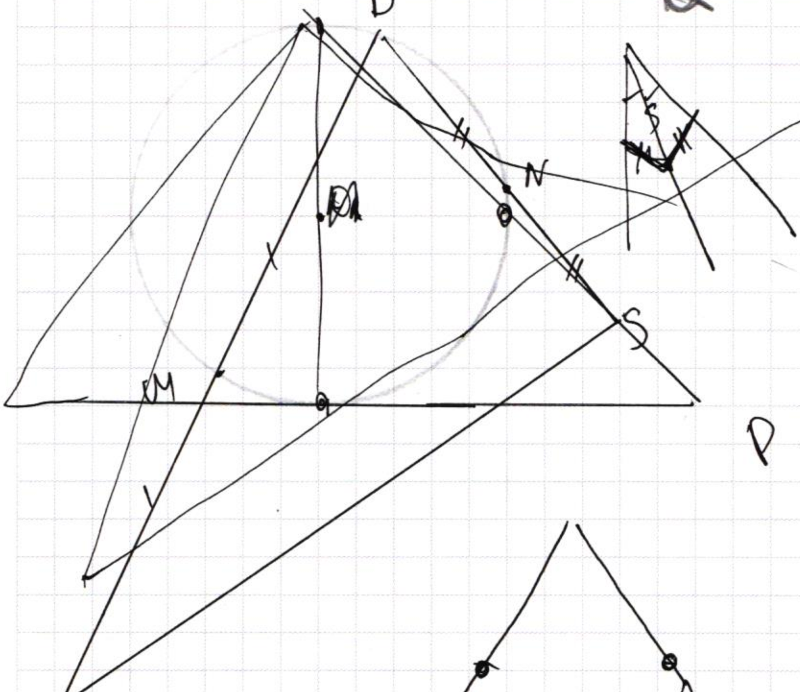
O_1 — пр-ние O на (RQS)

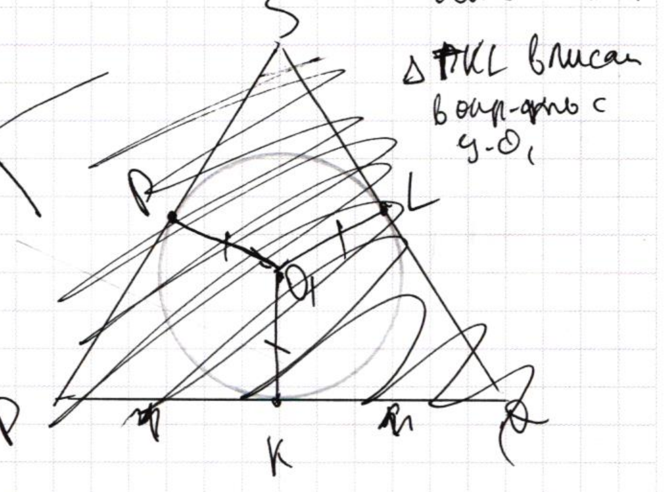
Из равен-ва пр. треуг ΔQOK, O_1OK и O_1OL:

$O_1K = \ldots$ (по катету и гипот.)

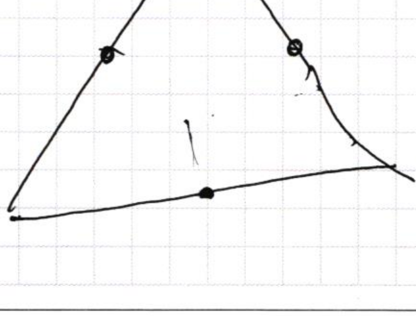
$QK = QL = O_1T$

~~Зн. O_1 — ц. окр-сти, впис. в ΔRQS~~ или вневп.



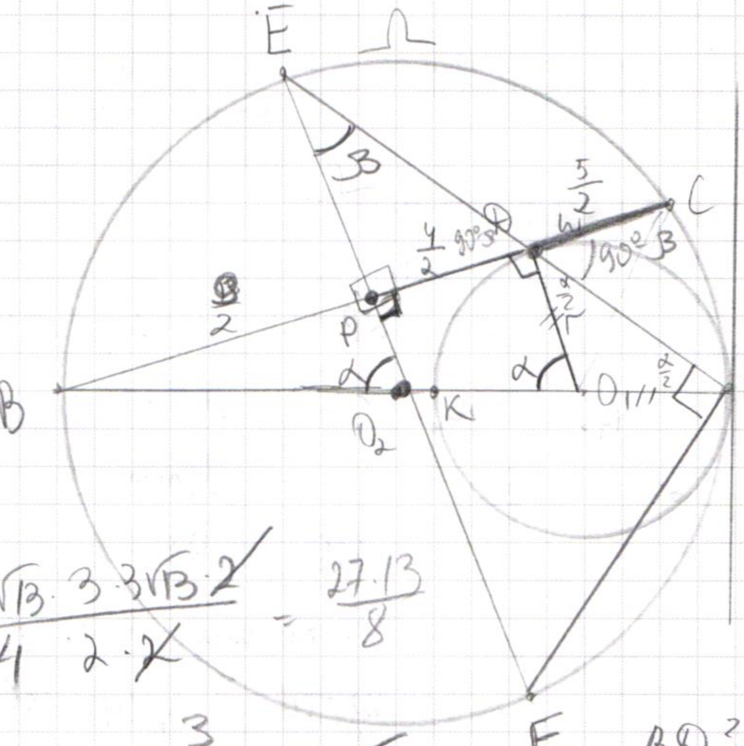


ΔPKL вписан в окр-ть с ц. O_1



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$r - ?$ $R - ?$

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$\begin{array}{r} \times 81 \\ 13 \\ \hline + 243 \\ 81 \\ \hline 953 \end{array}$

O_2PDO_1 - пр/уг трап

AB - диаметр

$\angle BO_2E = 2 \cdot \angle BAE \Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ - диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow BP = PC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\left(\frac{13}{2} + \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{2} = \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{9}{2}$

$$\frac{3\sqrt{13} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{13} \cdot \cancel{2}}{4 \cdot 2 \cdot \cancel{2}} = \frac{27 \cdot 13}{8}$$

$$\cancel{\frac{39 \cdot 3 \cdot \overset{3}{39} \cdot 2}{2 \cdot 4\sqrt{13} \cdot 4\sqrt{13}}} = \frac{39 \cdot 9}{16}$$

$BD^2 = BK \cdot BA$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = 2R \cdot 2(R - r)$

$\begin{array}{r} \times 27 \\ 13 \\ \hline 81 \\ 27 \\ \hline 351 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 39 \\ 9 \\ \hline 351 \end{array} = \frac{13}{}$

$\Rightarrow 9(2R - r) = 13R$

$18R - 9r = 13R \Rightarrow 5R = 9r \Rightarrow R = \frac{9}{5}r$

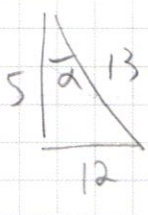
$r = \frac{5}{9}R$

$\frac{13}{2} \cdot \frac{13}{2} = 4R \cdot \left(R - \frac{5}{9}R\right)$

$\frac{13^2}{4} = 4R \cdot \frac{4}{9}R \Rightarrow R = \sqrt{\frac{13^2 \cdot 9}{16 \cdot 4}} = \frac{13 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{39}{8}$; $\boxed{R = \frac{39}{8}}$

$r = \frac{5}{9_3} \cdot \frac{39^{13}}{8} = \boxed{\frac{65}{24} = r}$

$\frac{\alpha}{2} = \beta$; $tg\,\alpha = \frac{13 \cdot 24^{12}}{2 \cdot 65_5} = \frac{12}{5}$



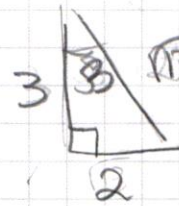
$\boxed{5 \quad}$

$cos\,\alpha = 1 - 2sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - cos\alpha}{2} = \frac{1 - \frac{5}{13}}{2} = \frac{8}{2 \cdot 13} = \frac{4}{13}$

$sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}} = sin\beta$; $\boxed{\beta = arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}}$

$\begin{array}{r} \times 39 \\ 9 \\ \hline 351 \end{array}$

$EA = \frac{39}{4} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}$; $AF = \frac{39}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}$



$S = \frac{39 \cdot 3 \cdot 39^3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{13} \cdot 4 \cdot \sqrt{13}} = \frac{39 \cdot 9}{16} = \frac{351}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)