МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leq 0.$$

1) Предположим, что $x \leq 0$:

Тогда $\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x} \leq 0$

$\begin{cases} \cancel{x^2-4x+4} \\ 2x^2-6x+x^2 = 3x^2-6x \neq 0. \end{cases}$

$3x(x-2) \neq 0. \Rightarrow x \neq 0$ и $x \neq 2$.

$x \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x \leq 0 \\ x-2<0 \end{cases} \Rightarrow 3x(x-2)>0 \Rightarrow x^2-6x+10+2x-6 =$

$= x^2-4x+4 \leq 0.$

$(x-2)^2 \leq 0.$ — верно при $x \neq 2$. Но при $x=2$ знаменатель дроби равен 0. Противоречие.

2) Пусть $0<x\leq 2$:

$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2| = 2x^2-4x-x(x-2) = x^2-2x \neq 0$

$x(x-2) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2. \end{cases}$

$\cancel{x^2-6}$ $\begin{cases} x>0 \\ x-2<0 \end{cases} \Rightarrow x(x-2)<0 \Rightarrow x^2-6x+10-2|x-3| \geq 0.$

$x^2-6x+10+2x-6 \geq 0.$

$x^2-4x+4 \geq 0.$

$(x-2)^2 \geq 0.$ Верно при любом x.

3) Пусть $2 < x \le 3$:

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x^2-2x}$$

$2x^2-4x+x^2-2x = 3x^2-6x = 3x(x-2) \ne 0 \Rightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ x \ne 2 \end{cases}$

$2 < x \le 3 \Rightarrow \begin{cases} 3x > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Rightarrow 3x(x-2) > 0 \Rightarrow x^2-6x+10+2x-6 =$

$= x^2-4x+4 = (x-2)^2 \le 0$. Верно при $x=2$. Но $x \ne 2$. Противореч.

4) Пусть $x > 3$:

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} = \frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x} \le 0.$$

$3x^2-6x \ne 0 \Rightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ x \ne 2 \end{cases}.$

$x > 3 \Rightarrow 3x^2-6x = 3x(x-2) > 0 \Rightarrow x^2-6x+10-2x+6 = x^2-8x+16 =$
$= (x-4)^2 \le 0$. Верно при $x=4$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ x = 4 \end{array} \right.$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

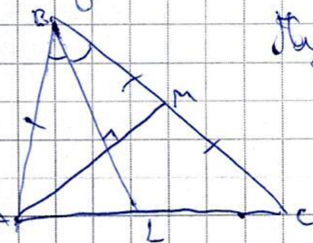
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

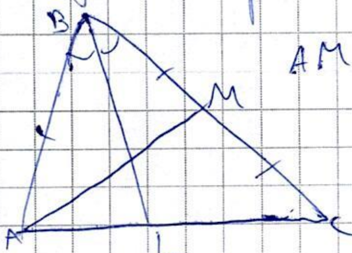
Пусть в $\triangle ABC$ AM - медиана и BL - биссектриса.



Пусть $BL \perp AM$.

Тогда $\triangle ABM$ равнобедренный (высота является биссектрисой) $\Rightarrow AB = BM \Rightarrow BC = 2AB$.

Рассмотрим обратный случай: пусть в $\triangle ABC$ $BC = 2AB$, AM - медиана, BL - биссектриса. Тогда, т.к. $BM = \frac{BC}{2} = AB$, $BL \perp AM$. Итак, мы доказали, что $AM \perp BL$ тогда и только тогда, когда $BC = 2AB$.



Также, для каждого из рассматриваемых треугольников должно выполняться неравенство треугольника.

Пусть $AB = a$, $AC = b$: $\begin{cases} a + 2a > b \\ a + b > 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a > b \\ b > a \end{cases}$.

Имеем:

$\begin{cases} 3a > b \ (1) \\ b > a \ (2) \\ 3a + b = 600 \ (3) \end{cases}$ Из (1) и (3) $\Rightarrow 3a + b = 600 > 2b \Rightarrow b < 300 \Rightarrow 3a > 300 \Rightarrow a > 100$. Из (2) $\Rightarrow 3b > 3a \Rightarrow 600 = 3a + b < 3b + b = 4b \Rightarrow b > 150 \Rightarrow 3a < 450 \Rightarrow a < 150$. Т.е., $101 \le a \le 149$. Значит, искомых треугольников всего 49.

Ответ: 49.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

Задача 3.

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$\sqrt{xy} \geq 0 \Rightarrow x - 2y \geq 0$ и $xy \geq 0 \Rightarrow$ возведём обе части первого уравнения в квадрат:

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 = xy \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

$$x^2 - 4xy - xy + 4y^2 = 0.$$

$$x(x - 4y) - y(x - 4y) = 0$$

$$(x - y)(x - 4y) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 4y. \end{array}\right.$$

Пусть $x = y$:

Тогда $x + y^2 = x + x^2 = 5$

$$x^2 + x - 5 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$\frac{-1 + \sqrt{21}}{2} > 0 \Rightarrow \sqrt{xy} = \sqrt{x^2}$ имеет смысл. Аналогично, если $x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} < 0$, $\sqrt{xy}$ имеет смысл. Противоречия нет.

Но при $x = y = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$ $x - 2y < 0$ - Противоречие

Пусть $x = 4y$:

$$x + y^2 = 4y + y^2 = 5$$

$$y^2 + 4y - 5 = 0.$$

$$y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \cdot 5}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = -2 \pm 3$$

$y_1 = 1$, $y_2 = -5$. Оба удовлетворяют условию $xy \geq 0$.

Однако при $y = -5$ $x - 2y < 0$. Противоречие

~~Ответ:~~ $\cancel{\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \end{cases}}$ или $\cancel{\begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \end{cases}}$ или $\cancel{\begin{cases} y = 1 \\ x = 4. \end{cases}}$ или $\cancel{\begin{cases} y = -5 \\ x = -20. \end{cases}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

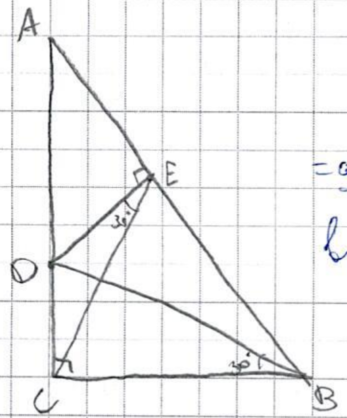
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3 (продолжение).

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1 \\ x = 4. \end{cases} \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 5.



В четырёхугольнике CDEB $\angle DEB + \angle DCB = 90 + 90 = 180° \Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 30°$ (четырёхугольник вписанный).

$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30°$

$\frac{AD}{AC}$ — ?

S_{AED} — ?

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{7 + 4\cdot\frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{21+28}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$

$\angle CDB = 90° - \angle CBD = 90 - 30 = 60°.$

$BD = \frac{BC}{\sin 60} = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{7}}{3},$

$\angle ADB = 180° - \angle CDB = 180° - 60° = 120°.$

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD\cdot BD\cdot \cos\angle ADB = AD^2 + BD^2 - 2AD\cdot BD\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= AD^2 + BD^2 + AD\cdot BD$

$AD^2 + AD\cdot BD + (BD^2 - AB^2) = 0.$

$AD = \frac{-BD \pm \sqrt{BD^2 - 4(BD^2 - AB^2)}}{2} = \frac{-\frac{4\sqrt{7}}{3} \pm \sqrt{\frac{16\cdot 7}{9} - 4\left(\frac{16\cdot 7}{9} - \frac{49}{3}\right)}}{2} =$

$= \frac{-\frac{4\sqrt{7}}{3} \pm \sqrt{-\frac{16\cdot 7}{3} + \frac{4\cdot 49}{3}}}{2} = \frac{-\frac{4\sqrt{7}}{3} \pm \sqrt{\frac{84}{3}}}{2} = \frac{-4\sqrt{7} \pm 3\sqrt{28}}{6} =$

$= \frac{-4\sqrt{7} \pm 6\sqrt{7}}{6} = \frac{-2\sqrt{7} \pm 3\sqrt{7}}{3}$. $AD \geq 0 \Rightarrow AD = \frac{-2\sqrt{7} + 3\sqrt{7}}{3} =$

$= \frac{\sqrt{7}}{3}.$

$\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{7}}{3\cdot\sqrt{7}} = \frac{1}{3}.$

$S_{AED} = \frac{1}{2}AE\cdot DE = \frac{1}{2}\cdot AD\cdot \sin\angle ADE\cdot AD\cdot\sin\angle DAE = \frac{1}{2}\cdot AD^2\cdot\sin\angle CBA\cdot\sin\angle BAC =$

$= \frac{1}{2}AD^2\cdot\frac{AC}{AB}\cdot\frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{9}\cdot\cancel{\frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}}\cdot\frac{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot 7}\cdot\frac{\sqrt{7}\sqrt{3}}{7} = \frac{7}{18}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{7} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5 (продолжение)

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$; $S_{AED} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 6.

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leq 0. \end{cases}$$

$(x^2-2x+1)-1+(y^2-4y+4)-4\leq 0.$

$(x-1)^2+(y-2)^2\leq 5.$ - уравнение окружности.

~~Пусть $2x\geq 0$; $y\geq 0$; $4-2x-y\geq 0$~~

Построим прямые:

$2x=0$ (в области выше оси x модуль раскрываем с „+")

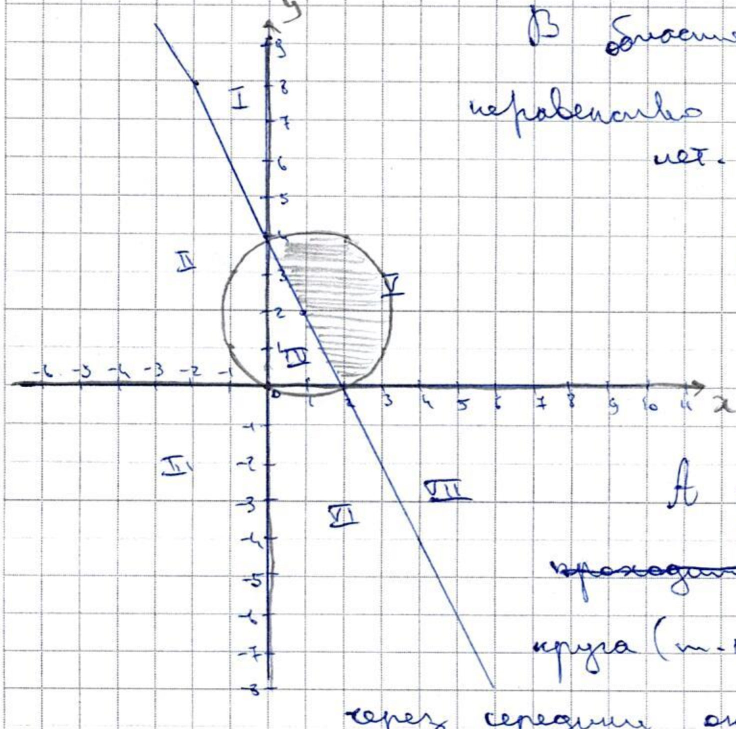
$y=0$

$4-2x-y=0$

$2x+y=4$

$y=4-2x.$

Они делят плоскость на 6 частей:



В областях I, II, III, V, VII первое неравенство выполняется, в остальных нет. Построим окружность $(x-1)^2+(y-2)^2=5$. Второе неравенство выполнено для точек внутри неё.

А значит, искомая площадь ~~проходит~~ равна половине площади круга (т.к. граница $y=4-2x$ проходит через середину окружности).

$S=\frac{\pi r^2}{2}=\frac{\pi(\sqrt{5})^2}{2}=2{,}5\pi.$

Ответ: $2{,}5\pi$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7.

Заметим, что $f(n)$, где n - составное число, равно сумме простых чисел входящих в разложение $n \Rightarrow$ для любого натурального числа m $f(m) > 0$.

$\frac{1}{x} \cdot x^2 = x \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x^2) = f(x) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) - f(x^2)$.

Пусть $x = p_1 p_2 \cdots p_n$ (p_i - простые числа).

$f(x) - f(x^2) = p_1 + \ldots + p_n - (2p_1 + 2p_2 + \ldots + 2p_n) = -(p_1 + \ldots + p_n) =$

$= -f(x)$.

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow$

$f(x) < f(y)$.

Заметим, что $f(1 \cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0. \Rightarrow$

для $x = 1$ можем взять любой $y \neq 1$.

$f(1) = 0$

$f(2) = 2$

$f(3) = 3$

$f(4) = 2+2 = 4$

$f(5) = 5$

$f(6) = 2+3 = 5$

$f(7) = 7$

$f(8) = 2+2+2 = 6$.

$f(9) = 3+3 = 6$

$f(10) = 2+5 = 7$

$f(11) = 11$

$f(12) = 2+2+3 = 7$

$f(13) = 13$

$f(14) = 2+7 = 9$

$f(15) = 3+5 = 8$

$f(16) = 2+2+2+2 = 8$

$f(17) = 17$

$f(18) = 2+3+3 = 8$.

Заметим, что можно выбрать $\frac{18 \cdot 17}{2} - \underbrace{5}_{\text{кол-во пар различных } x \text{ и } y\text{, что } f(x)=f(y)}$ пар различных x и y, и $f(x) \neq f(y)$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

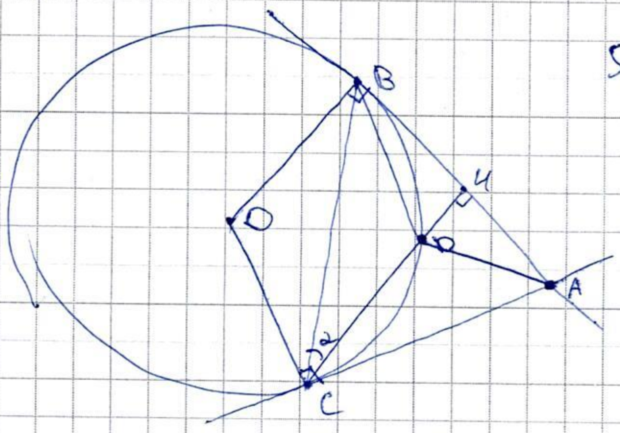
(Нумеровать только чистовики)

Задача 7 (продолжение)

В каждой из этих пар чисел однозначно определяются x и y $\Rightarrow$ искомое кол-во равно $\frac{18 \cdot 17}{2} - 5 = 153 - 5 = 148$.

Ответ: 148.

Задача 4.



$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DH = \frac{1}{2} AB \cdot \cancel{\frac{AH^2}{CH}}, \cancel{\frac{DH}{т.к.}} =$

$\cancel{AH \cdot AB = AC^2}$

$= \frac{1}{2} AB \cdot \frac{BH^2}{CH}$, т.к. $CH \cdot HD = BH^2$

$\frac{AB}{CH} = \frac{2 S_{ABD}}{BH^2}$

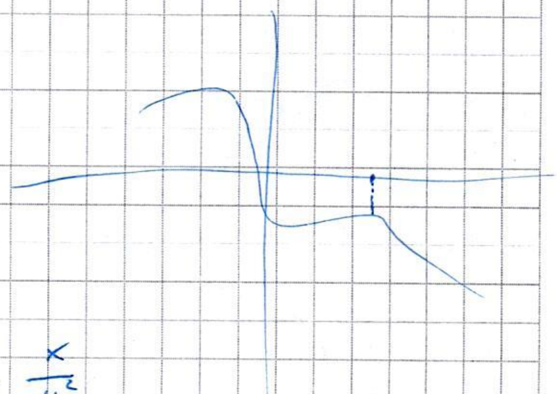
$BH = BC \cdot \sin \alpha$

$AED \sim ACB$.

$S_{AED} = \frac12 AD \cdot AE \cdot \sin\angle CAB = \frac12 AD^2 \cdot \sin\angle ABC \cdot \sin\angle CAB.$

$\frac{AE}{AD} = \sin\angle ADE = \sin\angle ABC$

$AE = AD \cdot \sin\angle ABC$



7.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$\cancel{f(0) = f(0) + f(a)}$

$\cancel{f(1\cdot a) = f(1) + f(a)}$

$0 = f(1)$

$y \cdot \frac{x}{y^2}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac1y\right) < 0.$

$\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right)}$

$\frac1y = t;\ t \le 1.\ f(1) = 0 \Rightarrow t < 0.$

Пусть x - составное.

$f(abc) = f(ab) + f(c) = f(a) + f(b) + f(c) = a + b + c.$

$f\left(\frac1y\right) = f\left(\frac{1}{y^2}\cdot y\right) = f\left(\frac{1}{y^2}\right) + f(y)$

$\cancel{\left(\frac1y \cdot \frac{x}{1}\right) = \left(\frac1y\right) +}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f$

$\frac1a + \frac1b = \frac{a+b}{ab}$

$\cancel{\frac{x}{y} = \frac{y}{x} \cdot \frac{x^2}{y^2}}$

$f(p^2) = 2p$

$\frac1p = \frac{1}{p^2} \cdot p$

$y = p_1 p_2 \cdots p_n$

$\frac1y = \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n}$

$f\left(\frac1y\right) = f\left(\frac{1}{p_1}\right) + f\left(\frac{1}{p_2}\right) + f\left(\frac{1}{p_3}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{p_n}\right)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f\left(\overset{<0}{\frac{x}{y}} \cdot \underset{>>1}{a}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + \overset{>0}{f(a)}$

$a = \frac{m}{n}$

$b = \frac{x}{y}$

$\left(\frac{mx}{ny}\right) = \left(\frac{m}{n}\right) + \left(\frac{x}{y}\right) = \left(\frac{m}{y}\right) + \left(\frac{x}{n}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

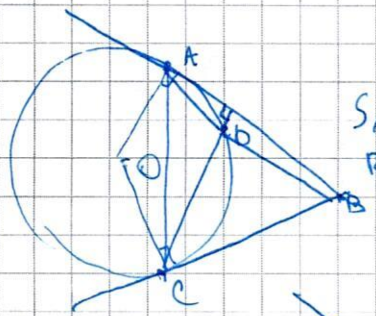
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$84 : 3 = 28$

-6, 24, -24, 0

$4\cdot 7$

$S_{ABD} = 6$

$R = 4$

$84 : 7 = 12$

-7, 14, -14, 0

$4\cdot 3$

$\frac{BC}{CH} - 7.$

$S_{ABD} = \frac{1}{2} DH\cdot AB$

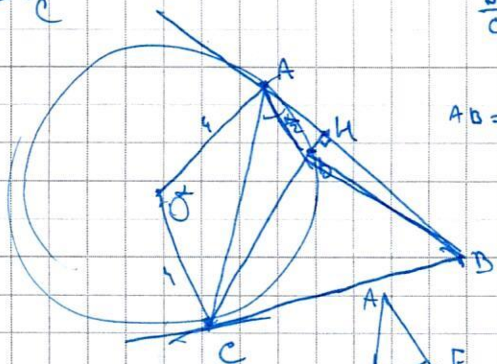
$DH\cdot AB = 12$

$AB = BC$

$AH^2 = HD\cdot CH$

$16 \times 7 = 112$

$84 =$



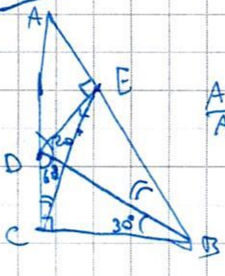
$200 - 4 =$

$= 196$

$\sin 30 = \frac{1}{2}$

$\sin 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\frac{AD}{AC}$ - ?

S_{ABD} - ?

$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30°$

$\angle CBD = \angle CED = 30°$

$196 - 112 = 84$

$\frac{2\sqrt{3}}{18} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

$BD = 2CD = \frac{BC}{\sin 60} = \frac{2\sqrt{7}\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{7}}{3}$

$\sin\angle BAC =$

$\frac{AC}{AB} = \frac{AG}{AD}$

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2\cdot AD\cdot BD\cdot \cos 120 \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$AB^2 = AD^2 + BD^2 + AD\cdot BD. \quad = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

$\cancel{AB^2 = AD}$

$AB = \sqrt{7 + 4\cdot\frac{7}{3}} = \frac{21+28}{3} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$AB^2 = AD^2 + BD^2 + AD\cdot BD$

$AD^2 + AD\cdot BD - (AB^2 - BD^2)$

$\sin\angle ADC = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{7} = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$AD = \frac{-BD \pm \sqrt{BD^2 + 4(AB^2 - BD^2)}}{2} = \frac{-BD \pm \sqrt{-3DB^2 + 4AB^2}}{2} = \frac{-\frac{4\sqrt{7}}{3} \pm \sqrt{-\frac{16\cdot 7}{3} + \frac{4\cdot 49}{3}}}{2} =$

$= \frac{-\frac{4\sqrt{7}}{3} \pm \sqrt{\frac{84}{3}}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

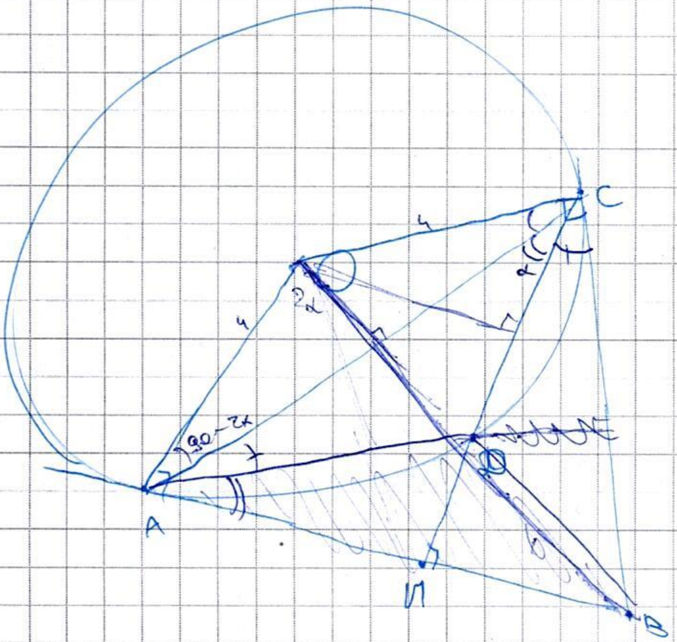
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\angle CDA = 180^\circ - \angle CA$ $\angle CDA = 180^\circ - \frac{\angle AC}{2}$

$\frac{AB}{CH} = \frac{AH}{CH} + \frac{BH}{CH} =$

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DH = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{AH^2}{CH} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{CH} \cdot AH^2$

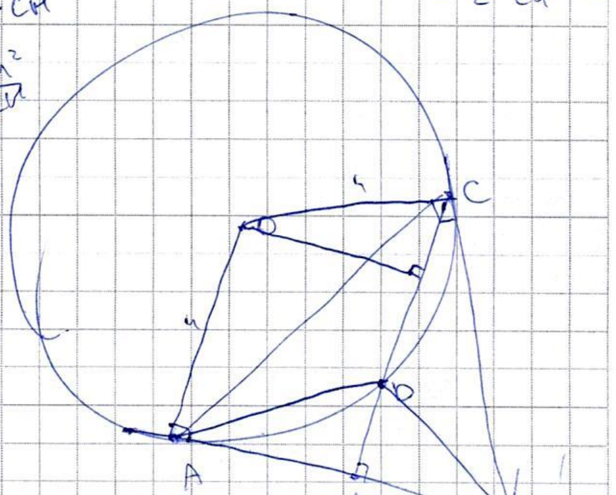
$\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ $AH^2 = HD \cdot CH$

$HD = \frac{AH^2}{CH}$

$\frac{AB}{CH} \cdot AH^2 = 12$

$\frac{AB}{CH} = \frac{12}{AH^2}$

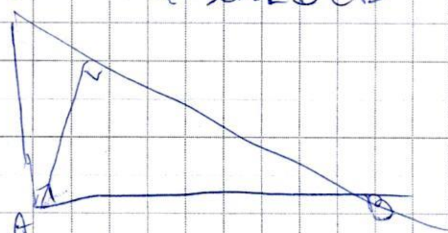
~~OB проходит через O~~



$8AB = AC \cdot OB$

$AH = \cancel{AC \cdot \sin\alpha}$

$O \quad = 4 \cdot \sin\angle OCD$



$\sin\angle OCD = \sin\angle(90 - CAD)$

$BH = BC \cdot \sin\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$(y-1)(y^3+6y^2-25) = y^4+6y^3-25y-y^3-6y^2+25 =$
$= y^4+5y^3-6y^2-25y+25$

$y^3+6y^2-25=0.$

-2

$-8+12=4$

$-1+6=5$

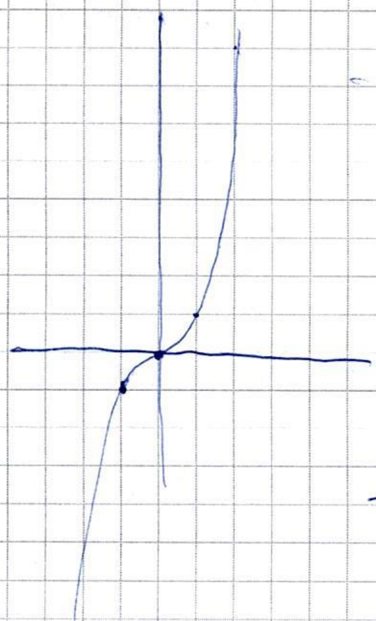
$\frac{5}{6}$

$-125+300-25\neq 0.$

$-8+24=16-25=-4.$

$\frac{5^3}{6^3}+\frac{5^2}{6} = \frac{5^3+36\cdot 5^2}{6^3}$ $-27+54=27$

$y^2(y+6)=25.$



-2

$\frac{4}{3}$

$\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a}{b}+6\right)=25$

$\cancel{\frac{a^3}{b^3}+6a}$

$\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{a+6b}{b}\right)=25.$

$-\frac{25}{8}+\frac{6\cdot 25}{4}-25$

$\frac{a^3+6a^2b}{b^3}=25$

25

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$-\frac{a^3}{25^3}+\frac{6a^2}{25^2}-25=0.$

$(x-2y)(x-2y)=$
$= x(x-2y)-2y(x-2y) =$
$= x^2-2xy-2xy+4y^2 =$
$= x^2-4xy+4y^2 = xy$

$\frac{-a^3+25\cdot 6a^2-25^4}{\ldots}=0$

$25^4+a^3=25\cdot 6a^2$

y^3+6y^2-25

$\begin{cases} x^2+4y^2=5xy \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$x=5-y^2$

$25-10y^2+y^4+4y^2=25y-5y^3$
$25-6y^2+y^4=25y-5y^3.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~8~~
3
4
5
~~7~~
7

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$(x-2y)^2=xy$

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy \Rightarrow x^2+4y^2=5xy \\ x+y^2=5 \Rightarrow x+y^2=5. \Rightarrow x=5-y^2 \end{cases}$$

$(5-y^2)^2+4y^2=5y(5-y^2)$

$25-10y^2+y^4+4y^2=25y-5y^3$

$y^4-6y^2+25=25y-5y^3$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0.$

$1+5-6-25+25=0$

1 – решение.

$$\begin{array}{r|l} y^4+5y^3-6y^2-25y+25 & y-1 \\ \hline y^4-y^3 & y^3+6y^2-25 \\ \hline 6y^3-6y^2-25y+25 & \\ 6y^3-6y^2 & \\ \hline -25y+25 & \\ -25y+25 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$(y-1)(y^3+6y^2-25)=0.$

$\underline{y_1=1}.$

$8+16-25\neq 0.$

$8+12=20$

$y\neq\varphi$:

$y^3+6y-25=0.$

$y^3+6y=25$

$y^3+6y-25$

y^3

y^3+6y-5^2

$y\geq 0 \Rightarrow x\geq 0 \Rightarrow y^2\leq 5 \Rightarrow \sqrt{y}\leq\sqrt{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $x \geq 3$:

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x(x-2)} \leq 0.$$

≤ 0, >0

$2x^2-4x+x^2-2x \neq 0$

$3x^2-6x \neq 0$

$3x(x-2) \neq 0$

$x \neq 2, x \neq 0.$

$x^2-6x+10+2x-6 \leq 0$

$x^2-6x+10-2x+6 \leq 0.$

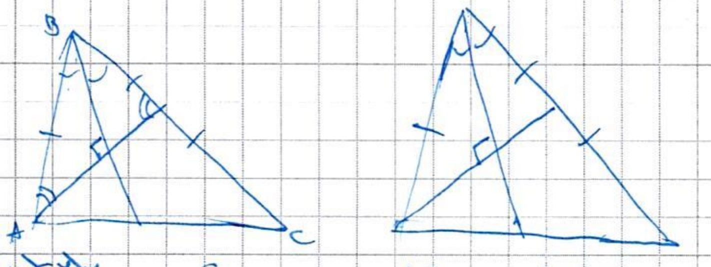
$x^2-8x+16 \leq 0.$

$(x-4)^2 \leq 0.$

$x=4.$

$$\left[\begin{array}{l} 0<x<2 \\ x=4. \end{array}\right.$$

2.



Сторона AB ca; $BC=2a$

$1+2+597$
$2+4+594$
$3+6+591$

$100+200+300$
$101+202+297$
...
$199+398+3$
$150+300+150$
$149+298+153$

$$\begin{cases} 3a+b=600 \\ 3a>b \Rightarrow 3a>300 \Rightarrow a>100 \\ a+b>2a \Rightarrow b>a \end{cases}$$

$101 \to 149$

49 треугольников.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-2y=\sqrt{xy}$

$x+y^2=5.$

$x=5-y^2$

$|y|=\sqrt{5-x}$

$x^2-4xy+4y^2=xy$

$x^2+4y^2=5xy$

$x^2-5xy+4y^2=0.$

$(x-4y)(x-y)=0$

$1;1$

нет решений?

$\left[\begin{array}{l} x=y \\ y=\frac{x}{4}\end{array}\right.$

$\begin{cases}(x-y)(x-4y)=0\\ x+y^2=5\end{cases}$

1) $x=y$:

$x+x^2=5$

$x^2+x-5=0.$

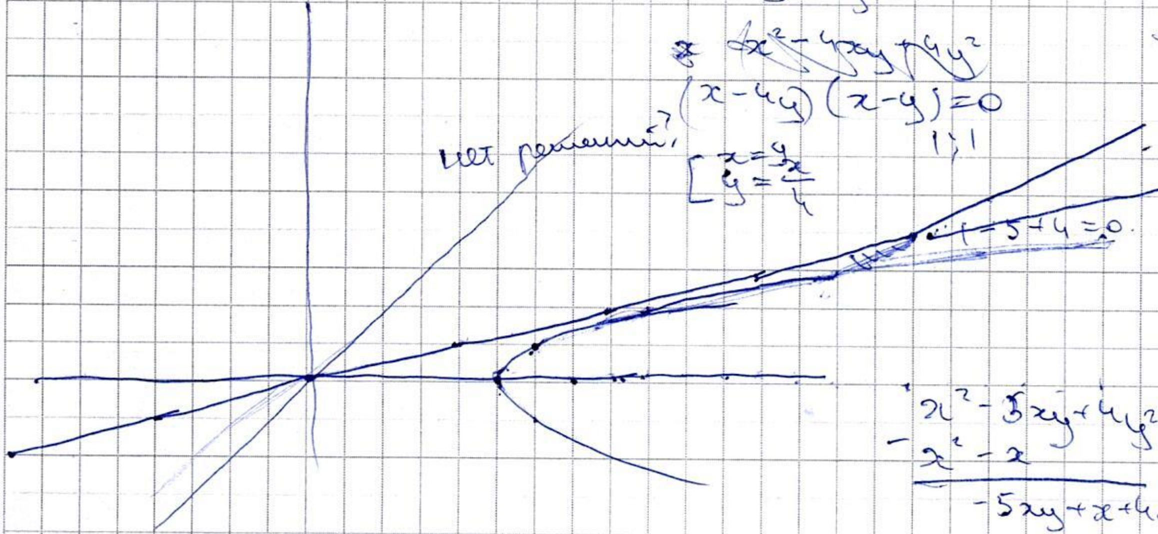
$1+20=21$

$x=4y$

$4y+y^2=5$

$y^2+4y-5=0.$

$1-5+4=0.$



$x^2-5xy+4y^2 \mid x-1$

$-\ x^2-x \qquad x-5y+1$

$-5xy+x+4y^2$

$-\ -5xy+5y$

$x-5y+4y^2$

$-\ x-1$

$-5y+4y^2+1$

$D=25y^2-16y^2=9y^2$

$\sqrt{D}=3y$

$\frac{5xy\pm 3y}{2}$

$x_1=4y$

$x_2=y$

$x-3y$

$x^2-5xy+4y^2 \mid x-3y$

$-\ x^2-3xy \qquad x-2y$

$-2xy+4y^2$

$-\ -2xy+6y^2$

$-2y^2$

$(x-4y)(x-y)=$

$=x^2-4xy-xy+4y^2$

$x(x-4y)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-2y=\sqrt{xy}$

$x+y^2=5$

1) Пусть $x\geq 0$ и $y\geq 0$.

$a=\sqrt{x}$; $b=\sqrt{y}$

$\begin{cases} a^2-2b^2=ab \\ a^2+b^4=5 \end{cases}$

$x-1=4-y^2$

$y^2=5-x$

$\cancel{\sqrt{y}=\sqrt{...}}$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)-f(x)$

$|2x|+|y|$

4+2+2

0; 5

-1; 1

2+1+5=8

-1; -1

3+

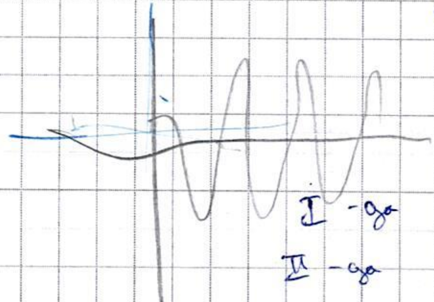
3; -1

7+

1; -1

2-1

2+1+



I - да

II - да

III - да

IV - нет.

V -

$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4. \\ x^2-2x-4y+y^2\leq 0. \end{cases}$

$(x^2-2x+1)-1+(y^2-4y+4)-4\leq 0.$

$(x-1)^2+(y-2)^2\leq 5.$ Окружность

$5^2=2^2+1^2$

$|2x|+|y|+|4-(2x+y)|>4.$

1) ~~2x≥0, y≥0~~

$2x=0 \Rightarrow x=0$

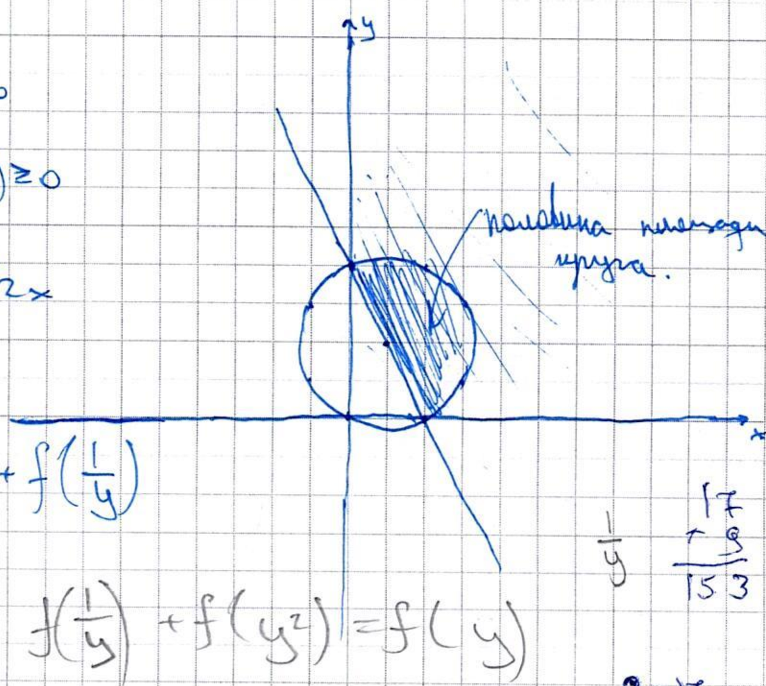
$y=0$

$4-(2x+y)\geq 0$

$2x+y\leq 4$

$y\geq 4-2x$

$\Rightarrow f(1)=0.$



половина площади круга.

$f(a)=f(1)+f(a)$

$f(ap)=f(p)+f(a)=p+f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\frac{1}{y}$

17 + 9 = 153

$f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y^2)=f(y)$

9·17

2 = 2

3 = 3

4 = 2·2

5 = 5

6 = 2·3

7 = 7

8 = 2·2·2

9 = 3·3

10 = 2·5

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1. $$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0.$$

	0		2		3	
$\lvert x\rvert$	−	+		+		+
$\lvert x-2\rvert$	−	−		+		+
$\lvert x-3\rvert$	−	−		−		+

$(-x)(2-x) = -2x + x^2$

$x \le 0$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(2-x)} \le 0. \quad >0.$$

$\cancel{x^2-6x+10+2}$

$2x^2-4x-2x+x^2 \ne 0.$

$3x^2-6x \ne 0.$

$x \ne 0.$

$3x-6 \ne 0$

$x \ne 2.$

$3x^2-6x = 3x(x-2)$ <0 <0

$x^2-6x+10+2x-6 \le 0.$

$x^2-4x+4 \le 0$

$(x-2)^2 \le 0.$

$(x-2)^2 = 0$

$\Downarrow$

$x=2$!!!

2) $0 \le x \le 2$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x-x(x-2)} \le 0 \quad \ge 0,\ <0$$

$2x^2-4x-x^2+2x \ne 0.$

$x^2-2x \ne 0$

$x \ne 0$

$x(x-2) \ne 0$ ≥ 0 <0

$x \ne 2.$

$x^2-6x+10+2x-6 \ge 0.$

$x^2-4x+4 \ge 0$

$(x-2)^2 \ge 0$

↑ Верно при любом x

$\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ \end{cases}$

3) $2 < x \le 3$:

$$\frac{x^2-6x+10+2x-6}{2x^2-4x+x(x-2)} \le 0. \quad \le 0,\ >0$$

$2x^2-4x+x^2-2x \ne 0$

$3x^2-6x \ne 0$

$3x-6 \ne 0$

$x-2 \ne 0$

$x \ne 2.$

$3x(x-2) > 0$ >0

$x^2-6x+4+2x = (x-2)^2 \le 0.$

!!!

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)