МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$$

то $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ то $\sin(2\alpha+2\beta) = -\cos(2\beta)$ то

$0=\sin(2\alpha+2\beta)+\sin(90^\circ-2\beta) = 2\sin(\alpha+45^\circ)\cos(\alpha+2\beta-45^\circ)$

1) $\sin(\alpha+45)=0$

$\sin\alpha\cos45+\cos\alpha\sin45=0$ то разделим обе части на $\sin45\cos\alpha$

то $tg\alpha=-1$

2) $\cos(\alpha+2\beta-45)=0$

$\cos(\alpha-45)\sin2\beta+\sin(\alpha-45)\cos2\beta=0$

$(\cos\alpha\cos45+\sin\alpha\sin45)\sin2\beta+(\sin\alpha\cos45-\cos\alpha\sin45)\cos2\beta=0$

делим обе части на $\cos\alpha\sin45$ то

$(1+tg\alpha)\sin2\beta+(tg\alpha-1)\cos2\beta=0$

$tg\alpha(\sin2\beta+\cos2\beta)=\cos2\beta-\sin2\beta$

1) $\sin2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

то $\frac{3}{\sqrt{5}}tg\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ то $tg\alpha=-\frac{1}{3}$

2) $\sin2\beta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

то $-\frac{1}{\sqrt{5}}tg\alpha=\frac{3}{\sqrt{5}}$ то $tg\alpha=-3$ то ответов максимум три т.к. по условии их минемум три то среди них минних корней то

Ответ: $tg\alpha=1$, $tg\alpha=-\frac{1}{3}$, $tg\alpha=-3$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

то область допустимых значений $10x - x^2 > 0$ потомучто $\exists \log_3(10x - x^2)$ то возмём $10x - x^2 = a$ то $a + a^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 a}$ где $a > 0$ пусть $a = 3^b$ то $3^b + 3^{b\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 3^b}$ т.е. $3^b + 4^b \geqslant 5^b$

Это верно при $b \leqslant 2$ если $b > 2$ пусть $b = 2 + c$ то $9 \cdot 3^c + 16 \cdot 4^c < 25 \cdot 5^c$ при $c > 0$ то $9 \cdot 3^c < 9 \cdot 5^c$ а $16 \cdot 4^c < 16 \cdot 5^c$ т.е. при $b > 2$ неверно то докажем что при $b \leq 2$ верно возмём $b = 2 - c$ то $c \geqslant 0$ то $\frac{9}{3^c} + \frac{16}{4^c} \geqslant \frac{25}{5^c}$ т.к. $\frac{9}{3^c} \geqslant \frac{9}{5^c}$ а $\frac{16}{4^c} \geqslant \frac{16}{5^c}$ то $b \leq 2$ то $a \in (0, 9]$

т.е. $0 < 10x - x^2 \leq 9$

1) $0 < 10x - x^2$ т.е. $x(x - 10) < 0$ то $x \in (0, 10)$

2) $10x - x^2 \leq 9$ то $x^2 - 10x + 9 \geqslant 0$ то $(x-9)(x-1) \geqslant 0$ то $x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$ то

$x \in (0, 10) \cap ((-\infty; 1] \cup [9; +\infty))$ т.е. $x \in (0, 1] \cup [9, 10)$

Ответ: $x \in (0, 1] \cup [9, 10)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$ то $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

т.к. $f(p) = [\frac{p}{4}]$ где p-простое то

$f(2) = 0$	$f(14) = f(2) + f(7) = 1$
$f(3) = 0$	$f(15) = f(3) + f(5) = 1$
$f(4) = f(2) + f(2) = 0$	$f(16) = f(8) + f(2) = 0$
$f(5) = 1$	$f(17) = 4$
$f(6) = f(2) + f(3) = 0$	$f(18) = f(9) + f(2) = 0$
$f(7) = 1$	$f(19) = 4$
$f(8) = f(4) + f(2) = 0$	$f(20) = f(4) + f(5) = 1$
$f(9) = f(3) + f(3) = 0$	$f(21) = f(7) + f(3) = 1$
$f(10) = f(5) + f(2) = 1$	$f(22) = f(2) + f(11) = 2$
$f(11) = 2$	$f(23) = 5$
$f(12) = f(3) + f(4) = 0$	$f(24) = f(12) + f(2) = 0$
$f(13) = 3$	$f(25) = f(5) + f(5) = 2$

$f(\frac{x}{y}) < 0$ если $f(x) < f(y)$ среди $f(x)$ где $2 \le x \le 25$

10 шт. так что $f(x) = 0$

7 шт. так что $f(x) = 1$

3 шт. так что $f(x) = 2$

1 шт. так что $f(x) = 3$

2 шт. так что $f(x) = 4$

1 шт. так что $f(x) = 5$

то нужно найти кол-во пар (x, y) так что $f(x) < f(y)$ и всего $1 \cdot 23 + 2 \cdot 21 + 1 \cdot 20 + 3 \cdot 17 + 7 \cdot 10 = 23 + 42 + 20 + 51 + 70 = 206$

Ответ: 206.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2.

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ 9(2y-1)^2 + (x-6)^2 = 90 \end{cases}$$

заменим $a = x - 6$ $b = 2y - 1$ то

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ 9b^2 + a^2 = 90 \end{cases}$$

~~расмотрим $a - \sqrt{ab} - 6b = 0$~~

~~[illegible]~~

1) $a \geq 0$ то $b > 0$ т.к. $\exists \sqrt{ab}$ то

расмотрим $a - \sqrt{ab} - 6b = 0$ то $D = 25b$ то

$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{b} \pm \sqrt{b} \cdot 5}{2} \Rightarrow$ 1.1) $\sqrt{a} = 3\sqrt{b}$ то $90 = 9b^2 + a^2 = 90b^2$

то $b^2 = 1$ то $b = 1$ то $a = 9$

1.2) $\sqrt{a} = -2\sqrt{b}$ неверно.

2). $a < 0$ то $b < 0$ т.к. $\exists \sqrt{ab}$ пусть $c = -a$, $d = -b$.

то $6d - c = \sqrt{cd}$ то $c + \sqrt{cd} - 6d = 0$ то $D = 25d$

то $\sqrt{c} = \frac{-\sqrt{d} \pm 5\sqrt{d}}{2}$ 2.1) $\sqrt{c} = -3\sqrt{d}$ неверно

2.2) $\sqrt{c} = 2\sqrt{d}$ то $a^2 + 9b^2 = 25d^2 = 90$ то

$d = \frac{3}{5}\sqrt{10}$ то $c = \frac{12}{5}\sqrt{10}$ то $a = -\frac{12}{5}\sqrt{10}$ и $b = -\frac{3}{5}\sqrt{10}$

т.к. $a = x - 6$ то $x = a + 6$

$b = 2y - 1$ $y = \frac{b+1}{2}$ то. $x_1 = 15$, $y_1 = 1$.

$x_2 = -\frac{12}{5}\sqrt{10} + 6$

$y_2 = (-\frac{3}{5}\sqrt{10} + 1) : 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Пусть O_1 - центр ~~перв~~ окружности ω, O_2 - центр Ω то $O_1D \perp BC$ т.к. D - точка касания и $AC \perp BC$ т.к. AB - диаметр. Пусть ω пересекает AB в точке P то $\angle ADP = 90$ т.к. ω и Ω касаются и AB - диаметр Ω то AP - диаметр ω пусть $\angle APD = \alpha$ то $\angle PAD = 90 - \alpha$ то $\angle ADC = \alpha$ то $\angle CAD = 90 - \alpha$ то AD - биссектр. угла BAC то $AB:AC = BD:DC = 17:15$ пусть $BA = 17x$ то $AC = 15x$ то $BC = 8x$ т.к. $BC = 16$ то $x = 2$ то $AB = 34$ то радиус Ω равен 17
т.к. $O_1D \parallel AC$ то $BD:BC = BO_1:BA$ то $17:32 = BO_1:34$ то $BO_1 = \left(\frac{17}{4}\right)^2$ то радиус ω равен $O_1A = 34 - \left(\frac{17}{4}\right)^2 = \frac{15 \cdot 17}{16}$ т.к. AE - биссектр. угла BAC то $BE = CE$ т.к. $EF \perp BC$ то EF - диаметр Ω и $EF \parallel O_1D$ то $\angle AEF = 90 - \alpha$ и $\angle EAF = 90$ то $\angle AFE = \alpha = \angle ADC$ то $tg\,\alpha = \frac{AC}{DC} = \frac{15}{\frac{15}{2}} = 2$ то $\alpha = arctg\, 2$. пусть

$AF = y$ то $AE = 2y$ т.к. $tg\,\alpha = 2$ то площадь треугольника AFE равен $(2y \cdot y):2 = y^2$ т.к. $\angle FAE = 90$ то $y^2 + 4y^2 = 34^2$ то $5y^2 = 34^2$ то $y^2 = \frac{34^2}{5}$ т.к. по пифагору $a^2 + b^2 = c^2$ т.е. $y = \frac{34}{\sqrt{5}}$ то площадь AFE равен $\frac{34^2}{5}$.

Ответ: $R = 17$ $r = \frac{15 \cdot 17}{16}$ $\alpha = arctg\, 2$ $S = \frac{34^2}{5}$

№7

Пусть радиус векторов точек $KLMN$ равны k, l, m, n соответственно. то $\frac{k+l}{2}$ $\frac{l+m}{2}$ $\frac{m+n}{2}$ $\frac{k+m}{2}$ $\frac{l+n}{2}$ и лежат на одной окружности т.к.

$\frac{k+l}{2} - \frac{k+m}{2} = \frac{l+n}{2} - \frac{m+n}{2}$ то там есть паралелограм. если A, B, C, D, E – середины соответственно KL, LM, MN, KM, LN то $AEDC$ – паралелограм но он вписанный то он прямоугольник. то $KN \perp ML$ то проекция KN на $\triangle KLM$ будет прямой перпендик. LM аналогично на $\triangle LMN$ т.е. основания высот из K и N на треугольники KLM и LNM совподают и это точка будет проекцией KN на LM то $LN^2 - MN^2 = KL^2 - KM^2$ то $LN^2 = 6$ аналогично $ENDB$ – паралелограм то $ENDB$ – прямоугольник то $\angle LNM = 90$ то $LM^2 = 6 + 2 = 8$ то минимальным радиусом будет ~~минимумы~~ максимум среди описаных LNM и LKM а максимум LKM т. е. ответ радиус описаный около треугольника LKM. $LK = 3, KM = 1, LM = \sqrt{8}$

№6.

подставим вместо x $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ получим

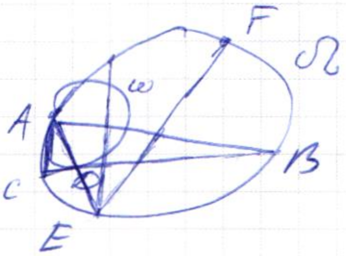
$3 \le \frac{1}{4}a + b \le 4$

$2\frac{2}{3} \le \frac{1}{2}a + b \le 7$

$0 \le a + b \le 1$ то $-4 \le \frac{3}{4}a \le -2$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



-8

$32x^2 + (\cancel{a}-36)x + b-3 \le a$

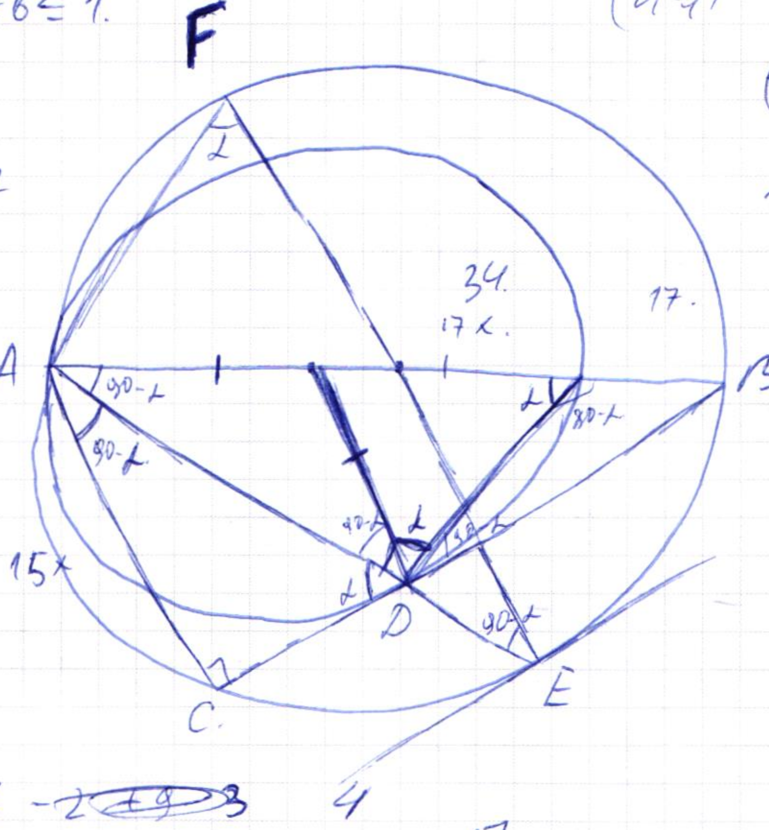
$x_1 \le \frac{1}{4}$ $\frac{34}{36} = \frac{17}{\frac{17}{2}}$

$x_2 \le 1$

$(4\frac{1}{4})^2 =$ $(\frac{17}{4})^2 = x.$

$0 \le a+b \le 1.$

$\frac{4-16}{1-5}$ -12



$= 17^2 - 15^2 =$

$= 2 \cdot 32 = 64x^2$

$8x = 16$

$x = 2.$

$(\frac{17}{15})^2 r = \frac{16}{15}$

$\frac{289}{16}$

$3 \le \frac{7}{4}a + b \le -2$ 3

4

17

4,25

$2R - r =$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{32}{2}}$ $= 1\frac{2}{15}r$

$(32x^2 - 36x + 3)(4x-5) =$

$\cancel{128x^3 - 304x^2 + 208x}$

$64R - 32r = 34R$

$30R = 32r.$

$15R = 16r.$

$R = 1\frac{1}{15}r.$

$= 128x^3 - 144x^2 + 12x$

$- 160x^2 + 180x - 15$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ т.к. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ то $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

~~то~~ $\cancel{\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$\cancel{2\sin\alpha\cos\alpha}$

то $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\cos 2\beta = -\sin(\frac{\pi}{2}-2\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta) + \sin(\frac{\pi}{2}-2\beta) = 0$

$\sin(2\alpha+\frac{\pi}{2})\cos(2\alpha+4\beta-\frac{\pi}{2}) = \cos(2\alpha)\sin(2\alpha+4\beta) =$

$= \cos(2\alpha)(-\frac{2}{5} - \sin 2\alpha) = 0$

$\frac{9}{3^c} + \frac{16}{}$

$f(x) = 3^x + 4^x - 5^x$

$f'(x) = 3^x \ln 3 + 4^x \ln 4 - 5^x \ln 5$

$b < 2$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$

$b > 2$

$b = 2 - c$. 5

$b > 2$

$(4+1)^b =$

25

☑ черновик ☐ чистовик

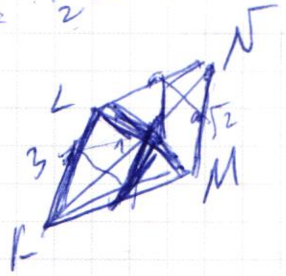
Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

~~16 x = 16 ≤ 4ax~~

$4 + \frac{4}{4x-5}$

$\frac{-8}{-3} \le \frac{1}{2}a + b \le -8 + 18 - 3$

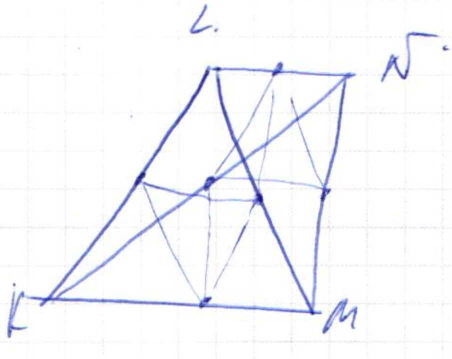


$32x^2 - 36x + 7 + \frac{4}{4x-5} \le 0$

$64x - 36 + \frac{16}{(4x-5)^2} = 0$

$\frac{1}{4}$

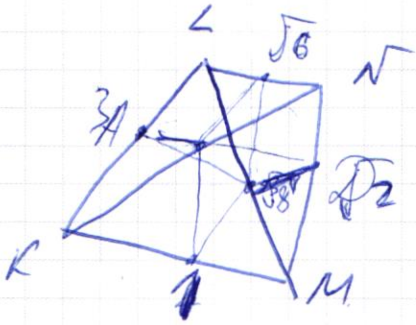
$32 + \frac{16}{9}$



$\frac{1}{2}$

32 − 36

a b-c d



K L M N

$\frac{K+L}{2}$ $\frac{K+M}{2}$

$\frac{L+M}{2}$ $\frac{L+N}{2}$

$\frac{M+N}{2}$

$\frac{K+L+M+N}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$a + a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$

$3^b + 4^b \geq 5^b$

$b \geq 2$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$a = 3^b$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\beta + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-13ab + 27b^2 = -90$

$2\operatorname{tg}\alpha \frac{1}{\sqrt{5}} \pm (\operatorname{tg}^2\alpha - 1)\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$a = \frac{9(3b^2+10)}{13b}$

$2\operatorname{tg}\alpha \pm 2(\operatorname{tg}^2\alpha - 1) = -1$

$(x-12y) =$

$= \sqrt{2y(x-6)-(x-6)} =$

$\cancel{\pm 2\operatorname{tg}}$ 1) $2\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$

$= \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

2) $-2\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$

$\sqrt{ab} = a - 6b$

$a^2 + 9b^2 = 90$

$x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$

$(x-6y)^2 + \cancel{12(y-x)}\ 12x(y-1) - 36(y-1) = 81$

$(x-6y)^2 + 12(y-1)(x-3) = 81$

$a - \sqrt{ab} - 6b = 0$

$D = 25b$

$\cancel{x^2 = 17}$

$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90$

$\frac{\sqrt{b} \pm 5\sqrt{b}}{2} =$

$=$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)