МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \quad (1)$$

$\cancel{\sin 2\alpha \cos 2\beta}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cancel{\frac{2\cos^2 2\beta}{\sqrt5}}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\frac{2\cos 2\beta}{-\sqrt5} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$+\frac{2\cos 2\beta}{\sqrt5} = +\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\cos 2\beta}{\sqrt5} - \frac{4}{5} = \frac{2\sqrt5\cos 2\beta - 4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$

$5\sin 2\alpha = 2\sqrt5\cos 2\beta - 4$

$\cos 2\beta = \frac{5\sin 2\alpha + 4}{2\sqrt5}$

$\cancel{-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}}$

$\frac{\sqrt5\sin 2\alpha - 2\cos 2\beta}{\sqrt5} = -\frac{4}{5}$

$-\frac{4}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sqrt5\sin 2\alpha - 2\cos 2\beta = -\frac{4}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha = 0$

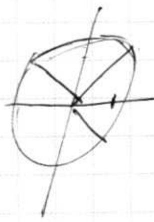
$\sqrt5\sin\alpha\cos\alpha - \cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\frac{2\sin 2\alpha}{\sqrt5} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$5\sin\alpha\cos\alpha - \sqrt5\cos 2\beta = -2$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$5\sin 2\alpha - 2\sqrt5\cos 2\beta = -4$



$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2\sin 2\alpha}{\sqrt5} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) + \sin(2\alpha+2\beta-2\beta) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}$

$x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2$

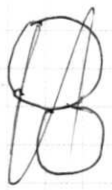
$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

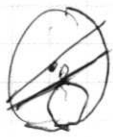
$5^{\log_{12}t} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$

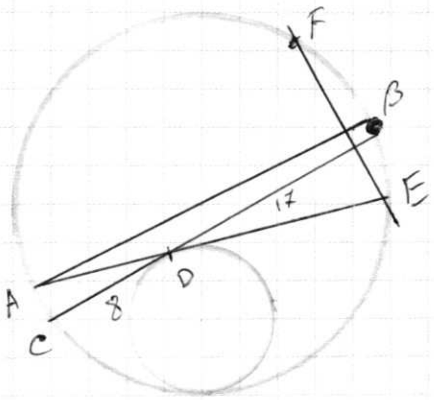
$5^{\log_{12}t} \geq |t|^{\log_{12}13} - t$

$5^{\log_{12}t} \geq t(|t|^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)$

$\log_{12}t \log_{12}5 \geq \log_{12}t + \log_{12}t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1$







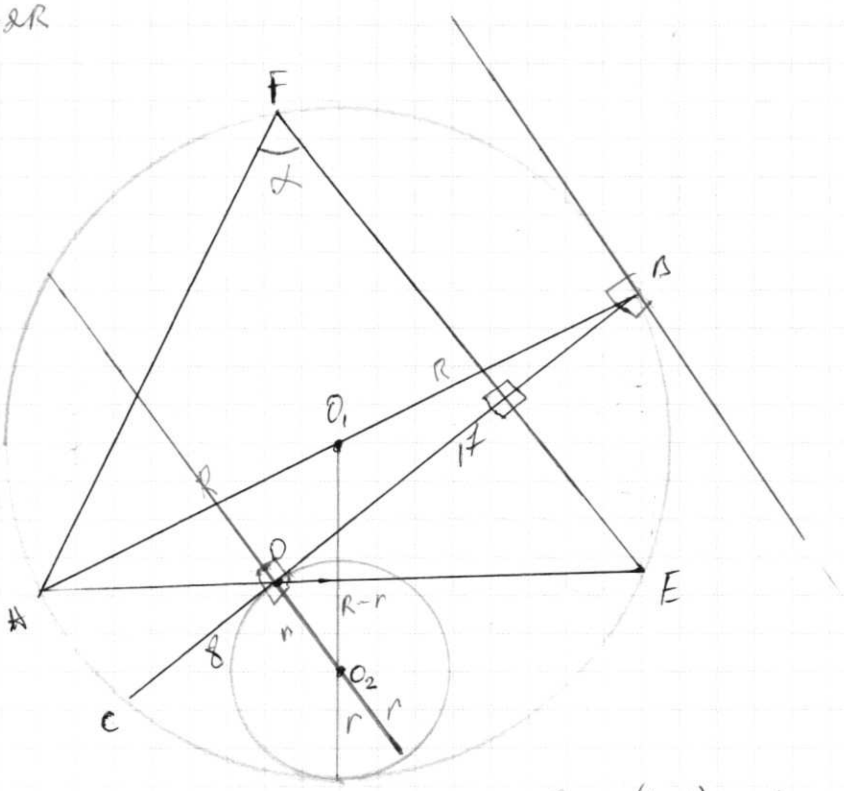
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{AE}{\sin\alpha} = 2R$



$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$

$\sin\alpha\cos\beta(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + \sin\beta\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin\alpha(\cos^3\beta - \sin^2\beta\cos\beta)$ -

$\cos^3\beta \overset{||}{-} \cos\beta + \cos^3\beta$

$\overset{||}{2\cos^3\beta - \cos\beta}$

$\cos\beta(2\cos^2\beta - 1) = \cos\beta\cos 2\beta$

$\sin\alpha(2\cos^3\beta - \cos\beta) + \sin\beta(2\cos^3\alpha - \cos\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cos^3\beta - \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha + 2\sin\beta\cos^3\alpha$

$2\sin\alpha\cos^3\beta + 2\sin\beta\cos^3\alpha - \sin(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin\alpha\cos\beta\cos 2\beta + \sin\beta\cos\alpha\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$9y^2-18y+9$

x^2-4x+4

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$z^2=x^2-4x+4$

$w^2=y^2-2y+1$

$x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$w \quad z$

$9w^2=9y^2-18y+9$

$z-2w=\sqrt{wz}$

$9w^2+z^2=x^2+9y^2-4x-18y+13$

$\Downarrow$

$9w^2+z^2-13=12$

$$\begin{cases} z-2w=\sqrt{wz} \\ 9w^2+z^2=25 \end{cases}$$

$z-2w\geq 0$

$9w^2+z^2=25$

$z^2=25-9w^2=$

$=(5-3w)(5+3w)$

$z=2w+\sqrt{wz}$

$z^2-4zw+4w^2=wz$

$z-2w=\sqrt{wz}$

$z=\sqrt{w}(2\sqrt{w}+\sqrt{z})$

$z^2-5zw+4w^2=0$

$\sqrt{z}-\frac{2w}{\sqrt{z}}=\sqrt{w}$

$D=25w^2-16w^2=9w^2$

$z=\frac{5w\pm 3w}{2}=\left[\begin{array}{l} 4w \\ w \end{array}\right.$

$\cancel{\frac{z-2w}{\sqrt{z}}=\sqrt{w}}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z=4w \\ 9w^2+16w^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} 9w^2+w^2=25 \\ z=w \end{cases} \end{array}\right.$$

$\left[\begin{array}{l} w=1 \\ w^2=2,5 \end{array}\right.$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} z=4w \\ w=1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} w=\sqrt{2,5} \\ z=w \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$z-2w=4-2=2\geq 0$

$z-2w=\sqrt{2,5}-2\sqrt{2,5}=-\sqrt{2,5}\ngeq 0$

$\Rightarrow$ не подходит

$\Downarrow$

$$\begin{cases} w=1 \\ z=4 \end{cases} \begin{cases} y-1=1 \\ x-2=4 \end{cases} \begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t} \geq t (|t|^{\log_{12} \frac{13}{12}} - 1)$

≥ 1

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18$

$x^2 + 18x > 0$

$t > 0$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$t(1 + t^{\log_{12} 5 - 1} - t^{\log_{12} 13 - 1}) \geq 0$

$t > 0 \Rightarrow 1 + t^{\log_{12} 5 - 1} - t^{\log_{12} 13 - 1} \geq 0$

$1 \geq t > 0$ t

$t \geq 1$ функция убывает

$t = 144$

функция $y = 1 + t^{\log_{12} \frac{5}{12}} - t^{\log_{12} \frac{13}{12}}$ убывает, т.к $\log_{12} \frac{13}{12} > 0$

а $\log_{12} \frac{5}{12} < 0$,

т.е $t^{\log_{12} \frac{5}{12}}$ убывает

а $t^{\log_{12} \frac{13}{12}}$ возрастает

(т.к степень положительна)

если от 0 до 1, то

$1 + t^{\log_{12} \frac{5}{12}} - t^{\log_{12} \frac{13}{12}} = 0$

~~$1 + \frac{5}{12}$~~ $25 - 169 = 144$

при $t = 144$ $1 + t^{\log_{12} \frac{5}{12}} - t^{\log_{12} \frac{13}{12}} = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

(Переводим сумму в произведение)

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

подставляем значение из первого уравнения.

$$-\frac{2\cos 2\beta}{\sqrt5} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\frac{2\sin 2\alpha}{\sqrt5} \pm \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$$

1 случай:

$$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$$

$$\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{\underbrace{1+\operatorname{tg}^2\alpha}_{>0}} + \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\underbrace{1+\operatorname{tg}^2\alpha}_{>0}} = -1$$

$$4\operatorname{tg}\alpha + 1 - \cancel{\operatorname{tg}^2\alpha} = -1 - \cancel{\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$$

2 случай:

$$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$

$$\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -1$$

$$4\operatorname{tg}\alpha - 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = -1 - \operatorname{tg}^2\alpha$$

$$2\operatorname{tg}^2\alpha + 4\operatorname{tg}\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha+2) = 0$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = -2 \end{cases}$$

Ответ: $-2; 0; -\frac{1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Задача 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

Пусть $W=y-1$, а $Z=x-2$

тогда $x-2y=Z-2W$,

тогда $Z-2W=\sqrt{WZ}$

$Z^2=x^2-4x+4$
$W^2=y^2-2y+1$

$\Downarrow$

$Z^2+9W^2=x^2-4x+4+9y^2-18y+9=x^2+9y^2-4x-18y+13$

тогда $x^2+9y^2-4x-18y=Z^2+9W^2-13$

система приобретает вид:

ОДЗ: $Z-2W\geq 0$

$$\begin{cases} Z-2W=\sqrt{WZ} \\ Z^2+9W^2=25 \end{cases}$$

$Z-2W=\sqrt{WZ}$

$Z^2-4WZ+4W^2=WZ$

$Z^2-5WZ+4W^2=0$

$D=25W^2-16W^2=9W^2$

$Z=\frac{5W\pm 3W}{2}=\left[\begin{array}{l}4W\\W\end{array}\right.$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} Z=4W \\ Z=W \end{array}\right. \\ Z^2+9W^2=25 \\ Z-2W\geq 0 \end{cases}$$

есть 2 случая

1 случай:
$Z=4W$ ОДЗ: $Z-2W\geq 0$

$16W^2+9W^2=25$

$25W^2=25$

$W^2=1$

$W=\pm 1 \Rightarrow Z=\pm 4$

проверим по ОДЗ:

$Z=+4$, $W=+1$: $4-2\geq 0 \Rightarrow$ верно

$Z=-4$, $W=-1$: $-4+2\not\geq 0 \Rightarrow$ неверно

2 случай:
$Z=W$ ОДЗ: $Z-2W\geq 0$

$10W^2=25$

$W^2=2,5$

$W=\pm\sqrt{2,5} \Rightarrow Z=\pm\sqrt{2,5}$

проверим по ОДЗ:

$Z=\sqrt{2,5}$, $W=\sqrt{2,5}$: $\sqrt{2,5}-2\sqrt{2,5}<0 \Rightarrow$ неверно

$Z=-\sqrt{2,5}$, $W=-\sqrt{2,5}$: $-\sqrt{2,5}+2\sqrt{2,5}>0 \Rightarrow$ верно

вернёмся к исходным переменным:

$$\begin{cases} W=y-1 \\ Z=x-2 \end{cases}$$

тогда есть 2 решения:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-\sqrt{2,5} \\ y-1=-\sqrt{2,5} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2-\sqrt{2,5} \\ y=1-\sqrt{2,5} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

Ответ: $x=6, y=2$; $x=2-\sqrt{2,5}, y=1-\sqrt{2,5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{\text{задача 3}}$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ:

$x^2+18x>0$

$\Downarrow$

$|x^2+18x|=x^2+18x$

пусть $t=x^2+18x$

тогда $5^{\log_{12}t}+t \geqslant t^{\log_{12}13}$

$$t^{\log_{12}5}+t-t^{\log_{12}13}\geqslant 0$$

$$t\left(t^{\log_{12}\frac{5}{12}}+1-t^{\log_{12}\frac{13}{12}}\right)\geqslant 0$$

$t>0$ (по. ОДЗ)

$\Downarrow$

$$1+t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-t^{\log_{12}\frac{13}{12}}\geqslant 0$$

рассмотрим 3 случая

1 случай:

если $t\in(0;1)$

если $t\in(0;1)$, то

$t^{\log_{12}\frac{13}{12}}>-1$ (т.к $t<1$)

следовательно $1-t^{\log_{12}\frac{13}{12}}>0$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}}>0$

т.е $1+t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-t^{\log_{12}\frac{13}{12}}>0$

тоесть $t\in(0;1)$ - подходит

2 случай:

$t=1$

если $t=1$, то

$1+1-1>0$

$1>0$

неравенство верно

3 случай:

$t>1$

$\log_{12}\frac{13}{12}>\log_{12}\frac{5}{12}$

$\Downarrow$

Функция $y=t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

монотонно убывает,

значит $y=1+t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

равна нулю лишь в 1 точке, и т.к монотонно убывает то при всех значениях t до этого нерав-во будет верно

$$1+t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-t^{\log_{12}\frac{13}{12}}=0$$

при $t=144$, следовательно

неравенство верно при $t<144$

соеденив эти случаи, получим, что $t\in(0;144]$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

$18 \times 18 = 144 \; 18 \; 324$

$144 \times 4 = 576$

$576 + 324 = 900$

Вернемся к исходным переменним

$t = (x^2 + 18x)$

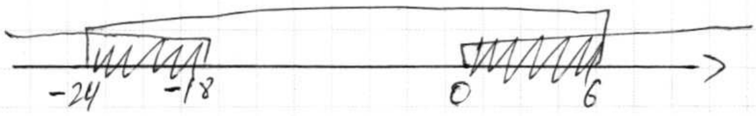
$x^2 + 18x - 144 = (x-6)(x+24)$

$D = 324 + 576 = 900 = (30)^2$

$x = \frac{-18 \pm 30}{2} = \left[\begin{array}{l} 6 \\ -24 \end{array}\right.$

$\begin{cases} x^2 + 18x > 0 \\ x^2 + 18x \le 144 \end{cases}$

$\begin{cases} x(x+18) > 0 \\ (x-6)(x+24) \le 0 \end{cases}$



Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

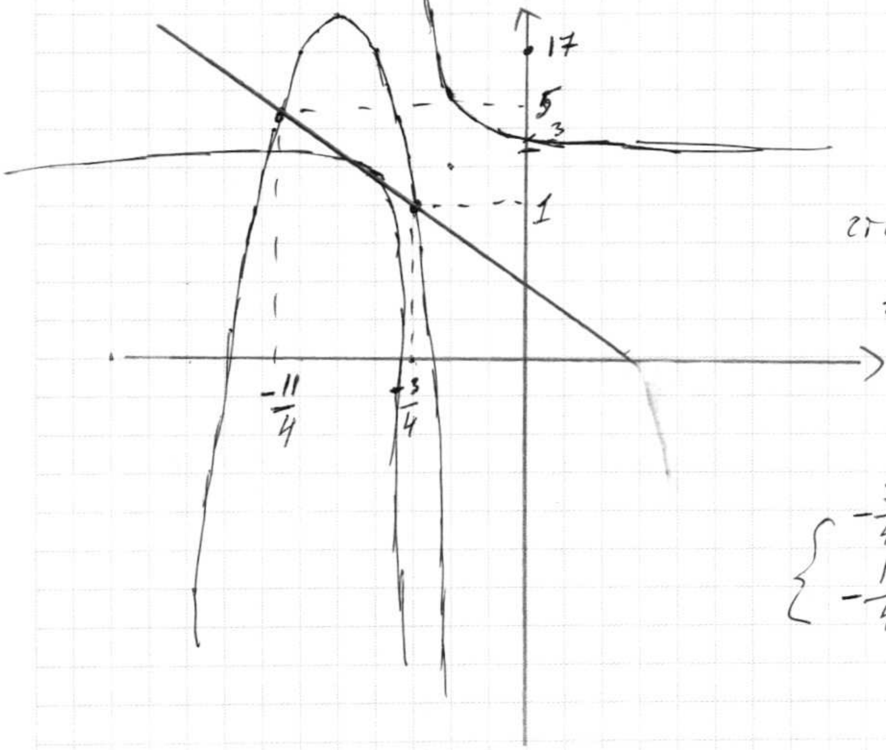
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$ $\quad x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$-8x^2-30x-17$ – парабола
$ax+b$ – прямая
$\frac{12x+11}{4x+3}$ – гипербола

чтобы неравенство выполнялось, необходимо, чтобы прямая $ax+b$ лежала выше гиперболы и ниже параболы (см. рисунок)



в данном случае видно, что прямая $ax+b$, проходящая через точки $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ и $\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ подходит.

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}a+b=1 \\ -\frac{11}{4}a+b=5 \end{cases} \quad \begin{cases} b=1+\frac{3}{4}a \\ b=5+\frac{11}{4}a \end{cases}$$

$1+\frac{3}{4}a=5+\frac{11}{4}a$

$\frac{3}{4}a=-4$

$a=-\frac{16}{9} \Rightarrow b=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{9}=$

$=\frac{36-48}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

Ответ: $a=-\frac{16}{9}$; $b=\frac{1}{3}$ – подходит.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик

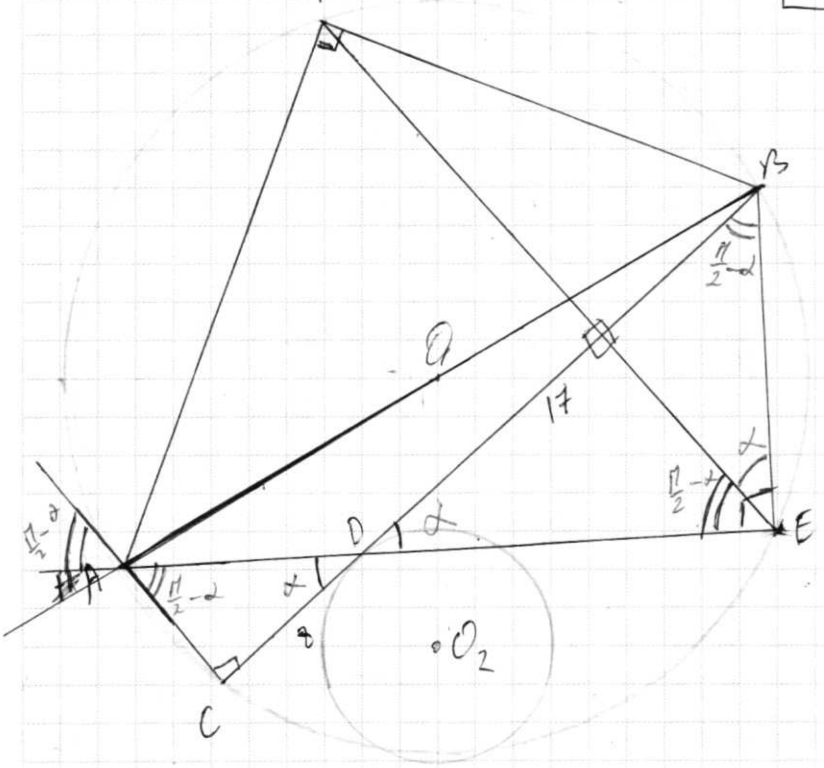
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

задача 4



$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

g(x) прямая

Парабола

f(x)

парабола

ветви ~~вниз~~

h(x) - Гипербола

$8x^2+30x+17=$ ~~356~~

$D=850-32\cdot 17=900-544=356=(2\sqrt{89})^2$

$32\cdot 17 = 224 + 320 = 544$

$356 : 2 = 178$, $178 : 2 = 89$

$x=\frac{-30\pm 2\sqrt{89}}{16}=$

$x_0=\frac{-30}{16}=-\frac{15}{8}$

$f\left(-\frac{11}{4}\right)=-8\frac{121}{16}-\frac{30\cdot 11}{4}-17=$

$x_0=-\frac{-30}{-16}==\frac{15}{-8}=$

$=-\frac{121}{2}-\frac{15\cdot 11}{2}-17=$

$=-\frac{121+165+34}{2}=\frac{155+165}{2}=$

$=\frac{320}{2}=160$

$f\left(-\frac{3}{4}\right)=$

$\begin{array}{r|l} 12x+11 & 4x+3 \\ -\;(12x+9) & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$

$3+\frac{2}{4x+3}$

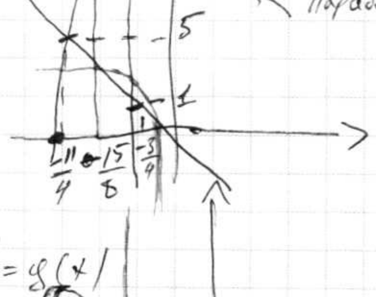
$-8x^2-30x-17=$

$x_0=-\frac{-30}{-16}=-\frac{15}{8}$

$y_0=-\frac{225}{8}+\frac{30\cdot 15}{8}-17=\frac{-225+450-17\cdot 8}{8}=\frac{136}{8}=\frac{68}{4}=\frac{34}{2}=17$

$17\cdot 8=136$

$136 : 8 = 17$



ax+b ~~ниже~~ параболы

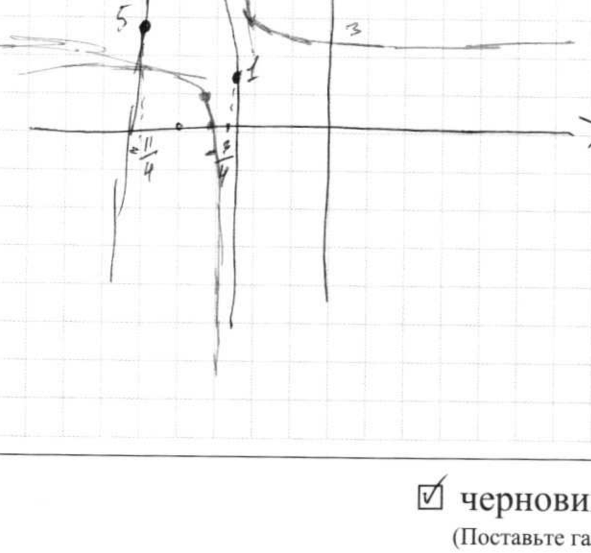
$y\left(-\frac{11}{4}\right)=-8\frac{121}{16}+30\frac{11}{4}-17=\frac{15\cdot 11}{2}-\frac{121}{2}-17=$

$=\frac{165-121-34}{2}=\frac{44-34}{2}=5$

$y\left(-\frac{3}{4}\right)=-8\frac{9}{16}+\frac{30\cdot 3}{4}-17=$

$=\frac{15\cdot 3}{2}-\frac{9}{2}-17=\frac{45-9-34}{2}=\frac{36-34}{2}=1$

$ax+b=g(x)$



$3+\frac{2}{4x+3}$