МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$2\alpha+2\beta > 180$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$

~~$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=0$~~

~~$((2\alpha+2\beta)+2\beta)$~~

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

~~1) $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$ $2\alpha+2\beta$ – III четверть~~

~~$\sin -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \sin 2\beta\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$~~

~~$-\cos 2\beta - 2\sin 2\beta + \sqrt5\cdot\sin 2\alpha = -\frac{2\sqrt5}{5}$~~

~~$2\alpha+2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}+2\pi n$~~

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$360-2\alpha-2\beta$

$2\alpha+2\beta$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\alpha\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta\left(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha\right) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{5}$ $\quad -\frac{1}{\sqrt5}$ $\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5} = \frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} 2 \cos\beta\ 1-2\sin^2\beta}$

$\cancel{\sin^2\beta = \frac{1-\cos 2\beta}{2}}$

$\cancel{\sin\beta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\beta}{2}}}$

$\cancel{\cos 2}$ $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos 2\beta^2} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

I случ

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Big| : \cos 2\alpha$

$\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\operatorname{tg} 2\alpha + 2 = -1$

$\operatorname{tg} 2\alpha = -3$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -3$

$2\operatorname{tg}\alpha = -3 + 3\operatorname{tg}^2\alpha$

$3\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1+3\cdot 3}}{3} =$

$= \frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\frac{\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

II случ.

$\operatorname{tg} 2\alpha - 2 = -1$

$\operatorname{tg} 2\alpha = 1$

$2\operatorname{tg}\alpha = 1 - \operatorname{tg}^2\alpha$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{1+1}}{1} = -1\pm\sqrt{2}$

Ответ: 1; $-1\pm\sqrt{2}$; $\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$

I случ 2β – I четверть

II случ. 2β – IV четверть

если $\cos 2\alpha = 0$

$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$\sin \frac{\pi}{2} + \pi n = \pm 1$

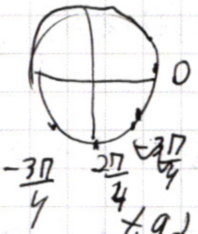
1) $1\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ложно

2) $-1\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow 2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi n$

подходит



πn – период тангенса следовательно знак не меняется

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) =$

$\cancel{= \frac{\sin(\pi-\frac{\pi}{4})}{\cos(\pi-\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} =}$

$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\qquad x \geq 12y \qquad 2xy-12y-x+6 \geq 0$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$2xy-12y-x+6$

$2y(x-6)-(x-6)=(x-6)(2y-1)$

$$\begin{cases} x^2-26xy+144y^2=-12y-x+6 \\ x^2-2\cdot 6x+36-\cancel{36}+(6y)^2-6y\cdot 2\cdot 3+9-\cancel{9}=45 \end{cases}$$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90 \qquad (6y-3)\cdot 2=12y-6$

$\underbrace{(x-6)^2}_{u^2}+\underbrace{(6y-3)^2}_{v^2}=(3\sqrt{10})^2 \qquad (x-6)\cdot -1=-x+6$

$\underbrace{x-6}_{u}-\underbrace{12y+6}_{2v}=u+v$ $\qquad 36=12\cdot 3=4\cdot 9$

$$\begin{cases} u^2+v^2=90 \\ \cancel{u+2v=\sqrt{2xy-}} \\ u-2v=\sqrt{\underbrace{(x-6)}_{u}\underbrace{(2y-1)}_{\frac{v}{3}}} \\ u-2v=\sqrt{u\cdot\frac{v}{3}} \end{cases}$$

$6y-3=v$ $\qquad 13=4+9$

$6y=v+3$ $\qquad 36=4\cdot 9$

$y=\frac{v+3}{6}$

$2y=\frac{v+3}{3}=\frac{v}{3}+1$

$4uv=\frac{12uv}{3}$

$$\begin{cases} u^2+v^2=90 \\ u^2-4uv+4v^2=\frac{uv}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} u^2+v^2=90 \\ u^2-\frac{13uv}{3}+4v^2=0 \quad |:v^2 \end{cases}$$

$\left(\frac{u}{v}\right)^2-\frac{13}{3}\left(\frac{u}{v}\right)+4=0$

$3\left(\frac{u}{v}\right)^2-13\left(\frac{u}{v}\right)+12=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{u}{v}=\frac{4}{3} \\ \frac{u}{v}=3 \end{array}\right.$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{u}{v}=3 \\ \frac{u}{v}=\frac{4}{3} \end{array}\right. \\ u^2+v^2=90 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=3v \\ u=\frac{4}{3}v \end{array}\right. \\ u^2+v^2=90 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} v^2+9v^2=90 \\ \frac{9v^2}{9}+\frac{16}{9}v^2=90 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 10v^2=90 \\ \frac{25v^2}{9}=90 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} v=\pm 3 \\ (5v)^2=810=(9\sqrt{10})^2 \end{array}\right.$$

$5v=\pm 9\sqrt{10}$

$v=\pm\frac{9\sqrt{10}}{5}$

$\Rightarrow$

проверка

$(u;v)$

$(9;3)$ + +

$(-9;-3)$ + −

$\left(\frac{12\sqrt{10}}{5};\frac{9\sqrt{10}}{5}\right)$ + −

$\left(\frac{12\sqrt{10}}{5};-\frac{9\sqrt{10}}{5}\right)$ + +

$u=x-6$

$v=6y-3$

$x=u+6$

$y=\frac{v+3}{6}$

$\Rightarrow$

проверка

$\frac{uv}{3}>0$

$u>2v$

$\frac{\cancel{9}^{3}\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}=\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$\Rightarrow$ $(x;y)$

$(15;1)$

$\cancel{(-3;0)}$

Ответ: $(15;1)$

$\left(6-\frac{12\sqrt{10}}{5};\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$\cancel{\left(\frac{12\sqrt{10}}{5}+6;\frac{\frac{9\sqrt{10}}{5}+3}{6}\right)}$

$\frac{\cancel{9}^{3}\sqrt{10}}{5\cdot\cancel{6}2}+\frac{1}{2}=$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}+\frac{1}{2}=\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{2}$

$\left(-\frac{12\sqrt{10}}{5}+6;\frac{\frac{9\sqrt{10}}{5}+3}{6}\right)\Rightarrow\left(6-\frac{12\sqrt{10}}{5};\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$10x-x^2>0$

$-\quad 0 \quad + \quad 10 \quad -$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ $\quad a^{\log_b c}$

$x\in(0;10) \Rightarrow x^2-10x<0$

$$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}+x^2$$

$$x^2-10x+(10x-x^2)^{\log_3 5}-(10x-x^2)^{\log_3 4}\leq 0$$

1) т.к $x\in(0;10) \Rightarrow x^2-10x<0$

2) $\log_3 a$ – возр. функция, т.к $(10x-x^2)>0$ на $x\in(0;10) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к $5>4 \Rightarrow \log_3 5>\log_3 4 \Rightarrow (10x-x^2)^{\log_3 5}-(10x-x^2)^{\log_3 4}>0$

3) $\Rightarrow$ пусть $10x-x^2=t$

$t>0$

тогда

$2>\log_3 5>\log_3 4>1$

$2 = \log_3 9$, $1 = \log_3 3$

$$-t^{\log_3 3}+t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}\leq 0$$

$$t^{\log_3 5}\leq t^{\log_3 4}+t^{\log_3 3}$$

$x_в=-\frac{10}{2(-1)}=5 \Rightarrow$

$t\in(0;25]$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

(Нумеровать только чистовики)

~~$f'(t) = \left(t^{\log_3 5}\right) = \log_3 5\, t$~~

$\log_3$ - возр.

$\log_3\left(t^{\log_3 5}\right) = \log_3 t \cdot \log_3 5$

$\log_3\left(t^{\log_3 4}\right) = \log_3 t \cdot \log_3 4$

$\log_3\left(t^{\log_3 3}\right) = \log_3 t \cdot \log_3 3$

$\Rightarrow \log_3 t \cdot \log_3 5 \le \log_3 t \left(\log_3 4 + 1\right)$

$\log_3 t \cdot \log_3 5 \le \log_3 t \cdot \log_3 12$

$\underbrace{\log_3 \frac{12}{5}}_{>0} \cdot \log_3 t \geq 0$

$\log_3 t \geq 0$

$t \geq 1 \Rightarrow$

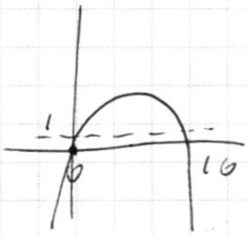
$\Rightarrow t \in [1; 25]$

т.к. $t \in (0; 10) \Rightarrow$

4) $t = 10x - x^2$ - парабола ветви вниз

$10x - x^2 \geq 1$

$x^2 - 10x + 1 \le 0$



$x = 5 \pm \sqrt{25-1} = 5 \pm \sqrt{4 \cdot 6} = 5 \pm 2\sqrt{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [5 - 2\sqrt{6}; 5 + 2\sqrt{6}]$

Ответ: $x \in [5 - 2\sqrt{6}; 5 + 2\sqrt{6}]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(6) = f(3\cdot 2) = f(6\cdot 1)$

$f(3) = 0$

$f(2) = 0$

$f(6) = f(6) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(6) = f(3) + f(2) = f(3\cdot 1) + f(2\cdot 1) = f(3) + f(2) = 0$!!

x-аргумент
y-значение f(x)

$\Rightarrow$

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0	0	0	1	0	1	0	0

x	10	11	12
y	1	2	0

x	13	14
y	3	

$x \in N$, $y \in N$

т.к. числа рациональны то $a = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ - несокр. дробь

$f(4) = f(8\cdot\frac{1}{2}) = f(8) + f(\frac{1}{2}) = 0 + 0$

$f(8) = f(4\cdot 2) = f(4) + f(2)$

$f(4) - f(8) = f(\frac{1}{2})$

$f(8) - f(4) = f(2)$

$n \geq 1$ $n \in N$ подходящие

$f(a) - f(an) = f(\frac{1}{n})$

$f(an) - f(a) = f(n)$

$\Rightarrow f(\frac{1}{n}) + f(n) = 0$

x	14	15	16	17	18	19	20
y	1	1	0	4	0	4	1

+ утверждение

~~если~~ число можно представить в виде произведения простых чисел, и если среди этих чисел есть числа больше 4, то число обратное к данному отрицательно

так $f(10) = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{10}) = -1$

x	21	22	23	24	25
y	1	2	5	0	2

$f(\frac{1}{20}) = -1$

$f(\frac{1}{5}) = -1$ $f(\frac{1}{14}) = -1$ $f(\frac{1}{21}) = -1$

$f(\frac{1}{7}) = -1$

$f(\frac{1}{15}) = -1$ $f(\frac{1}{22}) = -2$

$f(\frac{1}{11}) = -2$ $f(\frac{1}{17}) = -4$ $f(\frac{1}{23}) = -5$

$f(\frac{1}{13}) = -3$ $f(\frac{1}{19}) = -4$ $f(\frac{1}{25}) = -2$

Тогда, чтобы $F(x/y) < 0$

нужно $F(x) + F\left(\frac{1}{y}\right) < 0$ $\Rightarrow$ если $F\left(\frac{1}{y}\right) = a \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) < a$

Тогда для чисел от 2 до 25

значение $F(x)$ ~~$\forall y$~~

у 10 чисел $F(x) = 0 \Rightarrow$ для этих чисел подойдёт любой $F\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$14 \cdot 10$ пар

у 7 чисел $F(x) = 1 \Rightarrow 7 \cdot 7$ пар

у 3 чисел $F(x) = 2 \Rightarrow 3 \cdot 4$ пар

у 1 числа $F(x) = 3 \Rightarrow 1 \cdot 3$ пар

у 2 чисел $F(x) = 4 \Rightarrow 2 \cdot 1$ пар

у 1 числа $F(x) = 5 \Rightarrow$ здесь пар не будет

10, 7, 4

$14 \cdot 10 + 7 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 3 + 2 = \overbrace{140 + 49 + 12 + 4 + 1}^{190 \quad 50} =$ ($\underbrace{12+4}_{16}$)

$= 206$

Ответ: 206 пар

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №8
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

$180-\alpha \Rightarrow 180+2\alpha=\alpha$

$180-90$

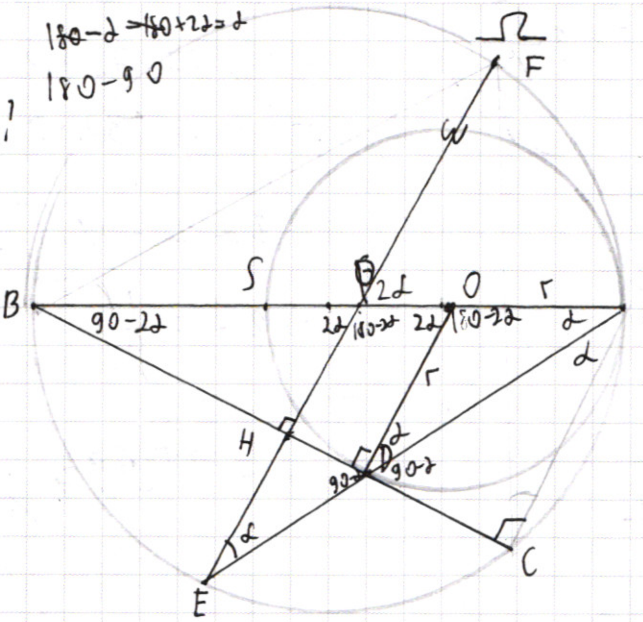
$S_{AFE}=?$

$\angle AFE=?$

$R, r=?$

$CD=\frac{15}{2}$

$BD=\frac{17}{2}$



1) △AEF − впис. в окр.
теор. синусов

$$\frac{AF}{\sin\alpha}=2R$$

2) $BH\cdot CH=HF\cdot HE$

$$BD^2=\underbrace{BS}_{2R-2r}\cdot\underbrace{BA}_{2R}$$

$$BD^2=2(R-r)\cdot 2R$$

$$BD^2=4(R-r)R$$

$$BD^2=4R^2-4Rr$$

~~tg(90~~

$$tg\,2\alpha=\frac{BD}{r}$$

3) $BO=2R-r$

$DO=r$

$BD=\frac{17}{2}$

⇒ теор. Пиф

~~$(2R-r)^2=r^2+(BD)^2$~~

$BC=BD+CD=16$

~~$AC^2=$~~

AB − диаметр ⇒ ∠C = 90

4) теор. Пиф △BAC

$$4R^2=(BC)^2+AC^2$$

$$4R^2=16^2+AC^2$$

$$AC=\sqrt{4R^2-4\cdot4\cdot16}$$

$$AC=2\sqrt{R^2-8^2}=$$

$$=2\sqrt{17^2-8^2}=$$

$$=2\cdot15=30$$

5) △BOD ~ △BAC

$$\frac{BO}{BA}=\frac{BD}{BC}$$

$$\frac{2R-r}{\cancel{2}R}=\frac{17}{\cancel{32}\,16}$$

$$(2R-r)16=17R$$

$$32R-16r=17R$$

$$16r=15R$$

$$r=\frac{15}{16}R$$

$$\frac{17^2}{4}=4R\left(R-\frac{15}{16}R\right)$$

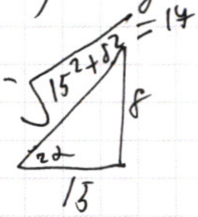
$$17^2=\cancel{16}\cdot R\cdot\frac{1}{\cancel{16}}R$$

$R=17$

⇓

$$r=\frac{15\cdot17}{16}$$

6) $tg2\alpha = \frac{BD}{r} = \frac{\cancel{17}\cdot\cancel{16}\,8}{\cancel{8}\cdot 15\cdot\cancel{17}} = \frac{8}{15}$



$2\alpha = arctg\frac{8}{15}$

$\angle AFE = \alpha = \frac{1}{2}arctg\frac{8}{15}$

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\times\begin{array}{r}15\\15\\ \hline 75\\150\\ \hline 225\end{array}$ $\quad +\begin{array}{r}225\\64\\ \hline 289\end{array}$

$8(1-tg^2\alpha) = 30\,tg\alpha$

$8tg^2\alpha + 30tg\alpha - 8 = 0$

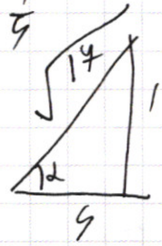
$-30 = -32+2$

$-64 = -32\cdot 2$

$\times\begin{array}{r}17\\17\\ \hline 119\\17\\ \hline 289\end{array}$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -4 \\ tg\alpha = \frac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow 1$

$\Rightarrow \alpha = arctg\frac{1}{4}$



7) $tg\alpha = \frac{CD}{AC}$

$\sin\alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$AD = \frac{15\sqrt{17}}{2\cdot 1} = \frac{15\sqrt{17}}{2}$

8) из т. синусов

$AF = 2R\cdot\sin\alpha = \cancel{34}^{\,2\cdot17}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17}$

Пусть $PO = x$ тк $\triangle BPM \sim \triangle BOD$

$\frac{BP}{BO} = \frac{BM}{BD}$ $\quad \frac{BO-x}{BO} = \frac{BM}{BD}$

$\sin2\alpha = \frac{BM}{BP} = \frac{BM}{BO-x}$

$\sin2\alpha = \frac{8}{17}$

~~$\frac{2R-r-x}{2R-r}\cdot\frac{17}{2} = B$~~

$\frac{\cancel{BO-x}}{BO}\cdot BD = (\cancel{BO-x})BM\cdot\sin2\alpha$

$\frac{BD\cdot 17}{(2R-r)\cdot 8} = BM$

$BC = CD+BD = BM+MD+CD$

$MD = BD-BM = \frac{15}{2}$

$BM = \frac{17\cdot17}{16\cdot\left(34-\frac{15\cdot17}{16}\right)} = \frac{17\cdot\cancel{17}}{2\cdot\cancel{17}\cdot16-15\cdot\cancel{17}} = \frac{17}{32-15} = 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9) $\cancel{E}$ $tg\alpha = \frac{HD}{EH} \Rightarrow EH = \frac{HD}{tg\alpha} = \frac{15}{2}\cdot 4 = 30$ $\triangle EMD = \triangle DAC$ по стороне и углу

$DE = \sqrt{}$

10) из пункта 7 H т.к. $BC \perp FE$

$BH\cdot CH = HF\cdot HE$

$1\cdot\left(\frac{15}{2}+\frac{15}{2}\right) = \cancel{30}\,30\cdot MF \Rightarrow MF = \frac{1}{2}$

11) $EF = HE + MF = 30{,}5 = \frac{61}{2}$

$AE = AD + DE = \frac{15\sqrt{14}}{2}\cdot 2 = 15\sqrt{14}$

12) $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\sin\alpha\cdot AE\cdot EF = \frac{1}{2}\cdot 15\sqrt{14}\cdot\frac{61}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}} =$

$= \frac{61\cdot 15}{4}$

Ответ: $R = 17$; $r = \frac{15\cdot 17}{16}$; $\angle AFE = \operatorname{arctg}\frac{1}{4}$;

$S_{AEF} = \frac{61\cdot 15}{4}$

№ 6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3 \qquad x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$$

$$x_{ср} = \frac{5}{8}$$

$x = \frac{1}{4}$

$$-2+9-3$$

$$-\cancel{32}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{16}} + \cancel{36}^{9} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} - 3$$

$$\frac{\cancel{16}^{4} \cdot \frac{3}{\cancel{4}}}{-\cancel{4}} \qquad -3 \leq \frac{a}{4} + b \leq \cancel{-32}\ 4$$

$x = 1$

$$-32+36-3$$

$$0 \leq a+b \leq 1$$

значит множество пар $(a; b)$ должны удовлетворять границам, а также когда слева - минимум функции, справа - минимум функции $\Rightarrow$ этих условий достаточно $\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5} \qquad f'(x) = \frac{16 \cdot (4x-5) - 16(x-1) \cdot 4}{(4x-5)^2} =$$

$$= \frac{16(4x-5-4x+4)}{(4x-5)^2} = \frac{-16}{(4x-5)^2}$$ $\Rightarrow f(x)$ - убывает на нашем промежутке

$$g(x) = -32x^2+36x-3$$

$$g'(x) = -64x+36 \qquad g'(x)=0 \qquad x = \frac{\cancel{36}\ 9}{\cancel{64}\ 16}$$ $\Rightarrow$ максимум в точке $\frac{9}{16}$

$g(x)$: $+$ на $\left(-\infty; \frac{9}{16}\right)$ ↗, $-$ ↘ после $\frac{9}{16}$

минимум в-