МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

$\log_{12} 13 = c$

$5^{\log_{12} 13}$ $13 = 12^c$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

$a = \log_b c$

$c = a^{\log_b}$

$c = b^a$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

$\frac{R+2r}{2R} = \frac{17}{17+8}$

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\boxed{tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{8\cos^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{9 \cdot 34}{34^2}} = \sqrt{\frac{34-9}{34}} = \sqrt{\frac{25}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{5\sqrt{34}}{34} \cdot \frac{3\sqrt{34}}{34} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3}{34} = \frac{15}{17}$

$\sin 2\alpha = \frac{25}{2R}$

$\frac{15}{17} = \frac{25}{2R}$

$2R = \frac{17 \cdot 5}{3}$

$R = \frac{17 \cdot 5}{6}$

$R = \frac{85}{6}$

$\sin\alpha = \frac{4{,}5}{x} = \frac{x}{17}$

$x^2 = 17 \cdot 4{,}5$

$x = \sqrt{\frac{17 \cdot 9}{2}} =$

$\sin\alpha = \frac{3\sqrt{\frac{17}{2}}}{17} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{3\sqrt{17}\cdot\sqrt{2}}{17 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$

$= 3\sqrt{\frac{17}{2}} = 3 \cdot \frac{\sqrt{17}\cdot\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{34} =$

$r = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{136}{15}$

$\frac{DC}{ED} = \frac{DA}{BD}$

DC

$\frac{R+t}{2R} = \frac{14}{25}$

$\frac{R+t}{2R} = \frac{14}{25}$

$\frac{R-t}{R} = \frac{16}{25}$

$\frac{R+t}{2(R-t)} = \frac{14}{16}$

$16R + 16t = 34R - 34t$

$34t + 16t = 34R - 16R$

$50t = 18R$

$t = \frac{18R}{50} = \frac{9}{25}R$

$R = \frac{9}{25}R + r$

$r = \frac{16}{25}R$

$\frac{R+t}{2R} = \frac{14}{25}$

$\frac{R-t}{R} = \frac{\frac{8\sqrt{34}}{3}}{\frac{25\sqrt{34}}{6}}$

$\frac{R-t}{R} = \frac{8\sqrt{34} \cdot 6}{3 \cdot 25\sqrt{34}}$

$25R + 25t = 34R$

$75R - 75t = 48R$

$\frac{45R + 45t}{75R - 45R}$

$\frac{R-t}{R} = \frac{DA}{AE}$

$\frac{DC}{DA} = \sin\alpha$

$DA = \frac{DC}{\sin\alpha} = \frac{8}{\frac{3\sqrt{34}}{34}} = \frac{\sqrt{34}\cdot 34 \cdot 8}{3\sqrt{34}} = \frac{8\sqrt{34}}{3}$

$ED = \frac{3}{2}\sqrt{34}$

$EA = \frac{3}{2}\sqrt{34} + \frac{8\sqrt{34}}{3} = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} & (*) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} & (**) \end{cases}$$

$(**)$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$\cancel{\sin 2\alpha\,(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta}$

$$\sin 2\alpha\,(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot 2\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta +$$
$$+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$(**)$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot$
$$\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$$

$$\sin(2\beta) = \sqrt{1-\frac{4\cdot 5}{25}} = \sqrt{\frac{5-4}{5}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$$

$$\cos(2\beta) = \frac{4\sqrt{5}}{2\cdot 5}$$

$$\cos(2\beta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin 2\alpha\,(2\cos^2 2\beta - 1) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta +$$
$$+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha\left(2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1\right) + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} +$$
$$+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\left(2\cdot\frac{4\cdot 5}{25} - 1\right) + \underbrace{\cancel{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}}_{\cos 2\alpha}\cdot\frac{4\cdot 5}{25} + \sin 2\alpha =$$
$$= -\frac{4}{5}$$

$$\frac{3}{5}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ tg\,\alpha = -\frac{1}{8\cos^2\alpha} \end{cases} \qquad \frac{1}{\cos^2\alpha} = \cancel{t}$$

$$\left(-\frac{1}{8\cos^2\alpha}\right)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{1}{64\cos^4\alpha} + 1 - \frac{1}{\cos^2\alpha} = 0$$

$$\frac{t^2}{64} - t + 1 = 0$$

$$t^2 - 64t + 64 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 32^2 - 64 = 32(32-2) = 32\cdot 30 = 2^5\cdot 2\cdot 15$$

$$t = 32 \pm \sqrt{32\cdot 30} = 32 \pm 8\sqrt{15}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 32 \pm 8\sqrt{15}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{\cos^2\alpha} = 32 + 8\sqrt{15} = tg^2\alpha + 1 \\ \frac{1}{\cos^2\alpha} = 32 - 8\sqrt{15} = tg^2\alpha + 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg^2\alpha = 31 + 8\sqrt{15} \\ tg\alpha = 31 - 8\sqrt{15} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = \pm\sqrt{31 + 8\sqrt{15}} \\ tg\,\alpha = \pm\sqrt{31 - 8\sqrt{15}} \end{array}\right.$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{8}{5}\sin 2\alpha + \frac{4}{5}\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\cancel{2\sin 2\alpha}\quad \cos 2\alpha = -1 - 2\sin 2\alpha$

(*)

$\sin 2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0$, $\cos\alpha \neq 0$

$\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = 0$

(**)

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{2}{5}$

$$\begin{cases} tg\,\alpha = -\frac{2}{5\cos^2\alpha} \\ tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \end{cases}$$

$\frac{4}{25\cos^4\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

Пусть $t = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{4}{25}t^2 + 1 - t = 0$

$4t^2 + 25 - 25t = 0$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = \pm 2 \\ tg\,\alpha = \pm\frac{1}{2} \\ tg\,\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1$

$(1 + 2\sin 2\alpha)^2 + \sin^2 2\alpha = 1$

$\cancel{1} + 4\sin 2\alpha + 4\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = \cancel{1}$

$5\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha(5\sin 2\alpha + 4) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \quad (*) \\ \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \quad (**) \end{array}\right.$$

$4t^2 - 25t + 25 = 0$

$D = 25^2 - 25\cdot 16 = 25\cdot 9$

$t = \frac{25 \pm 5\cdot 3}{8}$

$$t = \left[\begin{array}{l} \frac{25+15}{8} = 5 \\ \frac{25-15}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \end{array}\right.$$

$t = \frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$

$$\left[\begin{array}{l} tg^2\alpha + 1 = 5 \Rightarrow tg^2\alpha = 4 \\ tg^2\alpha + 1 = \frac{5}{4} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Ответ: $tg\,\alpha = 2$, $tg\,\alpha = \frac{1}{2}$, $tg\,\alpha = 0$, $tg\,\alpha = -2$, $tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$y = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$ax+b \ge \frac{12x+11}{4x+3}$

$y = -8x^2-30x-17 \quad x_b = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$\frac{(ax+b)(4x+3)-12x-11}{4x+3} \ge 0$

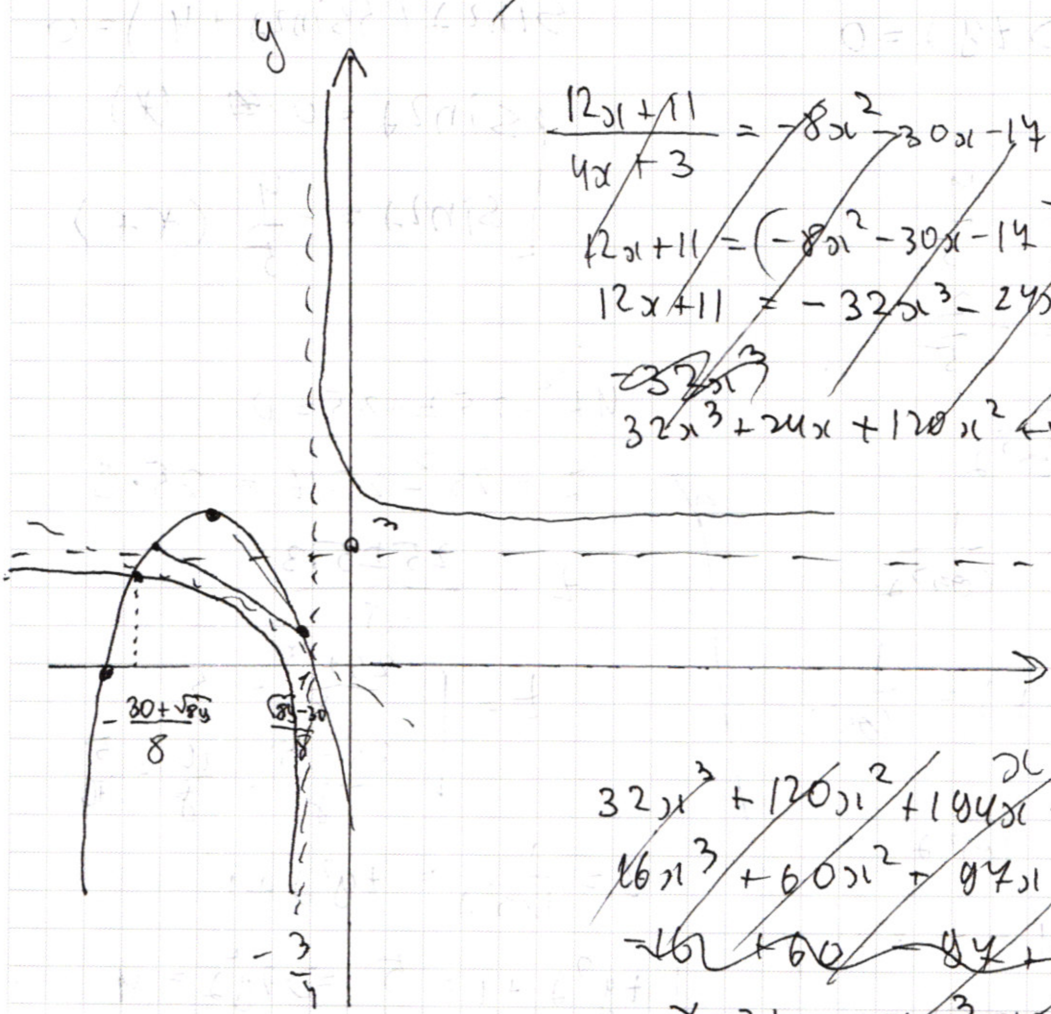
$$\begin{array}{r|l} 12x+11 & 4x+3 \\ -(12x+9) & 3 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$\frac{D}{1} = 15^2 - (-17)\cdot(-8) = 225 - 80 - 56 = 145 - 56 = 45 + 44 = 89$

$\frac{4ax^2+4bx+3ax+3b-12x-11}{4x+3} \ge 0$

$\frac{4ax^2+(4b+3a-12)x+3b-11}{4x+3} \ge 0$

$x = \frac{30 \pm \sqrt{89}}{-8}$



$\frac{12x+11}{4x+3} = -8x^2-30x-17$

$12x+11 = (-8x^2-30x-17)(4x+3)$

$12x+11 = -32x^3 - 24x^2 - 120x^2 - 90x - 68x - 51$

$\cancel{-32x^3}$

$32x^3 + 24x + 120x^2 + 90x + 68x + 51 + 12x + 11 = 0$

$32x^3 + 120x^2 + 194x + 62 = 0$

$16x^3 + 60x^2 + 97x + 31 = 0$

$\cancel{-16 + 60 - 97 + 31 = 0}$

$\cancel{x-31}$

$$\begin{array}{r|l} 16x^3+60x^2+97x+31 & x-31 \\ -16x^3 - & 16x^2 \end{array}$$

☐ черновик ☒ чистовик Страница № 3

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} & (*) \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 & (**) \end{cases}$

$(**)$ $x^2 - 4x + 9y^2 - 18y = 12$

$x^2 - 4x + 4 + (3y)^2 - 2\cdot 3y \cdot 3 + 9 + \cancel{9} - 9 - 4 = 12$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$ – окружность

$(*)$ $\cancel{x - 2y = \sqrt{-x + 2xy - 7xy - 2y + 1 + 1}}$

$\cancel{x - 2y = \sqrt{x(2y-1)}}$

$xy - x - 2y + 2 = x(y-1) - 2(y-1) = (y-1)(x-2)$

$x - 2y = \sqrt{(y-1)(x-2)}$, $x - 2y \geq 0$, $(y-1)(x-2) \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y-1 \leq 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases} \\ x \geq 2y \end{array}\right.$!!!

$(x-2y)^2 = (y-1)(x-2)$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - 5xy + x + 2y - 2 + 4y^2 = 0$

$\cancel{x^2 - xy + x}$

$x^2 + x(1-5y) + 2y - 2 + 4y^2 = 0$

$D = (1-5y)^2 - 4(2y - 2 + 4y^2) = 1 - 10y + 25y^2 - 8y + 8 - 16y^2 =$

$= 9y^2 - 18y + 9 = (3y-3)^2$

$x = \dfrac{5y - 1 \pm |3y-3|}{2}$

$\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ \left[\begin{array}{l} x = y + 1 \\ x = 4y - 2 \end{array}\right. \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5y - 1 + (-3y + 3)}{2} = y + 1 \\ x = \dfrac{5y - 1 + 3y - 3}{2} = 4y - 2 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y \geq 1 \\ x = \dfrac{5y - 1 + 3y - 3}{2} = 4y - 2 ; \ x = \dfrac{5y - 1 - 3y + 3}{2} = \\ = x = y + 1 \end{cases} \end{array}\right.$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

(**)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y+1 \\ (x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25 \quad (***) \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4y-2 \\ (x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25 \quad (****) \end{cases} \end{array}\right.$$

$(***)$ $(y+1-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$$(y-1)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$10(y-1)^2 = 25$$

$$(y-1)^2 - \frac{5}{2} = 0$$

$$\left(y-1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(y-1+\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = 0$$

$$y = 1 + \frac{\sqrt5}{\sqrt2} \; ; \; y = 1 - \frac{\sqrt5}{\sqrt2}$$

$(****)$

$$(4y-2-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$16(y-1)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$(y-1)^2 = 1$$

$$(y-1-1)(y-1+1) = 0$$

$$y = 0$$

$$y = 2$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases} \quad - \\ \begin{cases} y = 2 \\ x = 6 \end{cases} \quad + \\ \begin{cases} y = 1 + \frac{\sqrt5}{\sqrt2} \\ x = 2 + \frac{\sqrt5}{\sqrt2} \end{cases} \quad - \\ \begin{cases} y = 1 - \frac{\sqrt5}{\sqrt2} \\ x = 2 - \frac{\sqrt5}{\sqrt2} \end{cases} \quad + \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \end{array}\right. \\ x \geq 2y \end{cases}$$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\frac{\sqrt5}{\sqrt2}; 1-\frac{\sqrt5}{\sqrt2}\right)$

$$\begin{cases} x(x+18) \geq 0 \\ (x-(-9-\sqrt{82}))(x-(-9+\sqrt{82})) \geq 0 \end{cases}$$

$x = -9 \pm \sqrt{82}$

$$\left[\begin{array}{l} x = -9-\sqrt{82} \\ x = -9+\sqrt{82} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \\ x \in (-\infty; -9-\sqrt{82}] \cup [-9+\sqrt{82}; +\infty) \end{cases}$$

$(-9-\sqrt{82})(-9+\sqrt{82}) = 9^2 - 9\sqrt{82} + 9\sqrt{82} - 82 = 81 - 82 = -1$

$-9-\sqrt{82} \vee -18$

$-\sqrt{82} \vee -9$

$\sqrt{82} > 9$

$-\sqrt{82} < -9$

$-9-\sqrt{82} < -18$

$-9+\sqrt{82} \vee 0$

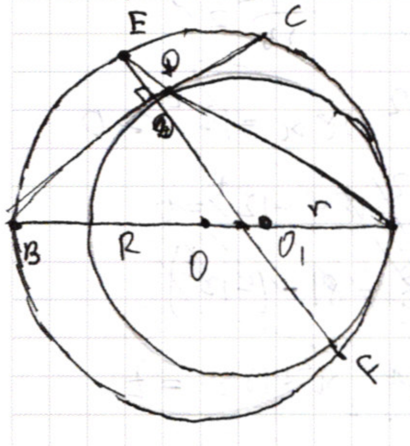
$\sqrt{82} > 9$

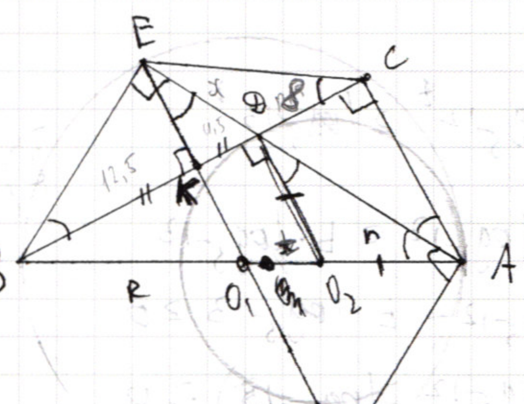
$-9+\sqrt{82} > 0$

$x \in (-\infty; -9-\sqrt{82}] \cup [-9+\sqrt{82}; +\infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; -9-\sqrt{82}] \cup [-9+\sqrt{82}; +\infty)$

№4





1) $\angle EBC = \angle EAC = \frac{1}{2} \cup EC$

2) $DO_2 \perp BC$, $DO_2 = r$

BC – касательная

3) $\left.\begin{array}{l} BC \perp EF \\ BC \perp DO_2 \\ BC \perp CA \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow EF \parallel DO_2 \parallel CA$

4) $\angle O_2DA = \angle DAC$ ($\angle EAC$) как накрест лежащ. при $DO_2 \parallel CA$ и сек DA

5) $DO_2 = O_2A = r \Rightarrow \triangle DO_2A$ – р/б $\Rightarrow \angle O_2DA = \angle O_2AE = \frac{1}{2} \cup BE = \angle BCE \Rightarrow \angle BCE = \angle DAC \Rightarrow \angle BCE = \angle EBC \Rightarrow \triangle BEC$ – р/б с основ BC, но EK ($EF \cap BC = K$) $\perp BC \Rightarrow EK$ – мед $\Rightarrow BK = KC$, но т.к. BC – хорда $EF \perp BC$

EF – серединн. перпендик., то EF – диам. окр. Ω

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \ge (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: $x^2+18x > 0 \Rightarrow 5^{\log_{12}(x^2+18x)} \ge (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$

Пусть $x^2+18x = 12^t \Rightarrow x^2 = 12^t - 18x$

1) $5^{\log_{12}12^t} + 12^t - \cancel{18x} \ge (12^t)^{\log_{12}13} - \cancel{18x}$

$5^t + 12^t \ge (12^{\log_{12}13})^t$

$5^t + 12^t \ge 13^t$

$\cancel{5^t \ge 13^t - 12^t}$

$\log_5 5^t + \log_5 12^t \ge \log_5 13^t$

$t + t\cdot\log_5 12 \ge t\cdot\log_5 13$

$t + t\cdot\log_5 12 - t\cdot\log_5 13 \ge 0$

$t(1+\log_5 12 - \log_5 13) \ge 0$

$t(\log_5 5 + \log_5 12 - \log_5 13) \ge 0$

$t\log_5\frac{5\cdot12}{13}$

$t\log_5\frac{5\cdot12}{13} \ge 0$

$\boxed{t \ge 0}$

$\log_5\frac{5\cdot12}{13} \ge 0$

$\log_5\frac{5\cdot12}{13} \ge \log_5 1$

$y = \log_5 x \nearrow$

$\frac{5\cdot12}{13} \ge 1$

2) $x^2+18x = 12^t > 0$

$\cancel{x^2+18x-12^t \ge 0}$

$\cancel{\frac{D}{4} = 81 - (-12^t)}$

$\log_{12}x^2+18x = t$

$\log_{12}x^2+18x \ge 0$

$\log_{12}x^2+18x \ge \log_{12}1$

$\log_{12}(x^2+18x) - \log_{12}1 \ge 0$

$\begin{cases} x^2+18x > 0 \\ x^2+18x-1 \ge 0, \text{ т.к } \log_{12}x \nearrow \end{cases}$

$x_1+x_2 = -18$

$x_1x_2 = -1$

$\frac{D}{4} = 9^2-(-1) = 81+1 = 82$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) т.к. EF - диам, то $\angle$ ~~BE~~ $EAF = 90°$ (впис. угол)

т.к. BA - диам, то $\angle BEA = \angle BCA = 90°$ (впис угол)

7) $DO_2 \parallel EF$

ED - сек

$\angle DEK$ и $\angle ADO_2$ - соответ.

$\Rightarrow \angle DEK = \angle ADO_2$

8) Пусть $\angle EBC = \angle BCE = \angle O_1EA = \angle O_1AE = \angle O_2DA = \angle DAC = \alpha$

9) $BC = BD + DC = 17 + 8 = 18 + 7 = 20 + 5 = 25$

$BK = \frac{BC}{2} = 12{,}5$

10) $\underset{(\triangle KDE)}{\sin\alpha} = \frac{KD}{ED} = \frac{BD - BK}{x} = \frac{17 - 12{,}5}{x} = \frac{4{,}5}{x}$

$\underset{(\triangle EDB)}{\sin\alpha} = \frac{ED}{BD} = \frac{x}{17} = \frac{4{,}5}{x} \Rightarrow x = \sqrt{17 \cdot 4{,}5} = 3\sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{34}$

$\sin\alpha = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{34}}{17} = \frac{3\sqrt{34}}{34} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{9 \cdot 34}{34^2}} = \sqrt{\frac{25}{34}} =$

$= \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

11) Пусть $O_1O_2 = t$, тогда $\frac{R + t}{2R} = \frac{BD}{BC}$ (из подобия $\triangle BDO_2$ и $\triangle BCA$)

$\frac{R+t}{2R} = \frac{17}{25} \Rightarrow 25R + 25t = 34R \Rightarrow 25t = 9R$

~~$25t$~~ =

$t = \frac{9R}{25}$

$r = R - t = \frac{16}{25}R$

12) $\sin\angle BAC = \frac{BC}{2R}$, где $\sin\angle BAC =$ ~~$\sin\alpha$~~ $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= 2 \cdot \frac{5\sqrt{34}}{34} \cdot \frac{3\sqrt{34}}{34} = \frac{5 \cdot 3}{17} = \frac{15}{17} \Rightarrow \frac{15}{17} = \frac{25}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{17 \cdot 25}{15}$

$R = \frac{17 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{85}{6}$

$r = \frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{25}_{5}} \cdot \frac{\cancel{85}^{17}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{136}{15}$

$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

13) ~~sin DA~~ $\sin\angle = \frac{DC}{DA} \Rightarrow DA = \frac{8}{\frac{3\sqrt{34}}{34}} = \frac{8\cdot 34}{3\sqrt{34}} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$

$EA = DA + ED = \frac{8}{3}\sqrt{34} + \frac{3}{2}\sqrt{34} = \frac{25}{6}\sqrt{34}$

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} EF \cdot EA \cdot \sin\angle = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{85}{6} \cdot \frac{25}{6}\sqrt{34} \cdot \frac{3\sqrt{34}}{34} =$

$= \frac{85 \cdot 25 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{2125}{12}$

$85 \cdot 25$: $425 + 1700 = 2125$

14) $\angle AFE = \arcsin \frac{EA}{EF} =$

$= \arcsin \frac{\frac{25}{6}\sqrt{34}}{\frac{2\cdot 85}{6}} = \arcsin \frac{25\sqrt{34}\cdot 3}{6 \cdot 85} = \arcsin \frac{5\sqrt{34}}{34}$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$

$S_{\triangle AEF} = \frac{2125}{12}$

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad f(x/y) < 0$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, p = простое

~~$f(x/y) = \left[\frac{x}{y}\right] < 0$~~

$1 \le x \le 24$

$1 \le y \le 24$

~~$f(x/y) = f(x) + f(y) = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{y}{4}\right]$~~

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение №3

$5^t + 12^t \geq 13^t$

$\cancel{\log_{13}(5^t+12^t) \geq t}$

При $t = 2$ $5^2+12^2 = 13^2$

При $t > 2$ $5^t+12^t < 13^t$

При $t < 2$ $5^t+12^t > 13^t$

$t \leq 2$

$x^2+18x = 12^t$

$\log_{12}(x^2+18x) = t \leq 2$

$\log_{12}(x^2+18x) \leq 2$

$$\begin{cases} x^2+18x > 0 \\ x^2+18x-144 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ +81 \\ \hline 225 \end{array}$$

$\frac{D}{4} = 81+144 = 225$

$x = -9 \pm 15$

$x = -24$

$x = 6$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-24; 6] \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

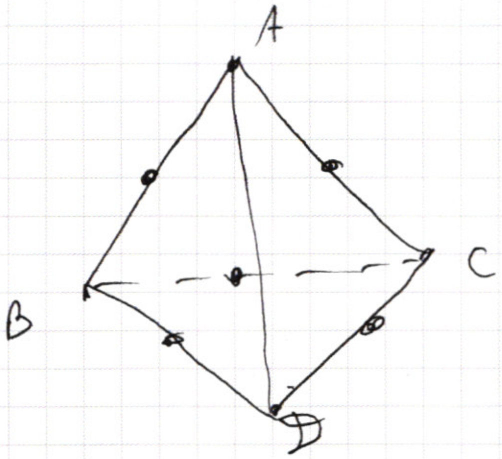
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

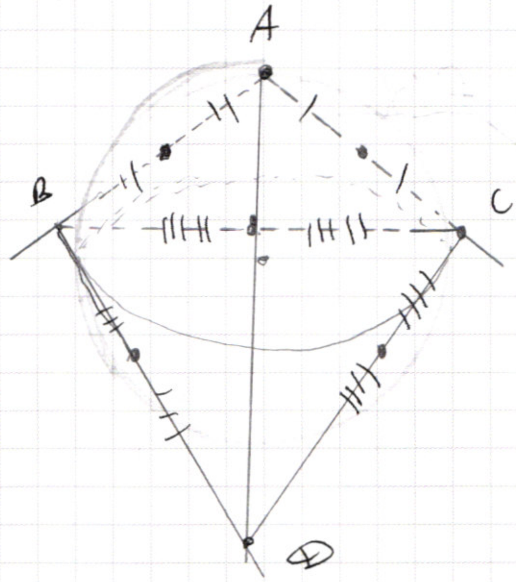
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

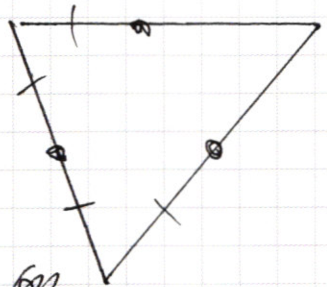
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







$$\le -\frac{11}{4}a + b \le 5$$

$$\frac{11}{4}$$

$$-8\cdot\frac{11^2}{4^2} + 30\cdot\frac{11}{4} - 17$$

$$-\frac{242}{4} + \frac{330}{4} - \frac{17\cdot 4}{4} - \frac{330-242-40-28}{4} =$$

$$= \frac{330-240-40}{4} = 5$$

1) $-\frac{11}{4}a + b \le 5$

$-\frac{11}{4} \le -\frac{11}{4}a + b$

$\frac{11}{4}(a-1) \le b$

3) $\frac{12\left(-\frac{11}{4}\right)+11}{4\left(-\frac{11}{4}\right)+3} = \frac{-33+11}{-11+3} = \frac{-22}{-8} = \frac{11}{4}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(x)_1 = \frac{12x+11}{4x+3}$ $f(x) \searrow$ на $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right)$

~~f(x)>1~~

$f(x)_2 = -8x^2 - 30x - 14$ $f(x) \nearrow$ на $\left(-\infty; -\frac{15}{8}\right]$

$f(x) \searrow$ на $\left[-\frac{15}{8}; +\infty\right)$

~~$ax+b = f(x$~~

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

(*) $\frac{\sin 2\alpha}{2} \cdot \cos 2\beta + \frac{\sin 2\beta}{2} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$

(**) $\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta = -\frac{1}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{1}{5\cos^2 2\beta}, \cos 2\beta \neq 0$

(*) $\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-\frac{1 \cdot \cos 2\beta}{5\cos^2 2\beta} + \sin 2\beta \cdot \underbrace{\cancel{\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}}}_{\cos 2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-\frac{1}{5\cos 2\beta} + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{= -\frac{1}{\sqrt{5}}} \cdot \cos 2\beta +$

$+ \underbrace{\cos(2\alpha+2\beta)}_{= \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}} \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\sin 2\beta - \cos 2\beta)$

$\frac{1}{\sqrt{5}}(2\sin 2\beta - \cos 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2} \cdot \cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot (-\sqrt{5})$

$\cos 2\beta = \frac{\cancel{4}^{2} \cdot \sqrt{5}}{\cancel{2}_{1} \cdot 5} = 2\frac{\sqrt{5}}{5}$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{1}{4}$

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{1}{8}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha \cdot \left(2\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = -\frac{1}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot 4 \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{25}_{5}} = -\frac{1}{5} \quad \Big| \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{1}{4}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (*) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \quad (**) \end{cases}$$

$tg\alpha - ?$

$-(8x^2 - 30x + 17) =$

$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-30}{2(-8)} = -\frac{30}{16} = \frac{-15}{8}$

$\cancel{y_в = -\frac{D}{4a}}$

$y_в = -8\cdot\frac{15^2}{8^2} + \frac{30\cdot 15}{8} - 17$

(*) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta) = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\alpha\cdot$

$\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$

$\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cos\beta\sin\beta + \cos^2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta -$

$-\sin^2\beta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+\cos\beta\cdot\sin\beta(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$

(**)

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot 2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha +$

$+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta+\overset{\cos 2\alpha}{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}\cdot 2\cos 2\alpha+1) = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(3\cos^2 2\beta+\cos^2 2\beta) = -\frac{4}{5}$

$4\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta = -\frac{1}{5}$ ⟹

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)