



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

Handwritten notes for problem 2:  
 $0 \ 11$   
 $2 \ 3$   
 $12$   
 $34$   
 $1 \ 1 \ 2 \ 2$   
 $3 \ 4 \ 3 \ 4$   
~~22~~

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = 8$ ,  $BD = 17$ .

5. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $1 \leq x \leq 24$ ,  $1 \leq y \leq 24$  и  $f(x/y) < 0$ .

Handwritten notes for problem 5:  
 $f(p) = f(p) + f(1) \quad f(1) = 0$   
 $f(2) = 0$

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$ .

Handwritten notes for problem 6:  
 $f(3) = 0$   
 $f(\frac{1}{y}) = -f(y)$   
 $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$   
 $f(\frac{1}{y}) = 1$

7. [6 баллов] Дана пирамида  $ABCD$ , вершина  $A$  которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра  $AD$ . Известно, что  $AB = 1$ ,  $BD = 2$ ,  $CD = 3$ . Найдите длину ребра  $BC$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

Handwritten notes for problem 7:  
 $f(x) = f(y)$   
 $f$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\text{tg } \alpha: \cos \alpha \neq 0$$

$$2 \cdot \cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$1^\circ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\beta = 0$$

$$2 \cdot \underset{\neq 0}{\cos \alpha} \cdot \sin(\alpha + 2\beta) = 0$$

$$\sin(\alpha + 2\beta) = 0$$

$$\sin \alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\text{tg } \alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{tg } \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$2^\circ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) - \sin 2\beta = 0$$

$$2 \cdot \cos \frac{2\alpha + 2\beta + 2\beta}{2} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$2 \cdot \cos(\alpha + 2\beta) \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\sin \alpha = 0 \Rightarrow \text{tg } \alpha = 0$$

$$\cos(\alpha + 2\beta) = 0$$

$$\cos \alpha \cdot \cos 2\beta - \sin \alpha \cdot \sin 2\beta = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta - \sin \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{tg } \alpha = -2$$

$$\text{ответ: } \alpha = -\frac{1}{2}; -2; 0^\circ$$

U2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$x-2y = x-2 \rightarrow 2(y-1) = \sqrt{(x-2)(y-1)}$$

$$x-2=a$$

$$y-1=b$$

$$\begin{cases} a+2b = \sqrt{ab} \\ a^2 - 4ab + 4b^2 = ab \end{cases}$$

$$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$$

$$a^2 - ab + 4b^2 - 4ab = 0$$

$$a(a-b) + 4b(b-a) = 0$$

$$(4b-a)(a-b) = 0$$

$$1^{\circ} x-2=y-1$$

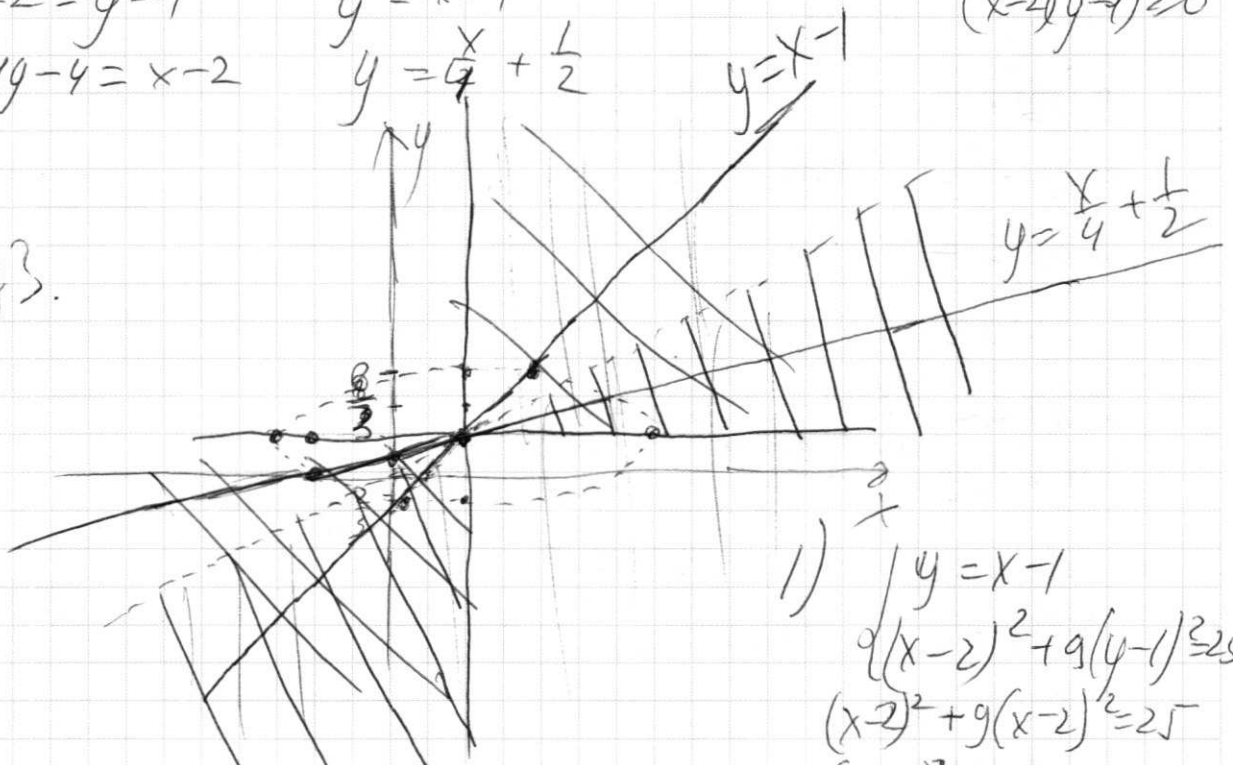
$$2^{\circ} 4y-4=x-2$$

$$y = x-1$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{OP3: } \begin{cases} x \geq 2y \\ (x-2)(y-1) \geq 0 \end{cases}$$

/// OP3.



$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} y = x-1 \\ 9(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \\ (x-2)^2 + 9(x-2)^2 = 25 \end{cases} \end{aligned}$$

$$10(x-2)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 = 2,5$$

$$\begin{cases} x-2 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \text{не в OP3} \\ x-2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

решения:  ~~$(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} + 2, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} + 1)$~~   ~~$(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} + 2, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} + 1)$~~

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2) \begin{cases} y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + 9\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 + \frac{9}{16}(x-2)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 \left(\frac{25}{16}\right) = 25$$

$$(x-2)^2 = 9$$

$$x = 5$$

$$x = -1 \text{ — не в ОДЗ}$$

1 решение:  $(5; \frac{7}{4})$

ответ:  $(-\frac{5}{\sqrt{10}} + 2; -\frac{5}{\sqrt{10}} + 1)$   $(5; \frac{7}{4})$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

$$x^2+18x = t$$

$$5^{\log_{12}t} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$$

ОДЗ:  $x^2+18x > 0$

$$t > 0$$

$$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}t} \geq t(t^{\log_{12}13} - 1) = t(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)$$

$$5^{\log_{12}t} = t^{\log_{12}5}$$

$$t^{\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}13}$$

$$t^{\log_{12}5 - \log_{12}13} \geq 1$$

$$t^{\log_{12}\frac{5}{13}} \geq 1$$

$$t^{\log_{12}5} (1 - t^{\log_{12}\frac{13}{12}}) \geq 0$$

$$t^{\log_{12}5} \leq 1 \Rightarrow t \in (0; 1]$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$x^2 + 18x \in (0; 1]$$

$$\forall < x^2 + 18x \leq 1$$

$$1^{\circ} x^2 + 18x > 0 \quad \sqrt{-18}$$
$$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$$

$$2^{\circ} x^2 + 18x \leq 1$$

$$D = 324$$

$$x \in [-9 - \sqrt{82}; -9 + \sqrt{82}]$$

$$\text{Ответ: } [-9 - \sqrt{82}; -18) \cup (0; -9 + \sqrt{82}]$$

$$f(ab) = f(a) + f(b) \quad \sqrt{5}$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = ?$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) + f(ab) = f(a^2) = f(a) + f(a)$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = 2f(a) - (f(a) + f(b)) = f(a) - f(b)$$

$$f(1) = 0 = f(2) = f(3)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0, \text{ когда } f(x) - f(y) < 0$$

$$f(1) = 0 = f(2) - f(3) = f(4)$$

$$f(5) = 1 \quad f(6) = 0 \quad f(7) = 1 \quad f(11) = 2 \quad f(13) = 3$$

$$f(17) = 4 \quad f(19) = 4 \quad f(23) = 5$$

$$f(8) = 0 = f(9) \quad f(10) = 1 \quad f(12) = 0 \quad f(14) = 1$$

$$f(15) = 1 \quad f(16) = 0 \quad f(18) = 0 \quad f(20) = 1$$

$$f(21) = 1 \quad f(22) = 2 \quad f(24) = 0$$

$$0 - 11 \quad 5 - 1$$

$$11 \cdot 13 + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 =$$

$$1 - 7$$

$$= 143 + 42 + 8 + 3 + 2 = 198$$

$$2 - 2$$

$$\text{Ответ: } 198$$

$$3 - 1$$

$$4 - 2$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{12x+4}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

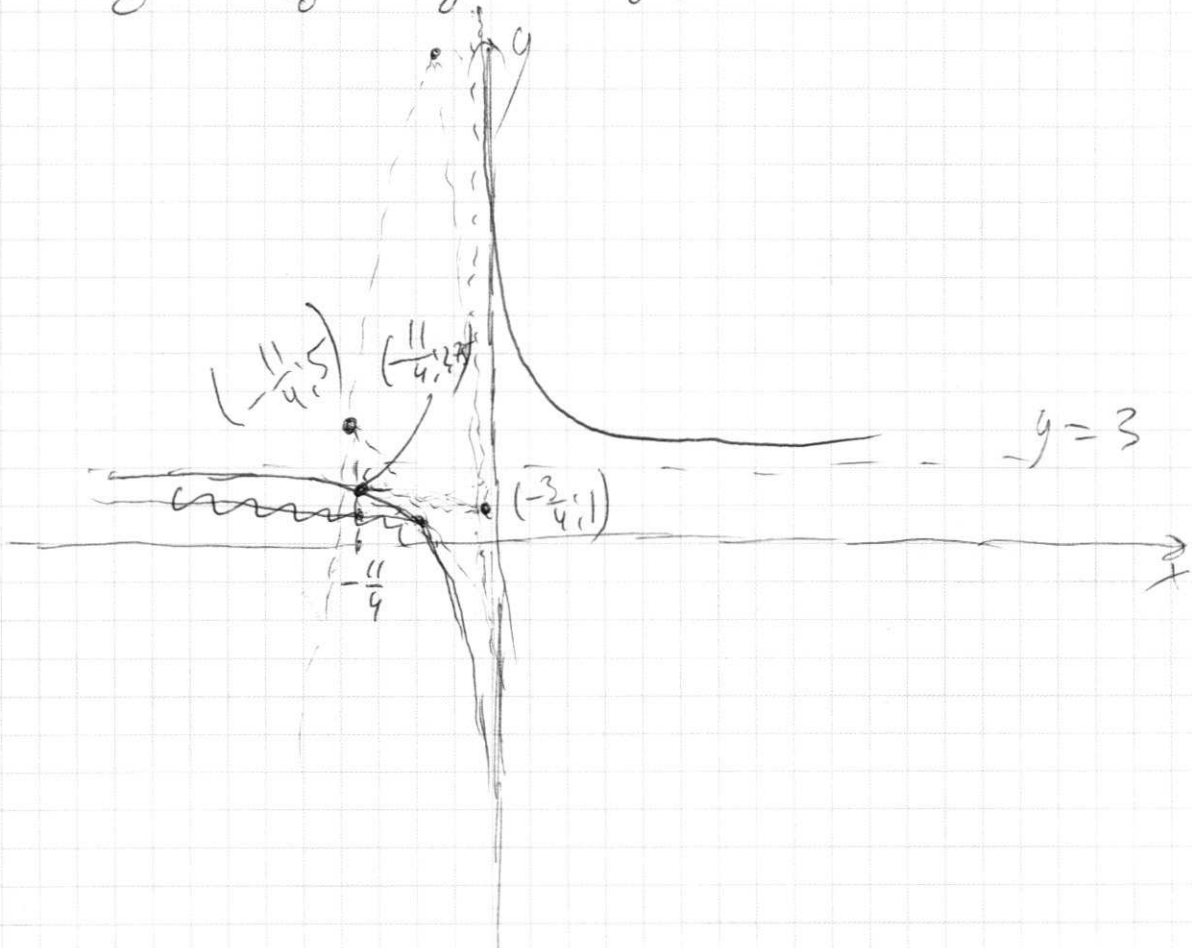
$$\frac{3(4x+3)+2}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

$$3 + \frac{2}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

$$g(x) = -8x^2 - 30x - 17 \quad ; \quad x_0 = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$$

$$g\left(-\frac{15}{8}\right) = -8 \cdot \frac{225}{64} + \frac{450}{8} - 17 = -\frac{225}{8} + \frac{450}{8} - 17 =$$

$$= \frac{225}{8} + \frac{136}{8} = \frac{361}{8} = 45\frac{1}{8}$$



$$g\left(-\frac{11}{4}\right) = -8 \cdot \frac{121}{16} + \frac{11}{4} \cdot 30 - 17 = -\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - \frac{34}{2} = 5$$



$$g\left(-\frac{3}{4}\right) = -20 \cdot \frac{9}{16} + \frac{3}{4} \cdot 30 - 17 = -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - \frac{34}{2} =$$

$$= 1$$

$$f(x) = 3 + \frac{2}{4x+3} \quad f\left(-\frac{11}{4}\right) = 3 + \frac{2}{-11+3} = 3 - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$$

параметры:  $3 + \frac{2}{(4x_0+3)} - \frac{2}{(4x_0+3)^2} (x-x_0) = t(x_0)$

$$f'(x) = \left(\frac{2}{4x+3}\right)' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{(4x+3)^2}\right) \cdot 4 = -\frac{8}{(4x+3)^2}$$

~~$$t(x_0) =$$~~

$$1 = 3 + \frac{2}{(4x_0+3)} - \frac{2}{(4x_0+3)^2} \left(\frac{3}{4} - x_0\right)$$

$$\frac{1}{(4x_0+3)^2} \cdot \left(\frac{3}{4} - x_0\right) = 1 + \frac{1}{(4x_0+3)}$$

$$\frac{1}{(4x_0+3) \cdot 4} = 1 + \frac{1}{4x_0+3}$$

$$\frac{3}{4(4x_0+3)} = -1$$

$$-16x_0 - 12 = 3$$

$$-16x_0 = \sqrt{9}$$

$$x_0 = -\frac{15}{16}$$

$$f\left(-\frac{15}{16}\right) = 3 + \frac{2}{-\frac{15}{4}+3} = 3 + \frac{2}{-\frac{15}{4}+\frac{12}{4}} = 3 + \frac{2}{-\frac{3}{4}} = 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$$

~~$$f(x) = 3 + \frac{2}{(4x_0+3)} - \frac{2}{(4x_0+3)^2} \left(\frac{11}{4} - x_0\right)$$~~

$$0 = -1 + \frac{4x_0+3}{(4x_0+3)^2} - \frac{\frac{11}{2} + 2x_0}{(4x_0+3)^2} = -1 + \frac{6x_0 - \frac{5}{2}}{(4x_0+3)^2} = 0$$

$$-(4x_0+3)^2 = 6x_0 - \frac{5}{2}$$

$$-(16x_0^2 + 24x_0 + 9) - 6x_0 + \frac{5}{2} = 0$$

$$16x_0^2 + 18x_0 + \frac{23}{2} = 0$$

$$32x_0^2 + 36x_0 + 23 = 0 \quad D < 0$$

$$16x_0^2 + 30x_0 - \frac{13}{2} = 0$$

$$32x_0^2 + 60x_0 - 13 = 0$$

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

$3600 + 4 \cdot 32 \cdot 13 =$   
 $= 4964$

$$\begin{array}{r} 124 \overline{) 1241} \\ -128 \phantom{0} \\ \hline 304 \phantom{0} \\ +128 \phantom{0} \\ \hline 1364 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 124 \overline{) 1241} \\ -117 \phantom{0} \\ \hline 71 \phantom{0} \\ \hline 71 \phantom{0} \\ -71 \phantom{0} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12x+11 \\ 4x+3 \\ \hline 8(4x+3)+2 \\ \hline 32x+24+2 \\ \hline 32x+26 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12x+11 \\ 4x+3 \\ \hline 3 + \frac{2}{4x+3} \end{array}$$

$$\frac{t^a - t^b}{a-b} = t$$

$$-8x^2 - 30x - 12$$

$$\begin{array}{r} 4964 \overline{) 4} \\ -48 \phantom{00} \\ \hline 16 \phantom{00} \\ -16 \phantom{00} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1241 \overline{) 1241} \\ -1241 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$x_0 = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$$

$$D = 900 - 32 \cdot 12$$

$$\frac{225}{8} + \frac{450}{8} + 12 =$$

$$\frac{675}{8} + \frac{136}{8} =$$

$$\frac{811}{8} = 101 \frac{3}{8}$$

$$2^{\frac{1}{2}} - 2^1 =$$
  

$$\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$
  

$$= -2$$

$$\begin{array}{r} 510 \\ 81 \phantom{0} \\ \hline 675 \\ \hline 136 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \\ 17 \\ \hline 136 \end{array}$$

$$\log_{12}(x^2 + 12) = 5 \log_{12} x + \log_{12}(x + 12)$$

$$t^a \geq 0$$

$$\log_{12} 13 - \log_{12} 12 = \frac{1}{12}$$
  

$$= \log_{12} \frac{13}{12}$$

$$\sqrt{107} = 2 \sqrt{89}$$
  

$$x^2 + 1$$

$$\log_a(6^x) = x \cdot \log_a 6$$

$$\log_x 6 = \frac{1}{\log_6 x}$$

$$\log_{10} 6 = \log_a(6^{\log_x a}) =$$

$$= \log_x a \cdot \log_a 6 = \frac{32}{17}$$

$$\frac{\ln a}{\ln x} \cdot \frac{\ln 6}{\ln a}$$

$$\frac{1910}{900} = \frac{32}{17}$$

$$\frac{544}{356} = \frac{17}{178}$$

$$\frac{178}{189}$$

$$t^a - t^b = t^a (1 - t^{\frac{b}{a}})$$

$$36^2 - 32 \cdot 23 = \frac{121}{16} \cdot 8 +$$

$$\frac{\log_{12} 13}{\log_{12} 5} = \log_5 \sqrt[12]{13}$$

$$-y + \frac{5}{2} = t e(-\infty; 0)$$

$$= 45 \quad a^x \quad x^2 + 10x - 1$$

$$17 \cdot 8 = 6 \cdot 1296 \cdot 286 + 34 =$$

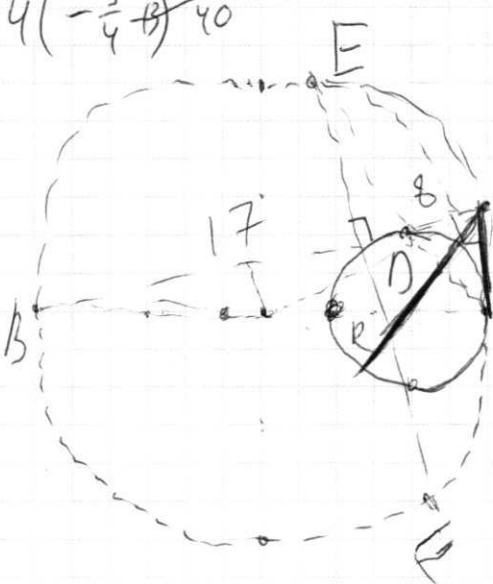
$$D = 324 + 4 = 328 = 80 + 56 = 136$$

$$x^2 - 2x = \frac{18}{2} - \frac{5}{2} = 6.5$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{328}}{2} = 1 \pm \sqrt{82}$$

$$3 \cdot \frac{360}{32} \cdot \frac{8}{45}$$

$$4 \left( -\frac{9}{4} + \frac{1}{4} \right) = 40$$



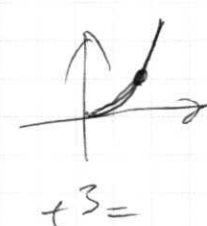
$$\frac{18}{2} - \frac{5}{2} = 6.5$$

$$\frac{18}{2} - \frac{5}{2} = 6.5$$

$$328 \sqrt{2} = 328 \sqrt{2}$$

$$-3 \frac{15}{8} \quad 164$$

$$4 - \frac{11}{4} \quad t^a = 1$$



$$\sqrt{328} = 2\sqrt{82}$$

$$-18 \pm 2\sqrt{82}$$

$$t^3 =$$

$$BP \cdot DC = EP \cdot PA$$

$$CA = 8$$

$$-8 \cdot \frac{121}{16} + \frac{11 \cdot 30 - 17}{4} = -12 \frac{1}{2} + \frac{165}{4} = 289$$

$$17^2 = BR \cdot BA = -9 \pm \sqrt{82}$$

$$2R \cdot x = 64$$

$$DA = 8\sqrt{27}$$

$$ED = \frac{25}{8\sqrt{27}}$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+6$$

$$\frac{12x+11 - (4x+3)(ax+6)}{4x+3} \leq 0$$

$$\frac{12x+11 - (4ax^2 + 4x6 + 3ax + 36)}{4x+3} \leq 0$$

$$\frac{12x+11 - 4ax^2 - 4x6 - 3ax - 36}{4x+3} \leq 0$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{3(4x+3) + 2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$

$$(x-2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2 - x - 2y + 2$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - x - 2y + 2 = 0$$

$$x^2 - 3xy + x + 4y^2 + 2y - 2 = 0$$

$$x^2 - xy + x + y^2 + 2y - 2 - 2xy = 0$$

$$y(y+2y-2x) = 0$$

$$4y^2 + 2y - 4xy - 2 = 0$$



~~$$-8x^2 - 30x + 17$$~~

$$6x^2 + 30x + 17 =$$

$$D = 900 - 4 \cdot 6 \cdot 17 =$$

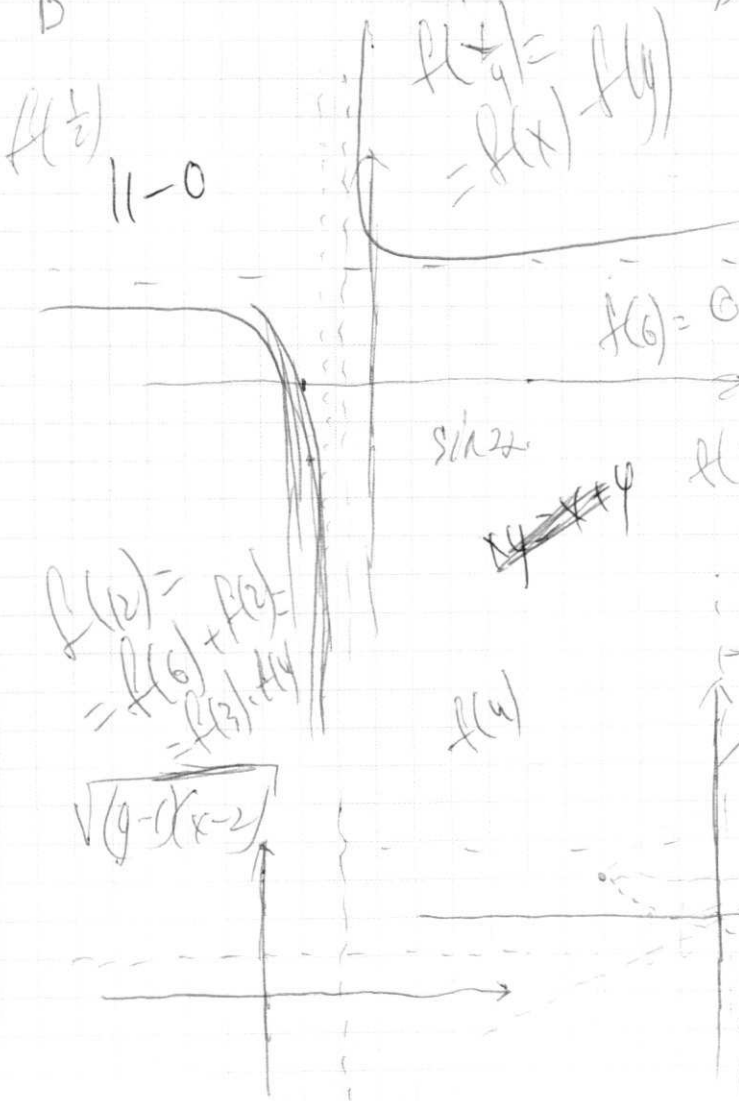
$$= 900 - 544 = 356$$

$$320 + 32.7 =$$

$$= 320 + 224 =$$

$$\frac{1}{32} = f(x^2) =$$

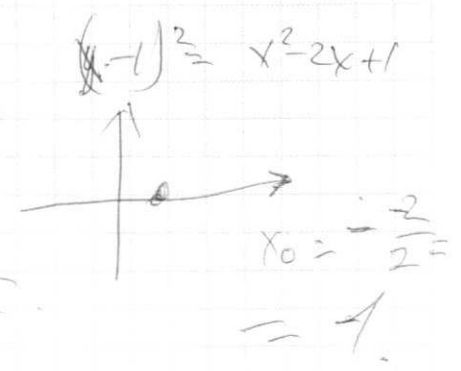
$$\frac{\sqrt{7}}{224} = f(x) + f(y)$$



$$f(6) = 0 \quad f(x/y) = 1$$

$$f(12) = 0$$

$$f(3.4) = 1$$



$$\frac{30}{16} = \frac{15}{8}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - x - 2y + 2 = 0$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta - \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha = \sqrt{\cos^2 \alpha - 1}$$

$$\sin 2\alpha \cdot (2\cos^2 \beta - 1) + \cos 2\alpha \cdot 2\sin \beta \cos \beta - \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} + \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1$$

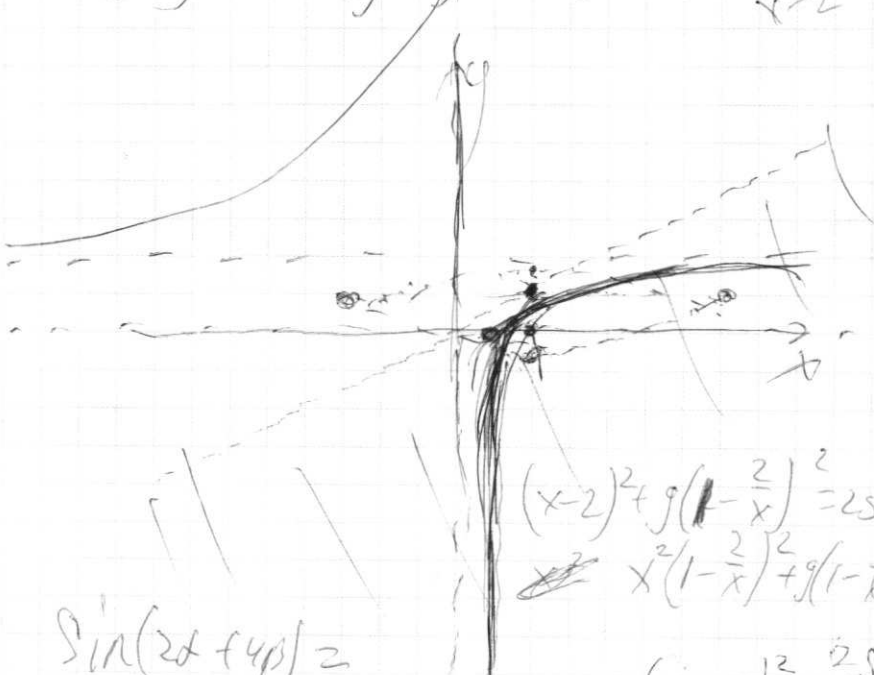
$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 1} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$$(x-2)^2 + 9(y-2/3)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$



$$x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 1}$$

$$y(x-2) - (x-2) = (y-1)/(x-2)$$

$$x - 2y = (y-1)(x-2)$$

$$x - 2y = xy - x - 2y + 2$$

$$2x - xy - 2 = 0$$

$$xy = 2x - 2$$

$$y = 2 - \frac{2}{x}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta) \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(y-1)^2 = \frac{25}{9} x^2 - 2x + 1 - \frac{16}{9} x^2 = 0$$

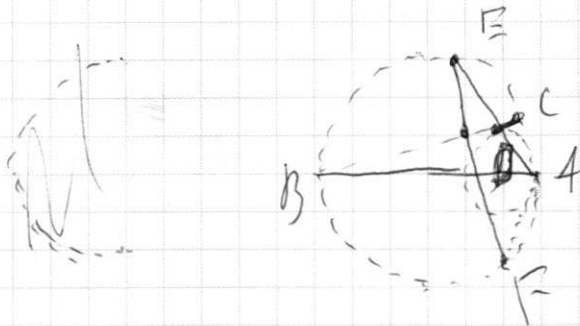
$$x^3 - 2x^2 - 16x - 18 = 0$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = 2 \sin \alpha \cos \beta$   
 $\sin(x+y) = 2 \cdot \cos \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$   
 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$   
 $\sin(2\alpha+2\beta) \cdot \cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta) \cdot \sin 2\beta = \frac{\sqrt{37}+1}{2}$   
 $-\frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\beta - \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\beta = -\frac{4}{5}$   
 $\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{5}} - \frac{2\sin 2\beta}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$   
 $1 - \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$   
 $\frac{\sqrt{37}+1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$   
 $\sin x + \sin y = 2 \cdot \cos \frac{x-y}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2}$   
 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}$   
 $\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sqrt{37}+1}{2}$   
 $\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$   
 $\frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$   
 $2 \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -1$   
 $2 \cos 2\alpha = -1 - \sin 2\alpha$   
 $4 \cos^2 2\alpha = 1 + 2 \sin 2\alpha + \sin^2 2\alpha$   
 $4(1 - \sin^2 2\alpha) = 1 + 2 \sin 2\alpha + \sin^2 2\alpha$   
 $4 - 4 \sin^2 2\alpha = 1 + 2 \sin 2\alpha + \sin^2 2\alpha$   
 $3 - 5 \sin^2 2\alpha - 2 \sin 2\alpha = 0$   
 $5 \sin^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha - 3 = 0$   
 $\sin 2\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{10} = \frac{-2 \pm 8}{10}$   
 $\sin 2\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$   
 $\sin(2\alpha+2\beta) + \sin(2\beta) = 0$   
 $2 \sin \alpha \cos \beta \cos 2\beta + 2 \sin \beta \cos \alpha \cos 2\beta = 0$   
 $2 \cos 2\beta (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) = 0$   
 $2 \cos 2\beta \sin(\alpha+\beta) = 0$   
 $\cos 2\beta = 0$   
 $2\beta = \frac{\pi}{2}$   
 $\beta = \frac{\pi}{4}$   
 $\sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{37}+1}{2}$   
 $\sin \alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{37}+1}{2}$   
 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{37}+1)}{2}$

$$\sin(\alpha+2\beta) \cdot \cos 2\beta + \cos(\alpha+2\beta) \cdot \sin 2\beta = \frac{4}{5}$$

2.



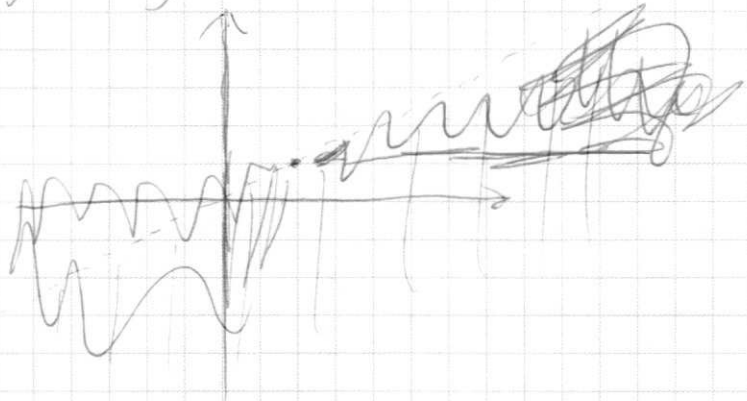
$$(x-2y) \cdot$$

$$x^2 - 4yx + 4y^2 = xy - x - 2y + 2 = (y-1)(x-2)$$

$$a^2 + b^2 = R^2$$

$$ab = ?$$

$$a = \sqrt{R^2 - b^2}$$



$$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$x-2y = \sqrt{(y-1)(x-2)}$$

$$x-2y \cdot x-2 - 2y+2 = x-2 - 2(y-1)$$

$$a-2b = \sqrt{ab}$$

$$a^2 + 9b^2 = 25$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 - ab = 0$$

$$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$$

$$a^2 - ab + 4b^2 - 4ab = 0$$

$$a(a-b) + 4b(b-a) = 0$$

$$= (a-4b)(a-b) = 0$$

$$= (a-4b)(a-b) = 0$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

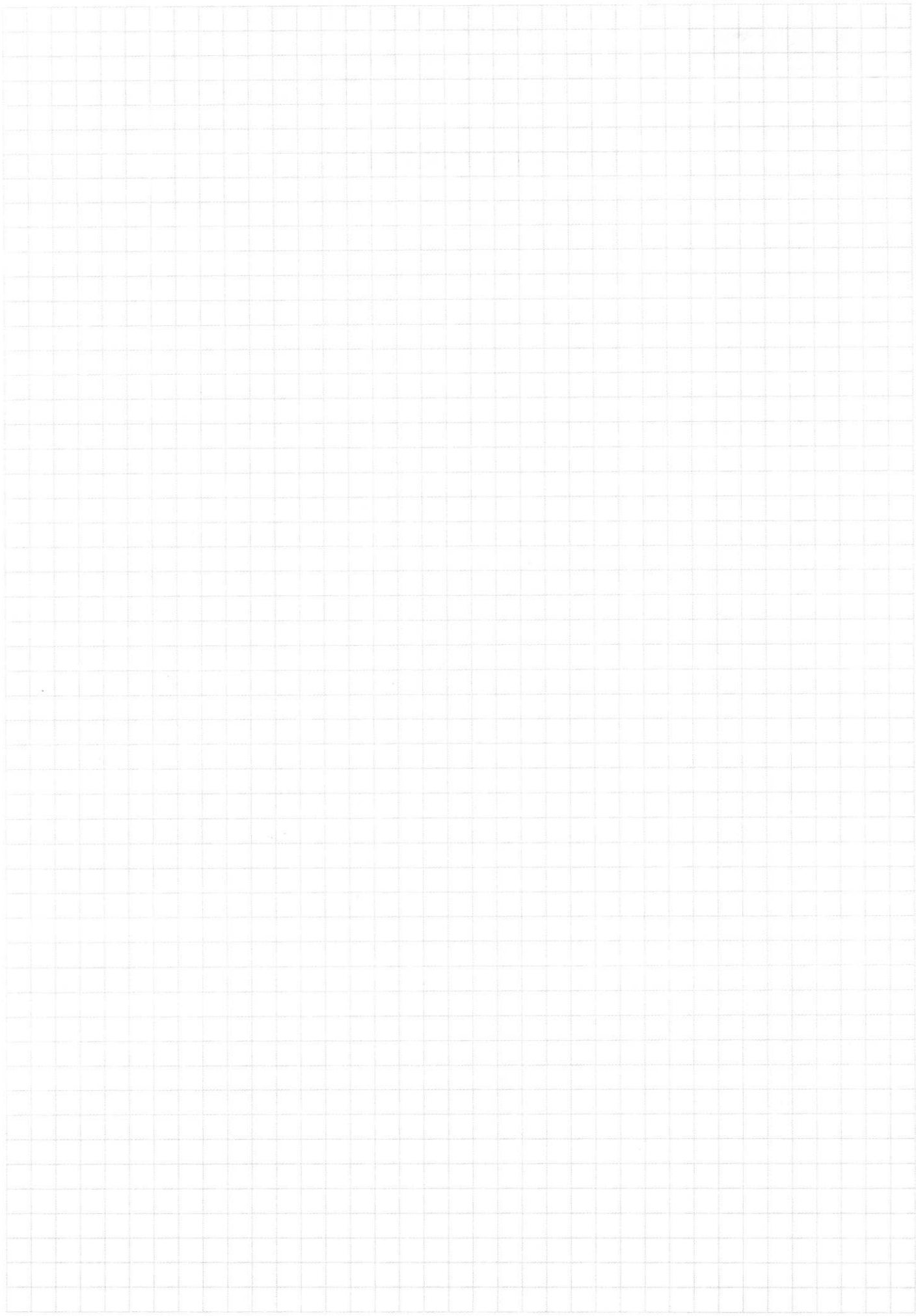
(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)