МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

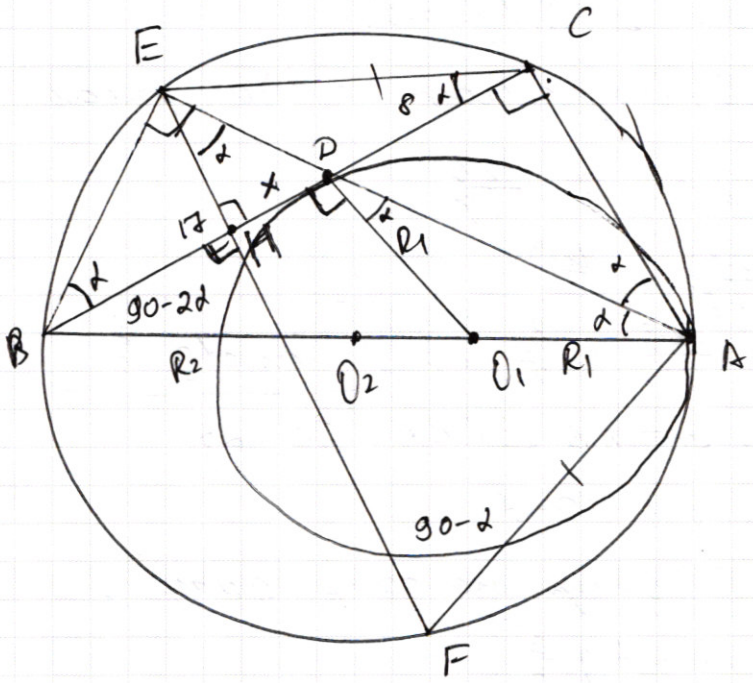
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



Дано:
$CD = 8$
$BD = 17$
Найти:
R_1 - ? (окр ω)
R_2 - ? (окр Ω)
$\angle AFE$ - ?
S_{AEF} - ?

1) BC - кас. $\Rightarrow O, D \perp BC$

AB - диаметр $\Rightarrow \angle BCA = 90°$

$\triangle BCA \sim \triangle BDO_1$ (прямоуг. с общ. углом):

$$\frac{17}{17+8} = \frac{2R_2 - R_1}{2R_2}$$

$$34R_2 = 50R_2 - 25R_1$$

$$\boxed{25R_1 = 16R_2} \qquad R_1 = \frac{16}{25}R_2$$

По теореме Пифагора в $\triangle BDO_1$:

$$289 + R_1^2 = (2R_2 - R_1)^2$$

$$289 + \cancel{R_1^2} = 4R_2^2 - 4R_2R_1 + \cancel{R_1^2}$$

$$289 = 4R_2^2 - \frac{64}{25}R_2^2$$

$$289 = \frac{100-64}{25}R_2^2$$

$R_2 = \sqrt{\frac{289\cdot 25}{36}} = \frac{17\cdot 5}{6} = \frac{85}{6}$; $\boxed{R_2 = \frac{85}{6}}$

$R_1 = \frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{25}_{5}} \cdot \frac{17\cdot\cancel{5}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{136}{15}$; $\boxed{R_1 = \frac{136}{15}}$

2) $AC \parallel O_1D \Rightarrow \angle DAC = \angle ADO_1 = \alpha$

$\triangle ADO_1$ – р/б $\Rightarrow \angle O_1AD = \alpha$

$\triangle BCA \sim \triangle BDO_1$ (прямоуг. с общ. углом):

$\frac{AC}{R_1} = \frac{25}{17}$; $AC = R_1 \cdot \frac{25}{17}$

$AC = \frac{8\cdot\cancel{17}}{\cancel{5}\cdot 3} \cdot \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{17}} = \frac{40}{3}$.

$\triangle ADC$: $tg\alpha = \frac{\cancel{8}\cdot 3}{\cancel{40}_{5}} = \frac{3}{5}$. $\Rightarrow \boxed{\alpha = arctg\frac{3}{5}}$

$\angle BAC = 2\alpha \Rightarrow$ ~~$\angle CAB$~~ $\angle CBA = 90 - 2\alpha$

$\angle \cancel{EAB}\ EBA = 90 - 2\alpha + \alpha = 90 - \alpha$

$\angle EBA = \angle AFE$ (опир на одну дугу):

$\boxed{\angle AFE = 90 - arctg\frac{3}{5}}$

3) Пусть $HD = x$, тогда $BH = 17 - x$.

$EH = tg\alpha\cdot(17 - x)$

$x = EH\cdot tg\alpha = tg^2\alpha(17 - x)$

$x = \frac{9}{25}(17 - x)$

$x = \frac{9\cdot 17}{25} - \frac{9}{25}x$

$\frac{\cancel{34}^{2}}{\cancel{25}}x = \frac{9\cdot\cancel{17}}{\cancel{25}}$ $\boxed{x = \frac{9}{2}}$

~~$EH = \frac{3}{5}\cdot\frac{25}{}$~~ $EH = \frac{\cancel{9}^{3}\cdot 5}{2\cdot\cancel{3}} = \frac{15}{2}$

$AFEC$ – впис. четыр. $\Rightarrow AFEC$ – р/б $\Rightarrow FE = AC + 2EH$

$FE = \frac{40}{3} + 15 = \cancel{\frac{95}{3}}\ \frac{40+45}{3} = \frac{85}{3}$; $CH = 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}CH\cdot EF = \frac{85\cdot 25}{12} = \frac{2125}{12}$.

Ответ: $R_1 = \frac{136}{15}$; $R_2 = \frac{85}{6}$; $\angle AFE = 90 - arctg\frac{3}{5}$; $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

2) $x^2-4x+4+9(y^2-2y+1)-13=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

Пусть $t=x-2$

$m=y-1$

$$\begin{cases} t-2m=\sqrt{tm} & (1) \\ t^2+9m^2=25 & (2) \end{cases}$$

1) $\begin{cases} t-2m\geq 0 \\ t^2-4tm+4m^2=tm \end{cases}$

$t^2-5tm+4m^2=0$

$\begin{cases} t_1+t_2=5m \\ t_1\cdot t_2=4m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} t_1=4m \\ t_2=m. \end{matrix}$

Случай 1:

$\boxed{t=4m}$

$4m-2m\geq 0 \Rightarrow \boxed{m\geq 0}$

$16m^2+9m^2-25=0.$

$(m-1)(m+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 \text{ н.к} \end{array}\right.$

$m=1$ $\qquad$ $\boxed{\begin{array}{l} y=2 \\ x=6 \end{array}}$

$t=4$

Случай 2:

$\boxed{t=m}$ $\qquad$ $m-2m\geq 0 \Rightarrow m\leq 0$

$10m^2=25$

$m^2=\frac{5}{2}$

$\left[\begin{array}{l} m=\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ н.к.} \\ m=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$

$m=-\frac{\sqrt{10}}{2}$ $\qquad$ $y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$t=-\frac{\sqrt{10}}{2}$ $\qquad$ $x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};\ 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\sin 2\alpha (2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\cos^2 2\beta \sin 2\alpha - \cancel{\sin 2\alpha} + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha +$
$+ \cancel{\sin 2\alpha} = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta (\cos 2\beta \sin 2\alpha + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{4}{5}$.

$\cancel{2}\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{5}$.

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$tg\, 2\beta = \pm\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{2\cdot\cancel{\sqrt{5}}} = \pm\frac{1}{2}$.

$\cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$tg(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{\cancel{\sqrt{5}}}{2\cdot\cancel{\sqrt{5}}} = \pm\frac{1}{2}$.

$tg(2\alpha+2\beta) = \frac{tg\, 2\beta + tg\, 2\alpha}{1 - tg\, 2\alpha\, tg\, 2\beta}$

$tg(2\alpha+2\beta) - tg(2\alpha+2\beta)\, tg\, 2\alpha \cdot tg\, 2\beta = tg\, 2\beta + tg\, 2\alpha$

$tg(2\alpha+2\beta) - tg\, 2\beta = tg\, 2\alpha\, (1 + tg(2\alpha+2\beta)\, tg\, 2\beta)$.

$$tg\,2\alpha = \frac{tg\,(2\alpha+2\beta) - tg\,2\beta}{1+tg(2\alpha+2\beta)\,tg\,2\beta}.$$

$$\begin{cases} tg\,2\alpha = \cancel{\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}\ 0 \\ tg\,2\alpha = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ tg\,2\alpha = \frac{-1}{1-\frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

1) $\frac{2\,tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = 0 \Rightarrow \boxed{tg\,\alpha = 0.}$

2) $\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{4}{3}.$

$$\frac{3\cdot 2\,tg\,\alpha - 4(1-tg^2\alpha)}{3(1-tg^2\alpha)} = 0$$

$$\begin{cases} 6\,tg\,\alpha - 4 + 4\,tg^2\alpha = 0 \\ tg\,\alpha \neq \pm 1 \end{cases}$$

$$2\,tg^2\alpha + 3\,tg\,\alpha - 2 = 0.$$

$$tg\,\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -2 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} tg\,\alpha = \frac{1}{2} \\ tg\,\alpha = -2 \end{array}}$$

3) $\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = -\cancel{\frac{3}{4}}\ \frac{4}{3}.$

$$\frac{6\,tg\,\alpha + 4 - 4\,tg^2\alpha}{3(1-tg^2\alpha)} = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 6\,tg\,\alpha + 4 - 4\,tg^2\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = \pm 1 \end{cases}$$

$$2\,tg^2\alpha - 3\,tg\,\alpha - 2 = 0$$

$$tg\,\alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} tg\,\alpha = 2 \\ tg\,\alpha = -\frac{1}{2} \end{array}}$$

Ответ: $0;\ \frac{1}{2};\ -2;\ 2;\ -\frac{1}{2}$.

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

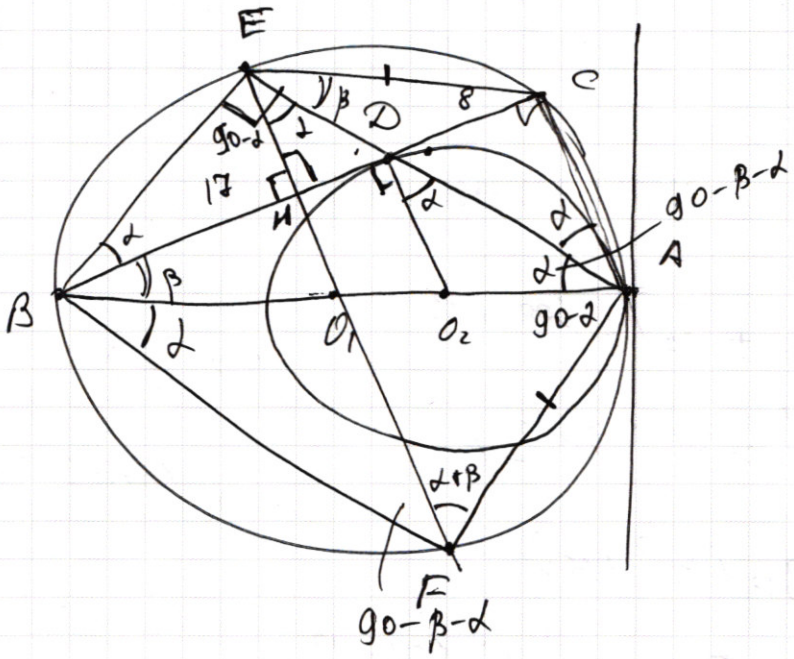
$$t = \log_{12}(x^2+18x)$$

$$5^t + 12^t \geq (12^t)^{\log_{12}13}$$

$$5^t + 12^t \geq 13^t$$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



R_1 - ?

R_2 - ?

$\angle AFE$ - ?

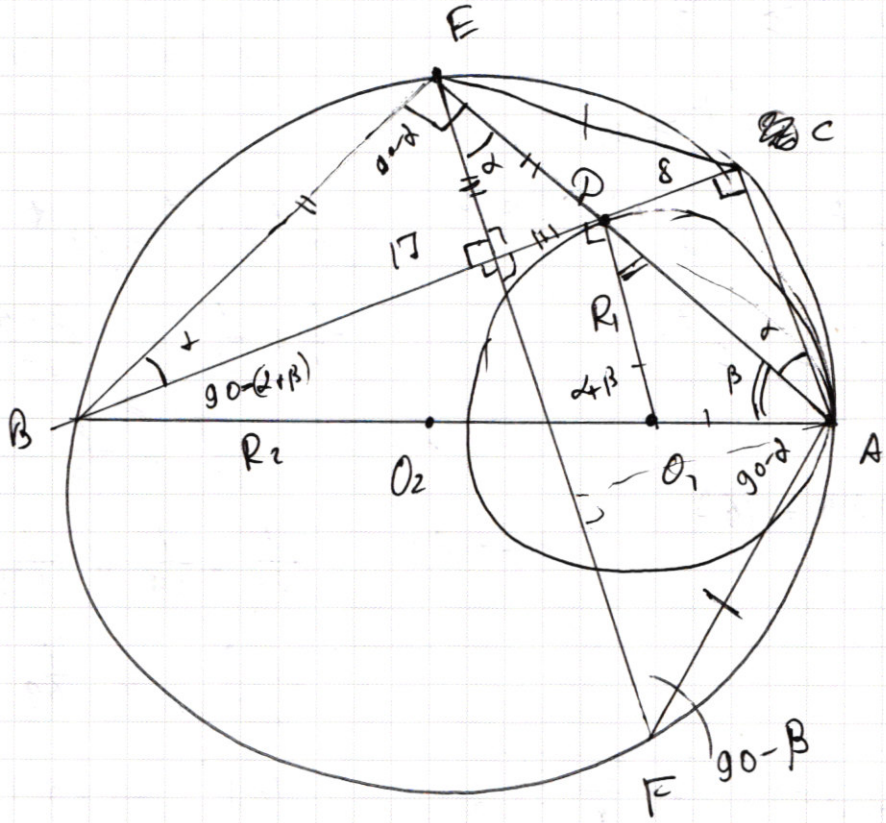
S_{AEF} - ?

$CD = 8$

$BD = 17$

$\triangle BAE \sim \triangle EHC$;

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$



$\frac{R_1}{AC} = \frac{17}{25}$

$\frac{ED}{8} = \frac{17}{AD}$

$\frac{25}{17} = \frac{2R_2}{2R_2 - R_1}$

$50R_2 - 25R_1 = 34R_2$

$16R_2 = 25R_1$

$R_1 = \frac{16}{25} R_2$

$(2R_2 - R_1)^2 = 17^2 + R_1^2$

$4R_2^2 - 4R_2R_1 + \cancel{R_1^2} = 17^2 + \cancel{R_1^2}$

$4R_2^2 - \frac{64}{25} R_2^2 = 289$

$\frac{36}{25} R_2^2 = 289$

$R_2 = \frac{5 \cdot 17}{6} = \frac{85}{6}$

$R_1 = \frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{25}_{5}} \cdot \frac{\cancel{5} \cdot 17}{\cancel{6}_{3}} = \frac{136}{15}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

(x^2-18x)

$5^{\log_{12} t} \geq t^{\log_{12} 13} - t$

$12^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$t = \log_{12}(x^2+18x)$

$5^t + 12^t \geq (12^t)^{\log_{12} 13}$.

$(a^x)' = a^x \ln a$.

$5^t + 12^t \geq 13^t$.

$(e^x)' = e^x \ln e$

$5^t + 12^t - 13^t \geq 0$.

$5^t + 12^t \geq (12^t)^{\log_{12} 13}$

$5^t + 12^t \geq 13^t$

$5^t + 12^t \geq 13^t$.

$\frac{1}{5} + \frac{1}{12} = \frac{12+5}{60} = \frac{17}{60}$

$t = 2$

$\frac{17}{60} \vee \frac{1}{13}$

$144 + 25 = 169$

$\cancel{x^2+18x}$

$\frac{1}{25} + \frac{1}{144} \vee \frac{1}{169}$

$\frac{85}{3}$

$\frac{169}{25 \cdot 144} \vee \frac{1}{169}$

$\sqrt{\frac{85^2}{9} - 25^2} = \sqrt{\frac{85^2 - 9 \cdot 25^2}{9}} =$

$169^2 > 25 \cdot 144$.

$= \sqrt{\frac{(85-75)(85+75)}{9}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 10 \cdot 10}{9}} = \frac{40}{3}$.

$\frac{AC}{R_1} = \frac{25}{17}$ $\quad AC = R_1 \cdot \frac{25}{17} = \frac{\cancel{136}^{8}}{\cancel{15}_{\cancel{3}3}} \cdot \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{17}} = \frac{40}{3}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$

~~$\sin 2\alpha$~~ (

$\cos 2\alpha \sin 4\beta = \cancel{2\cos^2 2\alpha (} \sin 2\alpha$ $\quad 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta$

$\sin 2\alpha (\cancel{4}\, 2\cos^2 2\beta - 1) + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta + \sin 2\alpha$

$2\cos^2 2\beta \sin 2\alpha - \cancel{\sin 2\alpha} + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta + \cancel{\sin 2\alpha}$

$\cos 2\beta (2\sin 2\alpha \cos 2\beta + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{4}{5}.$

$\cancel{2}\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{\cancel{4}\,2}{5}.$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}.$

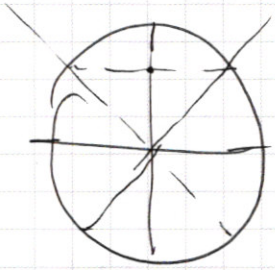
$2\beta = \pm \arccos \frac{2\sqrt5}{5} + 2\pi k$

$\cancel{\beta}$

$2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi k$

$2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi k.$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$



$$x^2-4x+4+9y^2-18y+9-13=12$$

$\cancel{18=2\cdot3\cdot3}$

$$(x-2)^2+(3y-3)^2=25.$$

1) $\begin{cases} x-2y\geq 0 & (3) \\ x^2-4xy+y^2=xy-x-2y+2 & (4) \end{cases}$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

$\operatorname{tg}\alpha=\lambda$

$$y\leq\frac{x}{2}$$

$$x^2-5xy+x+2y+y^2-2=0$$

$$x^2-x(5y-1)+y^2+2y-2=0.$$

$$D=25y^2-10y+1-4y^2-8y+8=21y^2-18y+9=$$

$$=3(7y^2-6y+3).$$

$$t=x-2y$$

$$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$$

$t=x-2$ $\qquad$ $x-2$ $\qquad$ $t-2m=(x-2)-2(y-1)=$

$m=y-1$ $\qquad$ $-2y+2$ $\qquad$ $=\cancel{x-2}-2y\cancel{+2}=x-2y$

$$tm=(x-2)(y-1)=xy-x-2y+2$$

$$\begin{cases} t-2m=\sqrt{tm} \\ t^2+9m^2=25 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} t=x-2 \\ m=y-1 \end{matrix}}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta - \cancel{\sin 2\alpha} + 2\cos 2\beta \sin 2\beta \cos 2\alpha + \cancel{\sin 2\alpha} = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta\,(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\cancel{2}\cos 2\beta \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{\cancel{4}\,2}{5}$

$\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\qquad \sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} + \cancel{\sin 2\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1.$

$t = \sin 2\alpha \qquad -1 \le t \le 1$

$2t + \sqrt{1-t^2} = -1$

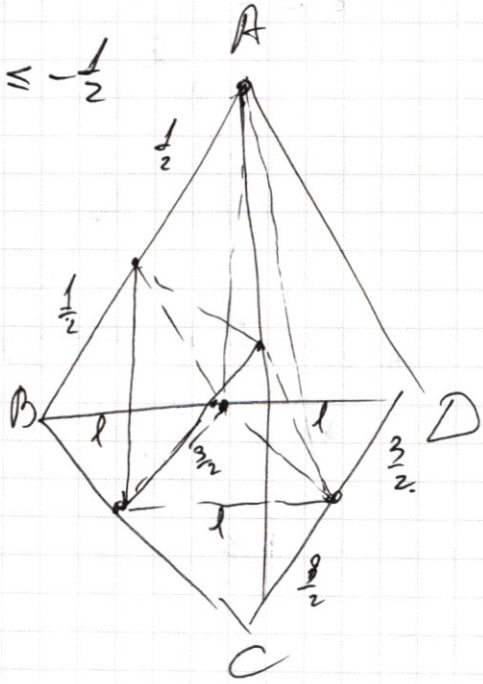
$\cancel{1-t^2} \quad \sqrt{1-t^2} = -1-2t$

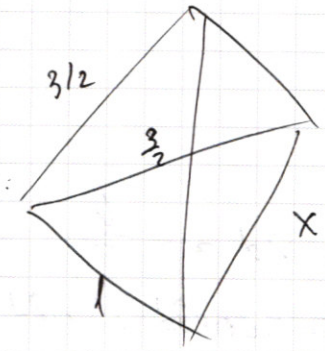
$\begin{cases} -1-2t \ge 0 \\ 1-t^2 = 1+4t+t^2 \end{cases}$ $\qquad t \le -\frac{1}{2}$

$2t^2+4t=0$

$2t(t+2)=0$

$5^t + 12^t \ge 2\sqrt{60^t}.$





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2R_2 \sin\gamma$ $\cancel{2R_2}$ $AC = \frac{25}{17} R_1$,

$R_1 = \frac{8 \cdot \cancel{17}}{\cancel{5} \cdot 3} \cdot \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{17}_{2}} = \frac{24}{3} = 8.$

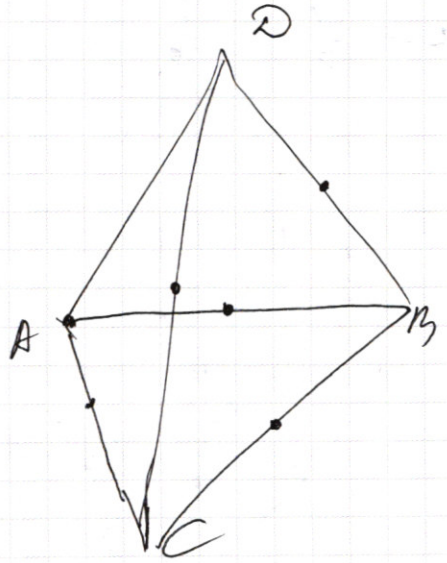
$\alpha = 45°.$

$$\begin{array}{r} 85 \\ \times\ 25 \\ \hline 425 \\ 170 \\ \hline 2125 \end{array}$$

№6.

$$\begin{cases} ax + \cancel{b} \geq \frac{12x + 11}{4x + 3} \\ ax + \cancel{b} \leq -8x^2 - 30x - 17 \end{cases}$$

№7.



№1.

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$

$\sin 2\alpha (2\cos^2 2\beta - 1) + 2\cos 2\beta \sin 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$

$y=2: \quad x-2=4(2-1) \quad x-2=4 \quad x=6$

$y=0: \quad x-2=4(0-1) \quad x-2=-4 \quad x=-2$

$(\cancel{x}; \quad (6;2) \quad (-2;0)$

$\times$

$-2=\sqrt{0+2+0+2}$

$\boxed{\begin{array}{l} t=m \\ t=4m \end{array}}$

$\cancel{t=2m} \quad x-2y\geq 0$

$t-2m\geq 0$

$\cancel{m}$

$t=m: \ \cancel{t}-2m\geq 0$

$m\leq 0$

$t=4m: \ 4m-2m\geq 0$

$m\geq 0$

$10m^2=25$

$(\sqrt{10}m-5)(\sqrt{10}m+5)=0.$

$m=\frac{\cancel{5}\sqrt{10}}{\cancel{10}\,2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$m=-\frac{\cancel{5}\sqrt{10}}{\cancel{10}\cdot 2}=-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\cancel{(1-\frac{\sqrt{10}}{2}}$ $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

$2=\frac{\sqrt{10}}{2}-\cancel{2}+\sqrt{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x-2=\cancel{1}-\frac{\sqrt{10}}{2}-\cancel{1}$

$x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$

Ответ: $(6;2);\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

№3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$t=x^2+18x$

$5^{\log_{12}t}+t\geq|t|^{\log_{12}13}.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} t-2m \geq 0 \\ (t-2m)^2 = tm \end{cases}$$

$$\boxed{m \leq \frac{t}{2}}$$

$$t^2 - 4tm + m^2 = tm$$

$$\begin{cases} t^2 - 5tm + m^2 = 0. \\ t^2 + 9m^2 = 25 \end{cases}$$

$$9m^2 + 5tm - m^2 = 25$$

$$8m^2 + 5tm = 25.$$

$$8m^2 + 5tm - 25 = 0.$$

$$D = 25t^2 + 32 \cdot 25.$$

$$(t-m)(t-4m) = 0.$$

$t = m$ н.к.

$$\boxed{t = 4m.}$$

$$16m^2 + 9m^2 = 25$$

$$m^2 = 1$$

$$(m-1)(m+1) = 0$$

$$\cancel{\frac{t-2m}{2} \geq \sqrt{}}$$

$$\begin{cases} t-2m = \sqrt{tm} \\ t^2 + 9m^2 = 25. \end{cases}$$

$3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$ $\quad t - 2m \geq 0$

$t \geq 2m.$

$$t^2 + 6tm + 9m^2 = 25 + 6tm$$

$$(t + 3m)^2 = 25 - 6tm.$$

$$t^2 - 4mt + 4m^2 = tm$$

$$t^2 - 5tm + 4m^2 = 0$$

$$t_1 + t_2 = 5m$$

$$t_1 \cdot t_2 = 4m^2$$

$$\boxed{\begin{matrix} t_1 = m \\ t_2 = 4m \end{matrix}}$$

$$\left[\begin{matrix} m = 1 \\ m = -1 \end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix} y - 1 = 1 \\ y - 1 = -1 \end{matrix}$$

$y = 2$ *

$y = 0.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)