МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + 2\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta + 1) + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$2\alpha = x \qquad 2\beta = y$$

$$\sin x(\cos^2 y \overbrace{-\sin^2 y+1}^{\cos^2 y}) + 2\cos x \sin y \cos y = -\frac{4}{5}$$

$$\cos^2 + \sin^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 = 1-\sin^2$$

$$2\cos^2 y \sin x + 2\cos x \sin y \cos y = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{cases} 2\cos y(\cos y \sin x + \cos x \sin y) = -\frac{4}{5} \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\cos y = \frac{4\cdot\sqrt5}{5\cdot 1} = \frac{4}{\sqrt5} \Rightarrow \cos y = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow$$

$$\sin y = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$$

I. $\cos y = \frac{2}{\sqrt5}$; $\sin y = \frac{1}{\sqrt5}$ $\Rightarrow$

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\frac{2}{\sqrt5}\sin x + \frac{\cos x}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sqrt5} = 0 \Rightarrow 2\sin x + \cos x = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \Rightarrow \frac{2\cdot 2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -1 \Rightarrow$$

$$= \frac{4\operatorname{tg}\alpha + 1 - \operatorname{tg}^2\alpha + 1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 0 \Rightarrow \quad , \ 4\operatorname{tg}\alpha + 2 = 0$$

$\cancel{2tg^2\alpha - 4tg\alpha = 0}$

$\cancel{2tg\alpha(tg\alpha - 4) = 0}$

$\cancel{\Rightarrow tg\alpha = 0 \; ; \; tg\alpha = 4}$

$4tg\alpha + 2 = 0$

$2(2tg\alpha + 1) = 0$

$\Rightarrow tg\alpha = -\frac{1}{2}$

II. $\cos y = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \sin y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin x \cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2\sin x}{\sqrt{5}} - \frac{\cos x}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin x - \cos x + 1 = 0$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + 1 = 0$

$\frac{2 \cdot 2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} - \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{1+tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = 0$

$\frac{4tg\alpha - 1 + tg^2\alpha + 1 + tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = 0$

$2tg^2\alpha + 4tg\alpha = 0$

$2tg\alpha(tg\alpha + 2) = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -\frac{1}{2} \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ x(x-4)+9y(y-2)=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9-13=12 \end{cases}$

$\Rightarrow (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \Rightarrow (x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x-2=a \quad y-1=b \Rightarrow x=a+2$
$2y=2b+2$

$\begin{cases} a+2-2b-2=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$\begin{cases} ab=a^2-4ab+4b^2 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$ ОДЗ: $a>2b$

$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$25-9b^2-5ab+4b^2=0$

$25-5b^2-5ab=0$

$5-b^2-ab=0$

$\Rightarrow a=\frac{5}{b}-b$

$\frac{5}{b}-b-2b=\sqrt{5-b^2}$

$\frac{25}{b^2}-\frac{30b}{b}+9b^2=5-b^2 \Rightarrow \frac{10b^4-35b^2+25}{b^2}=0, \; b^2=t$

$\Rightarrow 2t^2-7t+5=0$
$D=49-40=9$ $\Rightarrow t_{1,2}=\frac{7\pm3}{4}=\left[\begin{array}{l}2{,}5\\1\end{array}\right. \Rightarrow b=\left[\begin{array}{l}\sqrt{2{,}5}\\1\end{array}\right.$ т.к. $b\geq0$

$\Rightarrow a_1=\frac{5\cdot\sqrt{2{,}5}}{2{,}5}-\sqrt{2{,}5}=\sqrt{2{,}5}$; $b_1=\sqrt{2{,}5}$

$a_2=\frac{5}{1}-1=4$; $b_2=1$

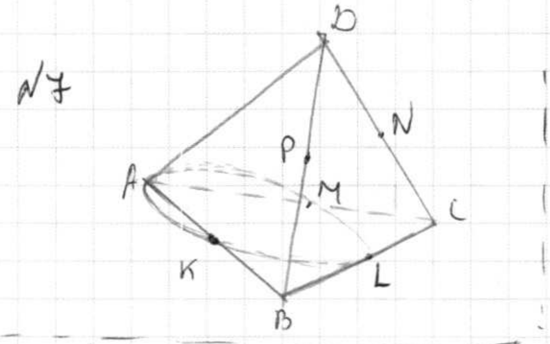
I. $\begin{cases} x-2=\sqrt{2,5} \\ y-1=\sqrt{2,5} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=\sqrt{2,5}+2 \\ y=\sqrt{2,5}+1 \end{matrix}$ $\varnothing \notin ОДЗ$

$2,5+4+4\sqrt{2,5}+9\cdot 2,5+9+18\sqrt{2,5}-$
$\sqrt{2,5}-6-18\sqrt{2,5}-18=25+13-24=11$
$\sqrt{2,5}+2-2\sqrt{2,5}+2=\sqrt{2,5}+3\sqrt{2,5}+2-\sqrt{2,5}-2-2\sqrt{2,5}$
$4-\sqrt{2,5}=\sqrt{2,5}$
$4-8\sqrt{2,5}+2,5=2,5$
$4-8\sqrt{2,5}=0$
$\sqrt{2,5}=\frac{1}{2}$

II $\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=6 \\ y=2 \end{matrix}$

Ответ: ~~[illegible]~~, $(6;2)$

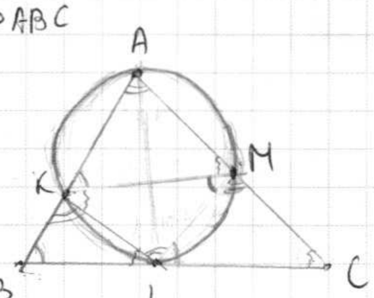
№7



P, N, M, L, K - середины сторон

$AB=1$ $BD=2$ $CD=3$

Рассмотрим $\triangle ABC$



т.к. окружность проходит через $A; K; L$ и M $\Rightarrow$ четырехугольник $AMLK$ вписан в эту окружность. Окружность не пересекает прямую BC во второй раз $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ BC - касательная к окружности. KM, ML и KL - средние линии $\triangle ABC$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle MLC$ (LM - ср. линия); $\angle ABC = \angle AKM$ (KM - ср. линия); $\angle MLC = \angle KML$ (НЛУ)

$\angle BAC = \angle LMC$ (KL - ср. линия); $\angle KAM = \angle BKL$ (KL - ср. линия) $= \angle KML$ (НЛУ)

$\angle ACB = \angle KLB$ (KL - ср линия), $\angle ACB = \angle AMK$ (KM - ср линия), $\angle KLB = \angle MKL$

$\Rightarrow$ в $AKLM$, $\angle AKM = \angle MML$ и $\angle AMK = \angle MKL$; т.к. $AKLM$ вписан в окруж $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AKL + AML = 180^0 \Rightarrow \angle AKM + \angle AMK = 90^0 \Rightarrow \angle KAM = 90^0$, $AMLK$ - параллелограмм, у него равны противополжн стороны и угол между соседними сторонами $=90^0 \Rightarrow$ $AKLM$ - прямоугольник $\Rightarrow AL = MK$ т.к. диагонали.

$MK = LC \Rightarrow AL = LC = BL \Rightarrow \triangle BAL$ и $\triangle ALC$ - р/б

$\Rightarrow AL \perp BC$ т.к. $AL \cap KM = O$ ← центр окруж $\Rightarrow AL$ - медиана, высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAC$ - р/б $\Rightarrow$ $BC = BA\cdot\sqrt{2} = 1\cdot\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Радиус сферы должен быть $\geq \frac{1}{2}BC$ т.к. $\triangle ABC$ п/угол. $\Rightarrow R \geq BL$ и $R \geq DL$

$DC^2 = BD^2 + BC^2 - 2 \cdot BD \cdot BC \cdot \cos\angle DBC$

$9 = 4 + 2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\angle DBC \Rightarrow \quad \cos\angle DBC = -\frac{3\sqrt{2}}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow DL^2 = BD^2 + BL^2 + 2 BD \cdot BL \cdot \frac{3\sqrt{2}}{8} = 4 + \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{8} =$

$= \frac{16+2}{4} + \frac{3}{2} = \frac{18}{4} + \frac{9}{4} = \frac{27}{4} \Rightarrow DL = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

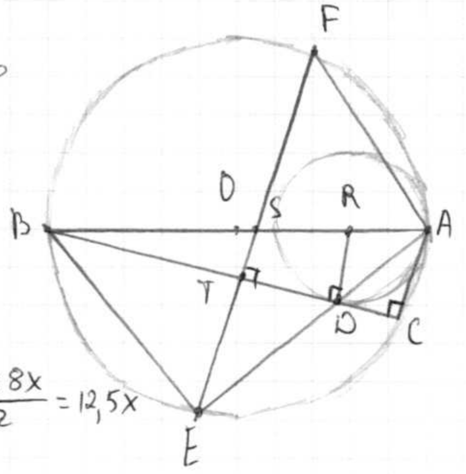
$\begin{cases} R \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \\ R \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \quad R_{min} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\underset{BC}{\sqrt{2}}$; $\underset{R}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Т.к. BC - касательная к ω $\Rightarrow \angle RDB = 90^\circ$

Т.к. $\angle RDB = 90^\circ$ и $\angle BTS = 90^\circ \Rightarrow \angle RDB + \angle BTS = 180^\circ$

$\Rightarrow TS \parallel DR$, $\angle BCA$ опирается на $\smile BA \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ \Rightarrow AC \parallel RD \parallel TS$

$\Rightarrow$ по теореме Фалеса $\frac{BD}{DC} = \frac{BR}{RA} = \frac{17}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Пусть $BR = 17x \Rightarrow RA = 8x \Rightarrow BO = \frac{17x+8x}{2} = 12{,}5x$

$AD = RA$ т.к они радиусы $\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad BD^2 = BR^2 - RD^2 \Rightarrow 289 = \sqrt{289x^2 - 64x^2} = 15x \Rightarrow x = \frac{289}{15} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad RA = 8x = \frac{8 \cdot 289}{15} = \frac{2312}{15} \Rightarrow BO = \frac{125 \cdot 289}{150} = \frac{5 \cdot 289}{6} = \frac{1445}{6}$

$\cos(\angle BRD) = \frac{RD}{BR}$; $\quad BR = \frac{17 \cdot 289}{15} \Rightarrow \cos(\angle BRD) = \cancel{BR}\ \frac{8 \cdot 289 \cdot 15}{15 \cdot 17 \cdot 289} = \frac{8}{17}$

$\Rightarrow \cos(180 - \angle BRD) = \cos\angle ARD = -\frac{8}{17}$

$DA^2 = r^2 + r^2 + \frac{2r^2 \cdot 8}{17} \Rightarrow DA^2 = \frac{50r^2}{17} \Rightarrow DA = r\sqrt{\frac{50}{17}} = \frac{8 \cdot 289 \cdot 5\sqrt{2}}{15 \cdot \sqrt{17}}$

$DA = \frac{8 \cdot 17\sqrt{34}}{3}$

$BD \cdot DC = AD \cdot DE \Rightarrow DE = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{17 \cdot 8}{r} \sqrt{\frac{17}{50}} = \frac{17 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \sqrt{17}}{8 \cdot 289 \cdot 5\sqrt{2}} =$

$= \frac{15\sqrt{17}}{17 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{34}}{34} \Rightarrow DA + DE = \frac{136\sqrt{34}}{3} + \frac{3\sqrt{34}}{34} = \frac{\sqrt{34}(136 \cdot 34 + 9)}{3 \cdot 34}$

$\angle EBA = \angle EFA \Rightarrow \sin\angle EBA = \frac{AE}{BA} = \frac{\sqrt{34}(136 \cdot 34 + 9) \cdot 2}{3 \cdot 34 \cdot 1445} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EFA = \arcsin \frac{(136 \cdot 34 + 9)\sqrt{34}}{17 \cdot 1445}$

$S_{AFE} = \frac{1}{2} TC \cdot FE$

Ответ: $BO = \frac{1445}{6}$; $RA = \frac{2312}{15}$; $\angle EFA = \arcsin\left(\frac{(136 \cdot 34 + 9)\sqrt{34}}{17 \cdot 1445}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cup BF = \cup BE$ т.к. $\angle BEF = \angle BAE$

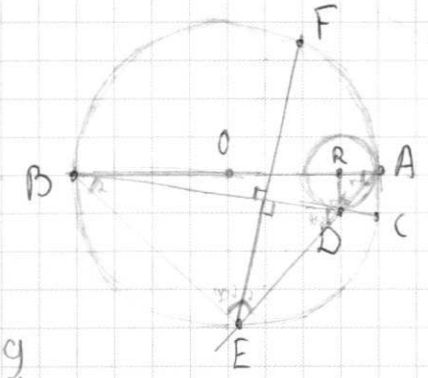
$CD = 8$ $BD = 17$

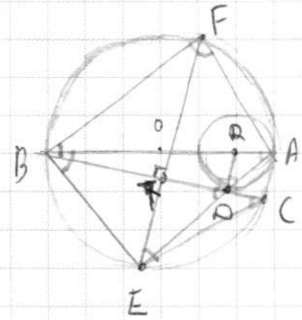
$BD \cdot DC = AD \cdot DE$

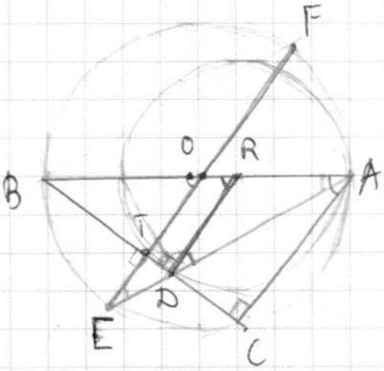
$\Rightarrow DE = \frac{17 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \sqrt{17}}{8 \cdot 289 \cdot \sqrt{50}} = \frac{15\sqrt{17}}{17 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\Rightarrow AE = \frac{8 \cdot 289}{15} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{17}} + \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{10 \cdot 8 \cdot 289 + 3 \cdot 45}{15\sqrt{34}}$

$\angle FED$







$\frac{BR}{RA} = \frac{BD}{DC} = \frac{17}{8} \Rightarrow BR = 17x;\ RA = 8x$

$\Rightarrow$ диам $\Omega = 25x \Rightarrow R = 12,5x$

$\frac{BR}{RA} = \frac{DR}{CA} \Rightarrow BR = \frac{RA^2}{CA} = \frac{64x^2}{CA}$

$\cancel{BC^2 = \sqrt{625x^2 - CA^2}}$

$CA = \sqrt{625x^2 - 625} = 25\sqrt{x^2-1}$ $RD = \sqrt{289}$

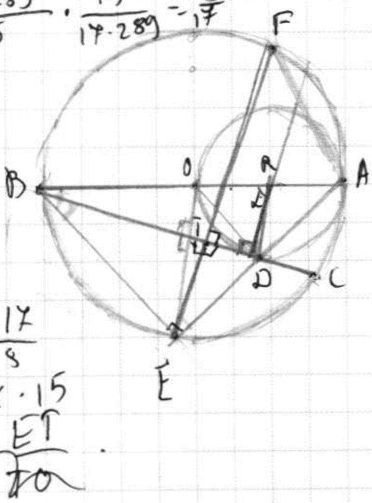
$\cos 2 = \frac{8 \cdot 289}{15} \cdot \frac{15}{17 \cdot 289} = \frac{8}{17}$

$180 - 180 - 2\alpha + 90 = 90 - 2\alpha$

$DA^2 = r^2 + r^2 + 2r^2 \cdot \frac{8}{17} = r^2\left(2 + \frac{16}{17}\right) = \frac{34+16}{17} r^2 = \frac{50r^2}{17} \Rightarrow DA = r\sqrt{\frac{50}{17}}$

$\frac{BD}{DC} = \frac{BR}{RA} = \frac{17}{8}$

$289 = \sqrt{289x^2 - 64x^2} = x \cdot 15$



$BD \cdot DC = AD \cdot DE$

$\cup FA = \cup EC$

$\frac{DT}{DE} = \frac{DE}{BD} = \frac{TE}{BE}$

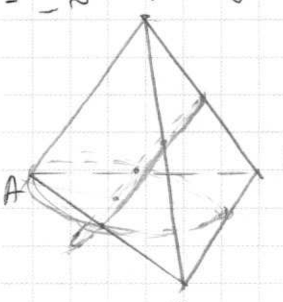
$\frac{BE}{BD} = \frac{TE}{DE} = \frac{BT}{BE}$

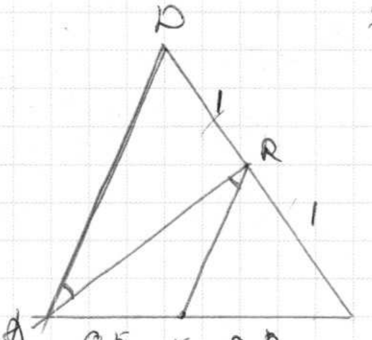
$TE = \frac{BE \cdot DE}{BD}$

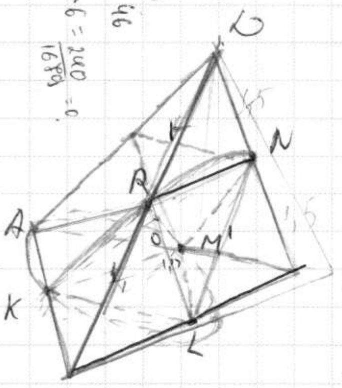
$\Rightarrow x = \frac{289}{15} =$ $RA = 8x = \frac{8 \cdot 289}{15}$; $BO = \frac{125 \cdot 289}{10 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 289}{6}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

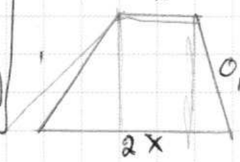






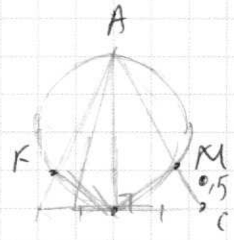
AB = 1
BD = 2
CD = 3
BC - ?

KM = RN = $\frac{1}{2}$ BC
NM = RK = $\frac{1}{2}$ AD



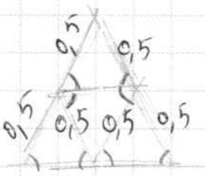
$1 - h^2 + 0{,}25 - h^2 = x$

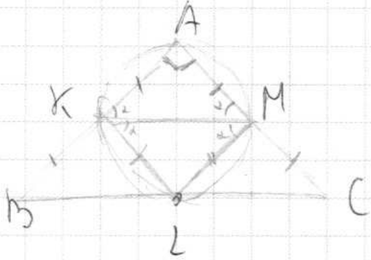
$1{,}25 - 2h^2 = x$



BC - кас к окр AKLM => KL = AK = AM = ML =>

=> AB = AC = 1



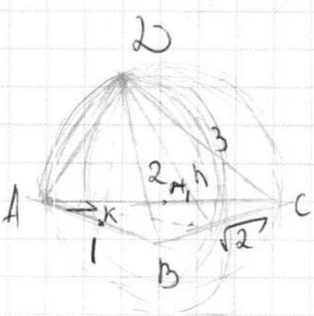


=> △AKM = △KML =>

=> ∠KAM = ∠MLK и

∠KAM + ∠MLK = 180° =>

=> ∠KAM = 90° => $BC = \sqrt{BA^2 + AC^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$



$\sqrt{9-h^2} + \sqrt{4-h^2} = \sqrt{2}$

$9 - h^2 + 4 - h^2 + 2\sqrt{(9-h^2)(4-h^2)} = 2$

$2\sqrt{36 - 13h^2 + h^4} = 2h^2 - 11$

$144 - 52h^2 + 2h^4 = 4h^4 - 44h^2 + 121$

$h^2 = t$

$2 = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos BDC$

$\frac{11}{6} = \cos BDC$

$\frac{abc}{4R}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)