МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[2 балла]** Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. **[4 балла]** Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. **[5 баллов]** а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

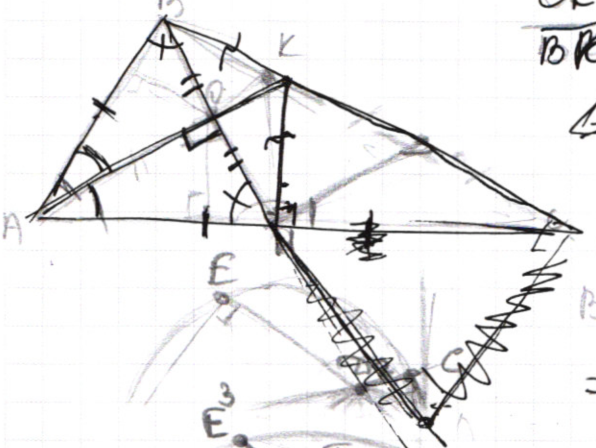
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

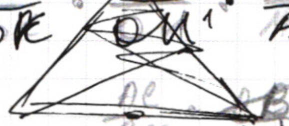
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



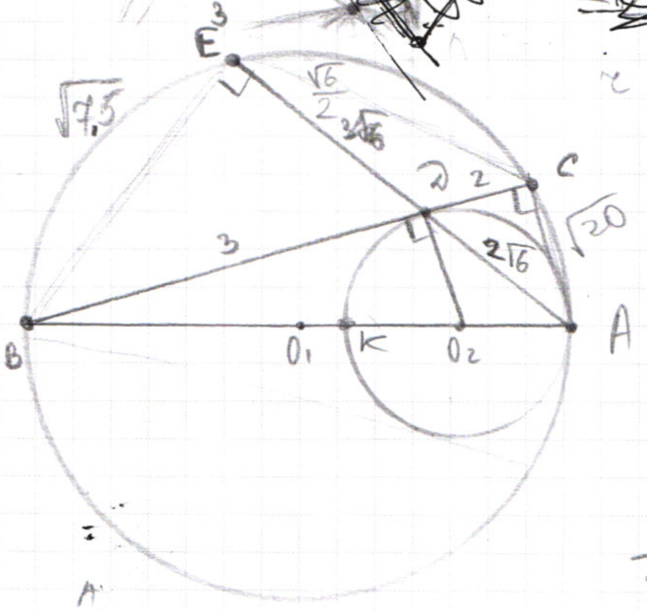
$$\frac{CK}{BK}\cdot\frac{BO1}{OM^1}\cdot\frac{AM^1}{AC_2}=1 \qquad CK=2BK$$



$$\frac{AC}{AB}\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$x=\frac{6}{2\sqrt6}=\frac{\sqrt6}{2}$$

$$9-\frac{15}{2}$$



$$\frac{KM}{AB}=\frac{CK}{AC}=2(R-r)\cdot r=$$

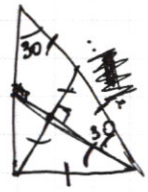
$$-2r^2=9$$

$$\begin{cases}9+r^2=(2R-r)^2\\9=2(R-r)\cdot r\end{cases}$$

$$9+r^2=4R+2Rr+r^2$$

$$\begin{cases}9=2Rr-2r^2\\18=4R-2r^2\end{cases}$$

$$2R-r^2=9$$



$$\frac{r}{2R-r}\quad\frac{r}{2R}=\frac{2}{3}\qquad 2R=\frac{3r}{2}$$

$$\cancel{9=2R-2r}$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AD}{AC}=$$

$$AC^2=AB\cdot AD$$

$$\cancel{2R=3r}$$

$$\frac{2R-r}{2R}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{r}{2R}=\frac{2}{5},\quad 2R=\frac{5r}{2}$$

$$BD=BA\cdot KA$$

$$9=2R\cdot(2(R-2r)$$

$$9=\frac{5r}{2}\cdot\left(\frac{5r}{2}-2r\right)$$

$$9=\frac{5r}{2}\cdot\frac{r}{2}=\frac{5r^2}{4}$$

$$5r^2=36 \qquad r=\frac{6\sqrt5}{5}$$

$$r^2=\frac{36}{5}$$

$$2R=\frac{5r}{4}=\frac{6\sqrt5}{4}=\frac{3\sqrt5}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-6y)^2=xy-6y-x+6 \\ x^2+2y^2-12x+4y+20=0 \\ xy-6y-x+6\geq 0 \end{cases}$$

$(x-6)=t \quad y-1=k$

$x-6y = x-6-6y+6 = (x-6)-6(y-1) = t-6k$

$$\begin{cases} (t-6k)^2=t\cdot k \\ t^2+2k^2=18 \\ t\cdot k\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t^2-12tk+36k^2=t\cdot k \quad ① \\ t^2+2k^2=18 \\ t\cdot k\geq 0 \end{cases}$$

$\frac{18}{83} \quad \frac{83}{18}$

① $t^2-13kt+36k^2=0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=4k \\ t=9k \end{array}\right. \\ t^2+2k^2=18 \\ t\cdot k\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=4k \\ 18k^2=18 \end{cases} \\ \begin{cases} t=9k \\ 83k^2=18 \end{cases} \end{array}\right. \\ t\cdot k\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k=1 \\ t=4 \end{cases} \\ \begin{cases} k=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \\ t=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \end{cases} \end{array}\right. \\ t\cdot k\geq 0 \end{cases}$$

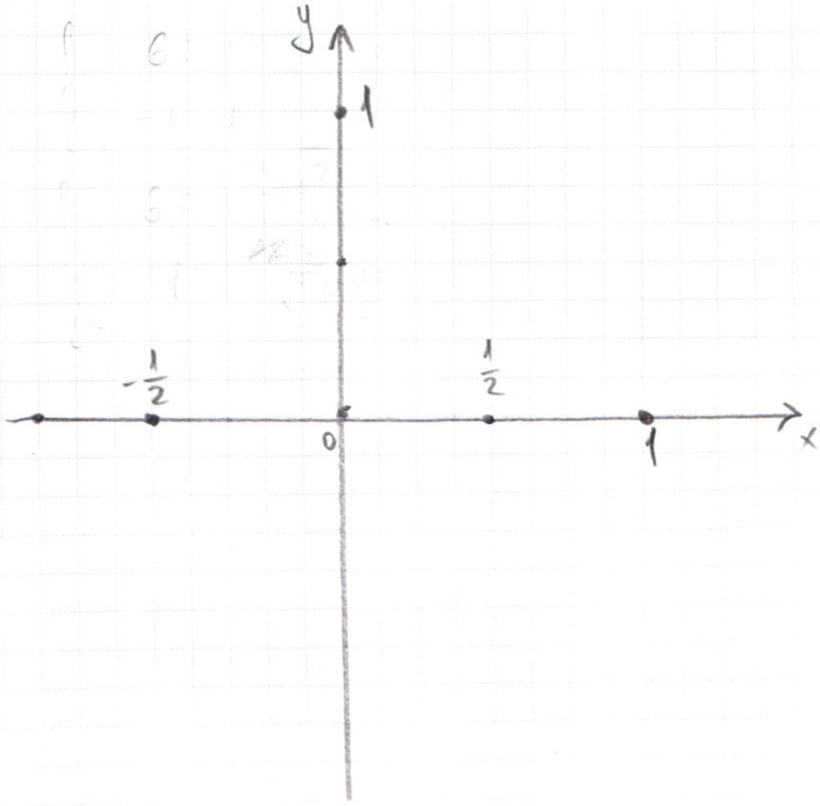
$-8x-12x+6$

$x<\frac{1}{2}$

$8x-6(1-2x)=$

$=20x-6$

$x>\frac{1}{2}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a;\ b;\ c;$

$|b| = \sqrt{ac}$

$\cancel{|c| = \sqrt{b|(b + \sqrt{b^2-ac})}}$

$x = \cancel{b}\ \frac{b}{a}$

$ax^2 - 2bx + c = 0$ 1

$D_1 = b^2 - ac = 0$

$\cancel{x = \frac{+b \pm \sqrt{b^2-ac}}{}}$

$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2-ac}}{a}$

$\cancel{|c| = \sqrt{b|(b - \sqrt{b^2-ac})}}$

$c^2 = \frac{b^2}{a}$

$a^2q^4 = \frac{a^2q^2}{a}$

$q^2 = \frac{1}{a}$

$c = a \cdot q^2$

$c = \frac{a}{a} = 1$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6 \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 - 18 = 0 \\ x(y-1) - 6(y-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6y)^2 = (x-6)(y-1) \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 + 2(x-6)(x-1) - 2(x-6)(y-1) + (y-1)^2 = 18$

$(x - 6 + y - 1)^2 - 2(x-6)(y-1) + (y-1)^2 = 18$

$(x+y-7)^2 - 2(x-6y)^2 + (y-1)^2 = 18$

$((x+y-7)^2 - (x-6y)^2) + ((y-1)^2 - (x-6y)^2) = 18$

$(x+y-7-x+6y)(x+y-7+x-6y) + (y-1-x+6y)(y-1+x-6y) = 18$

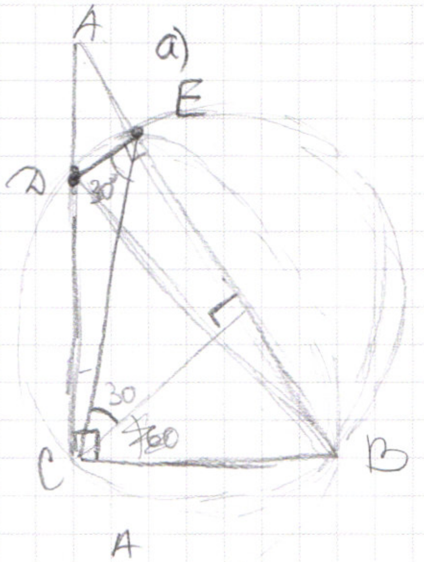
$(7y-7)(2x+5y-7) + (7y-x-1)(x-5y-1) = 18$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

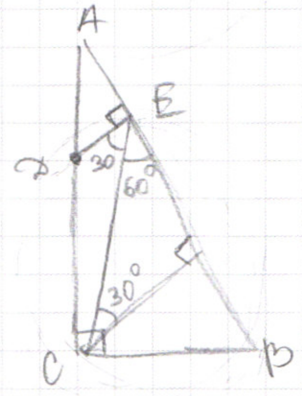


$AD : AC = \cancel{1}\ 1:3$ (4)

$AD : DC = \cancel{1}\ 1:2$

$tg\,BAC$

$tg\,BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$



$S_{DEC} = 2S_{AED}$

$\frac{1}{2}\cancel{DE}\cdot EC \cdot \sin 30^\circ = \cancel{2}\cancel{DE}\cdot AE$

$\frac{\cancel{\sqrt{3}}1}{4} EC = AE$

$S_{AED} = \frac{1}{3} S_{AEC}$

$\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{AE}\cdot DE = \frac{1}{3}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{AE}\cdot EC \cdot \sin 120^\circ$

$DE = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot EC$

$tg\,BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}\cancel{EC}}{\frac{1}{4}\cancel{EC}} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $AC = \sqrt{7}$

Найти $S(CED)$

$AE^2 + DE^2 = \frac{7}{9}$, $\frac{1}{16}EC^2 + \frac{\cancel{3}1}{\cancel{36}12}EC^2 = \frac{7}{9}$

$\left(\frac{1}{16}^{(3} + \frac{1}{12}^{(4}\right)EC^2 = \frac{7}{9}$

$DE = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{\cancel{7}}{48}EC^2 = \frac{\cancel{7}}{9}$

$EC^2 = \frac{48}{9}$, $EC = \frac{\cancel{16}4\sqrt{3}}{3}$, ~~$AE = \frac{\sqrt{3}}{3}$~~

$S_{CED} = \frac{1}{2}DE \cdot EC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

a, b, c – геом. прогрессия, значит, $b^2 = ac$

при $a \neq 0$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$D_1 = b^2 - ac = 0$

$x = \frac{b}{a}$

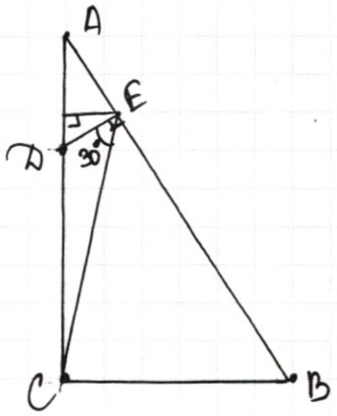
$\frac{x}{b} = \frac{a \cdot q^3}{a \cdot q} = q^2$ $\quad \frac{\frac{b}{a}}{b} = q^2$ $\quad q^2 = \frac{1}{a}$, где q - знаменатель прогрессии

$c = a \cdot q^2 = a \cdot \frac{1}{a} = 1$

~~Ответ~~ При $a=0$ $\quad c=0$

Ответ: $c=1$ или $c=0$

№4



Дано:

$\triangle ABC$, $\angle ACB = 90°$

$AD : AC = 1 : 3$

$DE \perp AB$

$\angle CED = 30°$

Найти:

а) $tg\, BAC$

б) S_{CED}, если $AC = \sqrt{7}$

Решение:

1) У $\triangle AED$ и $\triangle DEC$ общая высота

$\frac{S_{DEC}}{S_{AED}} = \frac{DC}{AD} = \frac{2}{1}$; $\quad \frac{1}{2} \cancel{DE} \cdot EC \cdot \sin 30° = \cancel{2}\, 4\, \cancel{DE} \cdot AE$

$AE = \frac{1}{4} EC$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1
(Нумеровать только чистовики)

2) Аналогично (1):

$S_{AEC} = 3S_{AED}$

$\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{AE} \cdot EC \cdot \sin 120° = 3 \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{AE} \cdot DE$

$DE = \frac{\sqrt{3}}{6} EC$

3) $\operatorname{tg} BAC = \frac{DE}{AE}$; $\operatorname{tg} BAC = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}\cancel{EC}}{\frac{1}{4}\cancel{EC}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

4) $AE^2 + DE^2 = AD^2$; $AE^2 + DE^2 = \frac{7}{9}$

$\frac{1}{16} EC^2 + \frac{3}{36} EC^2 = \frac{7}{9}$

$\frac{\cancel{7}}{48} EC^2 = \frac{\cancel{7}}{9}$; $EC^2 = \frac{48}{9}$; $EC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Тогда, $DE = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}$

$S_{CED} = \frac{1}{2} CE \cdot ED \cdot \sin 30°$

$S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: $\operatorname{tg} BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $S_{CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

№3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6y)^2 = xy - 6y - x + 6 \\ \cancel{x^2 + 2y^2} (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \\ xy - 6y - x + 6 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6y)^2 = \cancel{x}(x-6)(y-1) \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \\ (x-6)(y-1) \geq 0 \end{cases}$$

Пусть $x - 6 = t$, $y - 1 = k$

$x - 6y = x - 6 - 6y + 6 = (x-6) - (6y-6) = t - 6k$

$$\begin{cases} (t-6k)^2 = tk \\ t^2 + 2k^2 = 18 \\ tk \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - 12tk + 36k^2 = tk \\ t^2 + 2k^2 = 18 \\ tk \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t^2 - 13kt + 36k^2 = 0 \\ t^2 + 2k^2 = 18 \\ tk \geq 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} t=4k\\ t=9k\end{array}\right.\\ t^2+2k^2=18\\ tk\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}t=4k\\ 18k^2=18\end{cases}\\ \begin{cases}t=9k\\ 83k^2=18\end{cases}\end{array}\right.\\ tk\geq 0\end{cases}$$

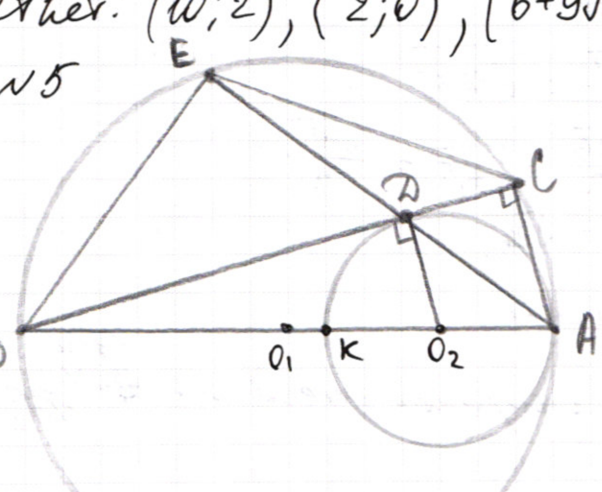
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}k=1\\ t=4\end{cases}\\ \begin{cases}k=-1\\ t=-4\end{cases}\\ \begin{cases}k=\sqrt{\frac{18}{83}}\\ t=9\sqrt{\frac{18}{83}}\end{cases}\\ \begin{cases}k=-\sqrt{\frac{18}{83}}\\ t=-9\sqrt{\frac{18}{83}}\end{cases}\end{array}\right.\\ tk\geq 0\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-6=4\\ y-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}x-6=-4\\ y-1=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x-6=9\sqrt{\frac{18}{83}}\\ y-1=\sqrt{\frac{18}{83}}\end{cases}\\ \begin{cases}x-6=-9\sqrt{\frac{18}{83}}\\ y-1=-\sqrt{\frac{18}{83}}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=10\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=6+9\sqrt{\frac{18}{83}}\\ y=1+\sqrt{\frac{18}{83}}\end{cases}\\ \begin{cases}x=6-9\sqrt{\frac{18}{83}}\\ y=1-\sqrt{\frac{18}{83}}\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(10;2)$; $(2;0)$; $\left(6+9\sqrt{\frac{18}{83}};\ 1+\sqrt{\frac{18}{83}}\right)$; $\left(6-9\sqrt{\frac{18}{83}};\ 1-\sqrt{\frac{18}{83}}\right)$

№5



Дано:

окр. Ω; окр ω

AB – диаметр. BC – касательная к окр. ω

$CD=2$; $BD=3$

Найти:

R, r; S_{BACE}, где R и r соответственно радиусы Ω и ω

1) $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по гум углам

ABC - общий

$\angle BDO_2 = \angle BCA = 90°$

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA}$; $\frac{BO_2}{BA} = \frac{2R - r}{2R} = 1 - \frac{r}{2R}$; $1 - \frac{r}{2R} = \frac{3}{5}$

$\frac{r}{2R} = \frac{2}{5}$; $2R = \frac{5r}{2}$

2) Т.к. BC - касательная, то, по свойству квадрата отрезка касательной

$BD^2 = BA \cdot BK = 2R \cdot (2R - 2r)$

$9 = 2R \cdot (2R - 2r)$

$9 = \frac{5r}{2} \cdot \left(\frac{5r}{2} - 2r\right)$ $\quad 9 = \frac{5r}{2} \cdot \frac{r}{2} = \frac{5r^2}{4}$

$r^2 = \frac{36}{5}$; $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$R = \frac{5r}{4}$; $R = \frac{6\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

3) По теореме Пифагора:

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$; $AC = \sqrt{45 - 25} = \sqrt{20}$

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2}$ $\cancel{=\sqrt{25}}$ $AD = \sqrt{20 + 4} = 2\sqrt{6}$

$AD \cdot DE = BD \cdot DC$

$DE \cdot 2\sqrt{6} = 6$; $DE = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$BE = \sqrt{BD^2 - DE^2}$; $BE = \sqrt{9 - \frac{3}{2}} = \sqrt{7{,}5}$

$S_{BED} = \frac{1}{2} BE \cdot ED$; $S_{BED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{7{,}5} = \frac{\sqrt{45}}{4}$

$S_{CDA} = \frac{1}{2} CD \cdot AC$; $S_{CDA} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{20} = \sqrt{20}$

4) $\cancel{\triangle CD}$ $\triangle BDA \sim \triangle EDC$ по гум углам

$\angle ABD = \angle CEA$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу

$\angle EAB = \angle ECB$

$\frac{S_{BDA}}{S_{EDC}} = \left(\frac{BD}{ED}\right)^2$; $\frac{S_{BDA}}{S_{EDC}} = 6$, тогда $S_{BDA} = 6 S_{EDC}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{BED}\cdot S_{ADC} = S_{BDA}\cdot S_{CDE}$

$\frac{\sqrt{45}}{4}\cdot\sqrt{20} = 6\cdot(S_{CDE})^2$

$\frac{\sqrt{900}}{\cancel{4}24} = \cancel{6}\cdot(S_{CDE})^2$; $\frac{30}{24_4} = (S_{CDE})^2$; $S_{CDE} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Тогда, $S_{ADB} = 3\sqrt{5}$

$S_{BACE} = S_{BDA} + S_{ADC} + S_{CDE} + S_{EDB} = 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{4} =$

$= 5\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{4} = 5\sqrt{5}\cdot\frac{5}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$; $r = \frac{6\sqrt{5}}{\cancel{1}5}$; $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

* Точка D ~~также~~ может находится на нижней полуокружности ω, но, т.к. картинка будет симметрична, решение задачи от этого не зависит.