МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Пусть $a = d_1$, $b = d_1 q$, $c = d_1 q^2$; а четвёртый член найдём из уравнения:

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = 4(d_1^2 q^2 - d_1 \cdot d_1 q^2) = 4(d_1^2 q^2 - d_1^2 q^2) = 4 \cdot 0 = 0.$

$x = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

Т.к. x – четвёртый член прогрессии, то $x = d_1 q^3$.

Имеем:

$-\frac{b}{a} = -\frac{d_1 q}{d_1} = -q = x$

$x = d_1 q^3 = -q \Rightarrow d_1 q^2 = -1$ (сократили на $q \neq 0$).

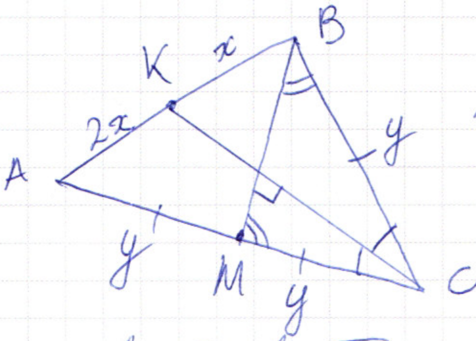
$c = -1$.

Ответ: -1.

№2.

Во-первых, угол между медианой и биссектрисой, проведённых из одной вершины, не может быть равен 90°, т.к. тогда один из углов треугольника обязан быть $\geq 180^\circ$.

Во-вторых, мы имеем по 2 случая для каждой из трёх вершин треугольника (когда медиана и биссектриса проведены из разных вершин). В каждом случае имеем следующую картину:



В $\triangle ABC$ BM – медиана, CK – биссектриса. Если $\angle ACK=\angle BCK=\alpha$, то $\angle CBM=\angle CMB=90^\circ-\alpha \Rightarrow \triangle CBM$ – равнобедренный. Пусть $BC=MC=y$, тогда $AM=y$.

По свойству биссектрисы $\frac{BC}{BK}=\frac{AC}{AK}$, Тогда пусть $AK=2x$, $BK=x$. Имеем: $BC=y$, $AC=2y$, $AB=3x$.

В-третьих должно выполняться неравенство треугольника:

$$\begin{cases} AC<AB+BC, \\ AB<BC+AC, \\ BC<AB+AC; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y<3x+y, \\ 3x<y+2y, \\ y<3x+2y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<3x, \\ y>x, \\ -y<3x; \end{cases}$$

$-y<3x$ выполняется всегда, т.к. y и x – длины отрезков $\Rightarrow -y<0$, $3x>0$.

В-четвёртых, т.к. периметр равен 1200, то:

$AB+BC+AC=1200 \Leftrightarrow 3x+y+2y=1200 \Leftrightarrow 3x+3y=1200 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x+y=400 \Rightarrow y=400-x$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} y=400-x, \\ y<3x, \\ y>x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=400-x, \\ 400-x<3x, \\ 400-x>x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=400-x \\ 400<4x, \\ 2x<400; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>100, \\ x<200; \end{cases} \Rightarrow x\in(100;200).$$

Т.к. нас интересуют целочисленные значения, то на данном промежутке их 99. И так в 6 случаях:

$6\cdot 99=594$.

Ответ: 594.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 & (2) \end{cases}$$

(1) $y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$ $\qquad$ $y-2x\geq 0$, $y\geq 2x$

$(y-2x)^2=xy-2x-y+2$

Преобразуем левую и правую части отдельно:

$(y-2x)^2=y^2-4xy+4x^2=y^2-4y+4+4y-4+4(x^2-2x+1)+8x-4-4xy=(y-2)^2+4y-8+8x-4xy+4(x-1)^2=(y-2)^2+4(x-1)^2+8(x-1)-4y(x-1)=(y-2)^2+4(x-1)^2+(x-1)(8-4y)=$
$=(y-2)^2+4(x-1)^2-4(x-1)(y-2)$.

$xy-2x-y+2=x(y-2)-(y-2)=(y-2)(x-1)$

Имеем: $(y-2)^2+4(x-1)^2-4(x-1)(y-2)=(y-2)(x-1)$.

(2) $2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2(x^2-2x+1)-2+y^2-4y+4-4+3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0$

Пусть $a=x-1$; $b=y-2$. Тогда система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 4a^2+b^2-4ab=ab, \\ 2a^2+b^2-3=0; \end{cases}$$

Решим первое уравнение новой системы относительно a:

$4a^2-5ab+b^2=0$

$D=25b^2-16b^2=9b^2$

$a_1 = \frac{5b+3b}{8} = b$; $a_2 = \frac{5b-3b}{8} = \frac{b}{4}$.

1) $a = b$:

$2a^2 + b^2 = 3 \Leftrightarrow 3b^2 = 3 \Leftrightarrow b = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 1$

2) $a = \frac{b}{4}$:

$2a^2 + b^2 = 3 \Leftrightarrow \cancel{2a^2 + b^2}\ 2 \cdot \frac{b^2}{16} + b^2 = 3$

$\frac{b^2}{8} + b^2 = 3 \Leftrightarrow \frac{9b^2}{8} = 3 \Leftrightarrow 9b^2 = 24 \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{24}{9}} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{6}$

$a = \pm\frac{2}{12}\sqrt{6}$

Итак:

I. $a = 1,\ b = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1=1, \\ y-2=1; \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=3 \end{cases}$ не подходит по условию $y \geq 2x$.

$a = 1,\ b = -1 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ не подходит

$a = -1,\ b = 1 \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=3 \end{cases}$ не подходит, т.к. тогда $y - 2x = \sqrt{-1}$.

$a = -1,\ b = -1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ ~~не подходит т.к. тогда~~ ПОДХОДИТ!!!

II. $a = \frac{2}{12}\sqrt{6},\ b = \frac{2}{3}\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x-1=\frac{2}{12}\sqrt{6} \\ y-2=\frac{2}{3}\sqrt{6}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+\frac{2}{12}\sqrt{6}, \\ y = 2+\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{cases}$ подходит

$a = \frac{2}{12}\sqrt{6},\ b = -\frac{2}{3}\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+\frac{2}{12}\sqrt{6} \\ y-2 = -\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+\frac{2}{12}\sqrt{6}, \\ y = 2-\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{cases}$ не подходит

$a = -\frac{2}{12}\sqrt{6},\ b = \frac{2}{3}\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -\frac{2}{12}\sqrt{6} \\ y = 2+\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-\frac{2}{12}\sqrt{6} \\ y = 2+\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{cases}$ подходит

$a = -\frac{2}{12}\sqrt{6},\ b = -\frac{2}{3}\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-\frac{2}{12}\sqrt{6}, \\ y = 2-\frac{2}{3}\sqrt{6} \end{cases}$ не подходит.

Ответ: $(0; 1)$, $\cancel{(1+\frac{2}{12}\sqrt{6}}$ $(1+\frac{\sqrt{6}}{6}; 2+\frac{2}{3}\sqrt{6})$, $(1-\frac{\sqrt{6}}{6}; 2+\frac{2\sqrt{6}}{3})$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\begin{cases} 2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|, \\ -\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+b \ge 2x^2-x-1, \\ ax+b \le x+|2x-1|, \\ -\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{2} \end{cases}$$

$y=2x^2-x-1$:

$x_в = \frac{1}{4}$

$y_в = 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{9}{8}$

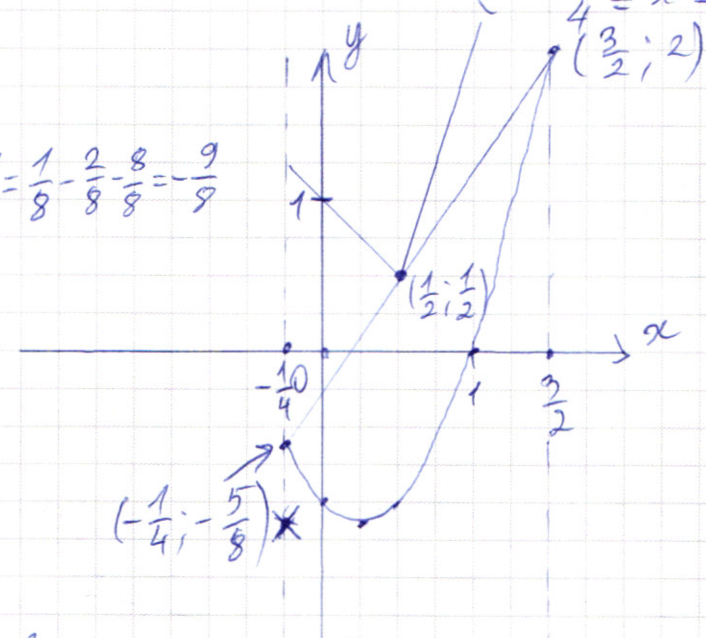
$y=x+|2x-1|$:

$x \ge \frac{1}{2}$:

$y=3x-1$

$x < \frac{1}{2}$:

$y=-x+1$



$f(x)=ax+b \Rightarrow a$ – угловой коэффициент, b отвечает за перенос. Если $ax+b \ge 2x^2-x-1$, то необходимо, чтобы прямая $ax+b$ проходила или была выше точек $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$ и $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$:

$$\begin{cases} -\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}a + b, \\ 2 = \frac{3}{2}a + b; \end{cases} \Rightarrow -\frac{5}{8} - 2 = -\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}a \Rightarrow -\frac{21}{8} = -\frac{7}{4}a$$

$-21 = -14a \Rightarrow a = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$

$b = 2 - \frac{3}{2}a = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

$x+|2x-1| \ge f(x)$:

$x \geq \frac{1}{2}$: $3x-1 \geq \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{2}x \geq \frac{3}{4} \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

$x < \frac{1}{2}$: $-x+1 \geq \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{5}{2}x \leq \frac{5}{4} \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

Прямая $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$ проходит ч/з вершину графика $y = x + |2x-1|$ $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ $\Rightarrow$ при прочих значениях, удовлетворяющих условию $f(x) \geq 2x^2-x-1$, не будет выполняться $f(x) \leq x+|2x-1|$. Тогда $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$ — единственная такая пара.

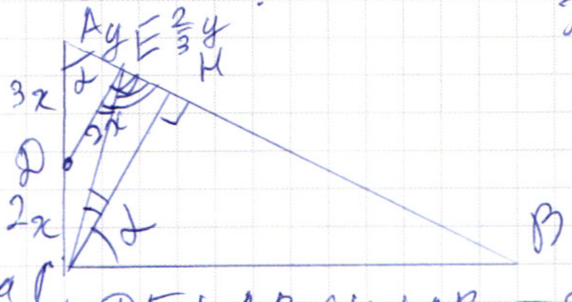
Ответ: $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$.

№4.

Дано:
ΔABC,
$AD = 3x$,
$DC = 2x$,
CH - высота,
$DE \perp AB$,
$\angle CED = 45^\circ$
б) $AC = \sqrt{29}$.

Найти:
$tg\angle A$ - ?
S_{CED} - ?

Решение:



Проведём высоту CH.

$DE \perp AB$, $CH \perp AB \Rightarrow DE \parallel CH \Rightarrow \angle DEC = \angle HCE$ (накр. леж.) $= \cancel{90^\circ - 45^\circ} = 45^\circ \Rightarrow \Delta HEC$ ($\cancel{\Delta CED}$) - равнобедренный, т.е. $\cancel{DE = CD = 2x}$. $HE = CH$, т.к. $\angle HEC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

~~$tg A = tg\,\alpha = \frac{DE}{AE}$. По теореме Пифагора:~~

~~$AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} =$~~

$\Delta ADE \sim \Delta ACH$ по 2 углам. Пусть $AE = y$ тогда $EH = \frac{2}{3}y = CH$.

$tg\angle A = tg\,\alpha = \frac{CH}{AH} = \frac{\frac{2}{3}y}{\frac{5}{3}y} = \frac{2}{5}$

$BH = CH\, tg\,\alpha = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}y = \frac{4}{15}y$

По т. Пифагора: $BC = \frac{2\sqrt{29}}{15}y$

$\sin\alpha = \frac{BH}{BC} = \frac{4}{15} \cdot \frac{15}{2\sqrt{29}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$\cancel{S_{ACH}}$ $CH = \sin\alpha \cdot AC = \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \sqrt{29} = 2$

$DE = \frac{3}{5} AC \cdot \sin\alpha = \frac{3\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} \times\, 29 \\ 9 \\ \hline 261 \\ -\,36 \\ \hline 225 \end{array}$$

~~$S_{ACH} = \frac{1}{2}$~~ $AM = \sqrt{29 - 4} = 25$

~~DE~~ $AE = \sqrt{\frac{9}{25} \cdot 29 - \frac{36}{25}} = \sqrt{\frac{225}{25}} = \frac{15}{5}$

~~$S_{ACH} = \frac{1}{2}$~~ $HE = \frac{2}{3} AE = \frac{30}{9}$

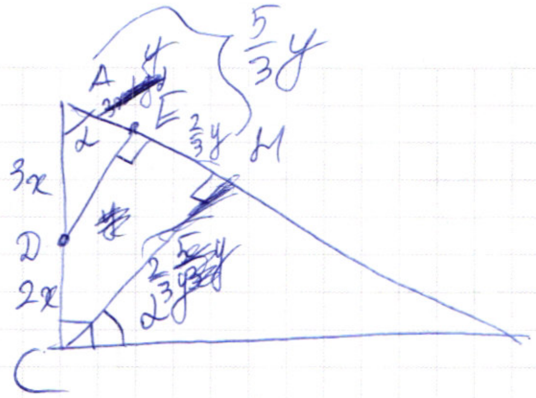
$S_{ACH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} AE \cdot CK = \frac{5}{3} AE = \frac{15}{3} = 5$

$S_{AED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{15}{5} = \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5}$

$S_{CHE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{9} \cdot \frac{6}{5} = \frac{15}{9} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 6}{9} = 2$

$S = 5 - \frac{9}{5} - 2 = 3 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$

Ответ: $\frac{2}{5}$; $\frac{6}{5}$.



$tg\alpha = \frac{CH}{AH} = \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$

$\frac{CH}{DE} = \frac{5}{3}$

$CH = AH\,tg\alpha \quad DE = AE\,tg\alpha$

$BC = 5x\,tg\alpha$

$AH = \frac{5}{3}AE$

$\frac{CH}{AH} = tg\alpha \quad CH = \frac{5}{3}tg\alpha\,AE$

$AH = \frac{CH}{tg\alpha}$

$\frac{CH}{BH} = \frac{AH}{CH} = \frac{AC}{BC}$

$CH^2 = BH \cdot AH = \cancel{CH\,tg\alpha} \cdot \quad DE = y$

$\cancel{DE = tg\alpha} \cdot \quad DE = tg\alpha\,AE$

$9x^2 = y^2 + y^2\,tg^2\alpha \qquad 25x^2 = \frac{25}{9}y^2 + \frac{25}{9}y^2\,tg^2\alpha$

$BC = 5x\,tg\alpha = \qquad x^2 = \frac{y^2}{9} + \frac{y^2}{9}tg^2\alpha$

$= \frac{5y}{3}\sqrt{1+tg^2\alpha}\,tg\alpha \qquad x = \frac{y}{3}\sqrt{(1+tg^2\alpha)}$

$BH = CH\,tg\alpha = \qquad CH^2 = \cancel{25x}^2 -$

$= \frac{5}{3}y\,tg^2\alpha \qquad tg\alpha = \frac{5y\sqrt{1+tg^2\alpha}}{\frac{15y}{3}tg^2\alpha} = \frac{\sqrt{1+tg^2\alpha}}{tg^2\alpha}$

$CH = AH\,tg\alpha$

$S_{ACH} = \frac{5}{3}y \cdot \frac{1}{2} \cdot CH = \frac{5}{6}y \cdot \frac{5}{3}y\,tg\alpha = \frac{25}{18}y^2\,tg\alpha \qquad 116 = 4 \cdot 29$

$BH = CH \cdot tg\alpha = \frac{2}{5}CH = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3}y = \frac{4}{15}y$

$BC^2 = \frac{16}{225}y^2 + \frac{4}{9}y^2 = \frac{16}{9 \cdot 25} + \frac{4}{9} = \frac{16+100}{9 \cdot 25} = \frac{116}{225}y^2$

$\sin\alpha$

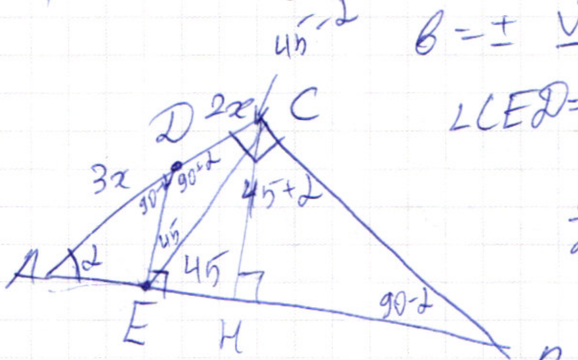
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left[\begin{array}{l} a=b \Rightarrow a^2=b^2 \quad b^2=3-2b^2 \Rightarrow b^2=1 \Rightarrow b=\pm1, \text{ т.е. } a=\pm1 \\ a=\frac{b}{4} \Rightarrow a^2=\frac{b^2}{16} \quad b^2=3-\frac{b^2}{8} \Rightarrow 8b^2=24-b^2 \quad b^2=\frac{24}{9} \end{array}\right.$

$b=\pm\frac{\sqrt{24}}{3}=\pm\frac{2}{3}\sqrt{6} \quad a=\pm\frac{2}{12}\sqrt{6}$



$\angle CED=45^0 \quad tg\,\alpha-?$

$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

$\angle DCE=180-45-90-\alpha=45-\alpha$

$tg\,\alpha=\frac{DE}{AE} \Rightarrow AE=\frac{DE}{tg\,\alpha}$

$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{3x}=\frac{5x}{AE} \quad AB\cdot AE=15x^2$

$AB\cdot DE=2S_{ABD}$

$AB\cdot DE=15x^2\cdot tg\,\alpha$

$S_{ABD}=\sin\alpha\cdot 3x\cdot\frac{1}{2}\cdot AB \quad \cancel{AB\cdot DE=3x\cdot\sin\alpha\cdot AB}$

$\boxed{DE=3x\sin\alpha}$

$\frac{AC}{AB}=\cos\alpha=\frac{5x}{AB} \quad AB=\frac{5x}{\cos\alpha}$

$\frac{15x^2}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}=15x^2\cdot tg\,\alpha$

$\frac{1}{\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \sin\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \quad \sin^2\alpha=1 \quad \sin\alpha=1 \quad \sin\alpha=-1$

$AE=\frac{3x\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=3x\cos\alpha \quad DE=3x\sin\alpha \quad \cancel{CE^2=9x^2\sin^2\alpha+9x^2\cos^2\alpha-2a}$

$CE^2=25x^2+9x^2\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cdot5x\cdot3x\cos\alpha=$

$=25x^2-30x^2\cos^2\alpha+9x^2\cos^2\alpha=25x^2-21x^2\cos^2\alpha$

$CE=x\sqrt{25-21\cos^2\alpha} \quad S_{AEC}=\frac{1}{2}\cdot3x\cos\alpha\cdot x\sqrt{25-21\cos^2\alpha}\cdot\sin135^0=$

$=\frac{3}{2}x^2\cos\alpha\sqrt{25-21\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\frac{3\sqrt2}{2}x^2\cos\alpha\sqrt{25-21\cos^2\alpha}$

$S=\frac{1}{2}h\cdot5x \quad 2S=h\cdot5x \quad h=\frac{2S}{5x}=\frac{3\sqrt2}{5}x^2\cos\alpha\sqrt{25-21\cos^2\alpha}$

$\cancel{\cos}\ \sin\alpha=\frac{\sqrt2}{5}x\sqrt{25-21\cos^2\alpha}$

$CH=AH\,tg\,\alpha$

$BC=AC\,tg\,\alpha \quad DE=AE\,tg\,\alpha$

$\underset{5x\,tg\,\alpha}{\overset{\shortparallel}{}}$

$\frac{CH}{DE}=\frac{5}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AB \cdot BK = 9$

~~$\angle BDE = \alpha$~~ $\angle ADB = \alpha$

~~$BE^2 = 9 + DE^2 - 2\cos\alpha \cdot 3 \cdot DE$~~

5. $R - ?$

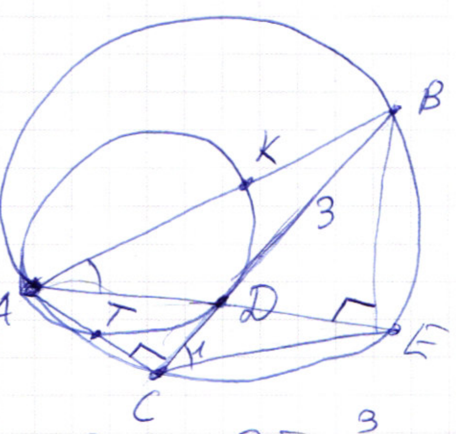
$r - ?$

$S_{BACE} - ?$

$CD = 1$

$BD = 3$

$AD \cdot DE = 3$



$AB^2 = AC^2 + 16$

$AB^2 = AE^2 + BE^2$

$9 = DE^2 + BE^2$

$1 = AD^2 - AC^2$

~~$AC^2 = 1 + A$~~

$\frac{AB}{CE} = \frac{BD}{DE} = \frac{AD}{CD}$ $\quad DE = \frac{3}{AD}$

$AB^2 = AD^2 + 9 - 2AD \cdot 3 \cdot \cos\alpha$

$CE^2 = 1 + DE^2 - 2DE\cos\alpha$

$\frac{AB}{CE} = \frac{BD \cdot AD}{3} = \frac{AD}{CD}$

6. $\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1| \\ -\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \le ax + b \\ x + |2x-1| \ge ax + b \\ -\frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{2} \end{cases}$

$\left(\frac{3}{2}; 2\right)$

$x = -\frac{1}{4}: \quad \frac{2}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{5}{8}$

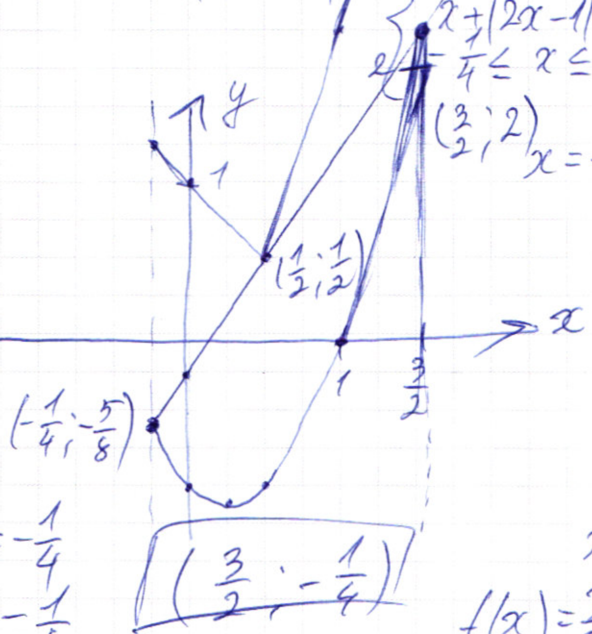
$\begin{cases} -\frac{5}{8} = -\frac{1}{4}a + b \\ 2 = \frac{3}{2}a + b \end{cases}$

$-\frac{5}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}a$

$-\frac{21}{8} = -\frac{7}{4}a$

$-21 = -14a$

$a = \frac{3}{2}, \; b = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$



$\boxed{\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)}$

$x = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1$

$x_b = \frac{1}{4}$

$y_b = \frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{9}{8}$

$x = \frac{3}{2}: 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{6}{4} - \frac{4}{4} = \frac{8}{4}$

$x + |2x-1| \ge \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

$f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

$|2x-1| \ge \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

$f\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{5}{8}$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$

$2x - 1 \ge 0: \quad 2x - 1 \ge \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

$2x \ge 1$

$x \ge \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}x \ge \frac{3}{4} \quad 6x \ge 3 \quad x \ge \frac{1}{2}$

$x < \frac{1}{2}: \quad -2x + 1 \ge \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \quad -\frac{5}{2}x \ge -\frac{5}{4} \quad \frac{5}{2}x \le \frac{5}{4} \quad \frac{1}{2}x \le \frac{1}{4} \quad x \le \frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{2x^2-x-1 \leq ax+b}$ $\quad$ $\cancel{D=(a+1)^2+8(1+b)=a^2+2a+1+8+8b}$

$\cancel{2x^2-x(1+a)-1-b \leq 0}$

$\cancel{7.\ f(ab)=f(a)+f(b) \quad f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]}$ $\quad 1 \leq x \leq 21 \quad f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$1 \leq y \leq 21$

$\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{1}{2y}\right]}$

$\cancel{\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{1}{2y}\right]<0}$ – для прост

3. $\cancel{(y-2x)=xy-2x}$ $\begin{cases}(y-2x)^2=(y-2)(x-1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0\end{cases}$ $\quad y-2x \geq 0$, $y \geq 2x$

$2x^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}x+2+y^2-4y+4-2-4+3=0$

$(\sqrt{2}x-\sqrt{2})^2+(y-2)^2-3=0$

$2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0$

$(y-2x)^2=y^2-4xy+4x^2=y^2-4y+4+4y-4+4(x^2-2x+1)+8x-4=$

$\cancel{=(y-2)^2+4(x-1)^2+4(y-1)+4(2x-1)=(y-2)^2+4(x-1)^2+4y-8+4+}$

$\cancel{+8x-8+4=(y-2)^2+4(x-1)^2+4(y-2)+8(x-1)+8}$

$\begin{cases} y \geq 2x \quad a=y-2 \quad b=x-1 \\ \cancel{a^2+4b^2+4a+8b+8=ab} \\ \cancel{2b^2+a^2-3=0}\end{cases}$ $\quad =(y-2)^2+4(x-1)^2+8x-4+4y-4-4xy=$

$=(y-2)^2+4(x-1)^2+8x+4y-8-4xy=$

$\cancel{a^2=3-2b^2} \quad \cancel{a^2+4b^2+4a+8b+8=ab}$ $\quad =(y-2)^2+4(x-1)^2+8(x-1)+$

$\cancel{(a+2)^2+2(b+2)^2-4=ab}$ $\quad \cancel{a^2+4a+4+4b^2+8b+8-4=ab}$

$\cancel{(a+2)^2+(\sqrt{2}b+2\sqrt{2})^2-4=ab}$ $\quad +4y(1-x)=$

$=(y-2)^2+4(x-1)^2+8(x-1)-4y(x-1)=(y-2)^2+4(x-1)^2+$

$+(x-1)(8-4y)=(y-2)^2+4(x-1)^2-4(x-1)(y-2)$

$\begin{cases} 4(x-1)^2+(y-2)^2-4(x-1)(y-2)=(y-2)(x-1) \\ y \geq 2x \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0\end{cases}$ $\quad a=x-1$, $b=y-2$

$\begin{cases} 4a^2+b^2-4ab=ab \\ 2a^2+b^2-3=0 \end{cases}$ $\quad b^2=3-2a^2$

$4a^2+b^2-5ab=0 \quad D=\cancel{1+80b-81b}\ 25b^2-16b^2=9b^2$

$4a^2-5b\cdot a+b^2=0 \quad a_1=\frac{5b+3b}{8}=b \quad a_2=\frac{5b-3b}{8}=\frac{1}{4}b$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $a=d_1 \quad b=d_1q \quad c=d_1q^2, \quad x=d_1q^3$

$ax^2+2bx+c=0$

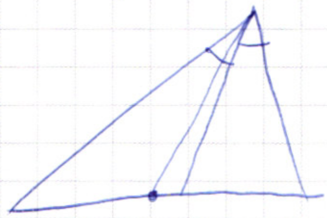
$D=4b^2-4ac = 4(b^2-ac)=4(d_1^2q^2-d_1^2q^2)=4\cdot 0=0$

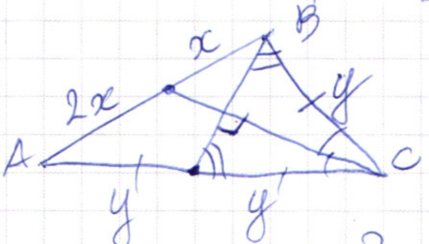
~~$x_1=\frac{-2b+2\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}$, $x_2=\frac{+b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}$~~

~~$x_1=\frac{-d_1q+\sqrt{d_1^2q^2-d_1^2q^2}}{d_1}=-d_1q+\cancel{d_1}$~~ $\quad x=\frac{-2b+0}{2a}=-\frac{b}{a}$

$-\frac{b}{a}=-\frac{d_1q}{d_1}=d_1q^3 \quad -d_1q=d_1^2q^3 \quad \boxed{-1=d_1q^2}$

2.





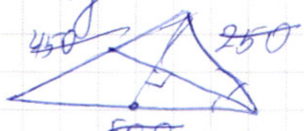
$3y+3x=1200$

$x+y=400$

$y<3x+2y$

$2y<y+3x$

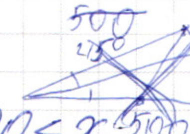
$3x<3y$



~~$3x<3y \Rightarrow \quad x>y$~~

$-y<3x \Rightarrow \quad y>-3x$ всегда.

$y<3x; \quad x<y?$

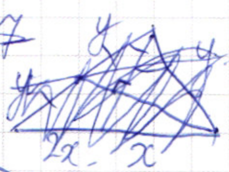


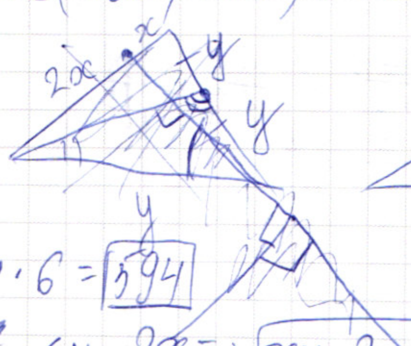
$\begin{cases} x+y=400, \\ y<3x, \\ y>x; \end{cases}$ ~~$y=3x \Rightarrow$~~ $x=100 \quad y=400-x$

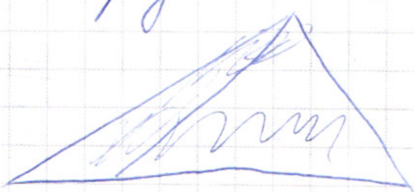
$400-x<3x \quad 400<4x \quad 100<x$

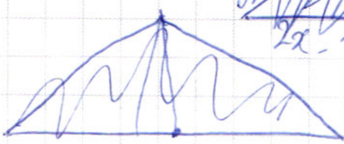
$400-x>x \quad 400>2x \quad x<200$

$x\in(100;200)$. ~~$=99$ треуг $\cdot 3=297 \quad 99\cdot 3=297$~~









$99\cdot 6=\boxed{594}$

3. $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ y\geq 2x \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$ ~~$2x^2-4x$~~ $2x^2-4x+y^2-4y+4-1=0$

$2x^2-4x+(y-2)^2-1=0$

$D=16-8((y-2)^2-1)=16+8-8(y-2)^2=24-8(y-2)^2$

$D=16-8(y^2-4y+3)=16-8y^2+32y-24=-8y^2+32y-8=-8(y^2-4y+1)$

$x_1=\frac{4+\sqrt{D}}{4}=1+\frac{\sqrt{D}}{4}=$ ~~4~~ $\quad y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \quad 4x^2+y^2+2x+y-2-5xy=0$$

$\cancel{4y \geq 2x}$

$4x^2+2y^2-8x-8y+6=0$

$-y^2+10x+9y-8-5xy=0 \qquad y^2-9y+8-10x+5xy=0$

$\cancel{y^2-9y+9-1-5x(2-y)}=0 \qquad 6x^2+2y^2-5xy-2x-3y+1=0$

$4x^2-4x+2x+1+x^2+1-1+2y^2-5xy-3y=0$

$2y^2-y(5x+3)+6x^2-2x+1=0$

$D=(5x+3)^2-8(6x^2-2x+1)=25x^2+30x+9-48x^2+16x-8=$

$=-23x^2+36x+1$

$6x^2-x(5y+2)+2y^2-3y+1=0 \quad D=25y^2+20y+4-24(2y^2-3y+1)=$

$=25y^2-48y^2+20y+72y+4-24=-23y^2+92y-20$

$y^2-4xy+4x^2=x(y-2)-(y-2)=(y-2)(x-1)$

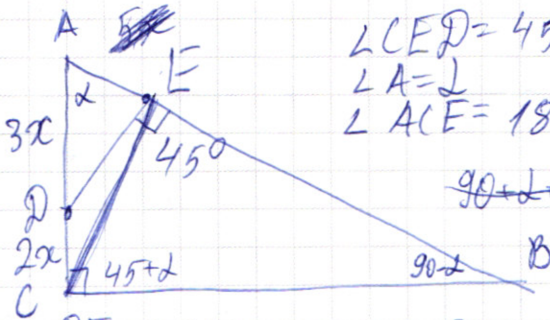
$(y-2x)^2=(y-2)(x-1) \Rightarrow y-2=\frac{(y-2x)^2}{x-1}$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \qquad 2x^2+y^2-4y+4-1-4x=0$

$2x^2-1-4x+(y-2)^2=0$

$2x(x-2)-1$

4.



$\angle CED=45^\circ \quad tg\,BAC-? \quad \angle AEC=135^\circ \quad \angle BEC=45^\circ$

$\angle A=\alpha$

$\angle ACE=180-135-\alpha=45-\alpha \qquad \angle CDE=180-90+\alpha=$
$=90+\alpha$

$\cancel{90+\alpha+45+45-\alpha}$

$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$

$\frac{AB}{3x}=\frac{5x}{AE}=\frac{BC}{DE} \qquad \frac{DE}{AE}=\frac{BC}{5x}$

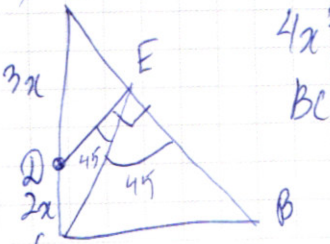
$tg\,\alpha=\frac{DE}{AE}=\frac{BC}{AC} \Leftrightarrow tg\,\alpha=\frac{DE}{AE}=\frac{BC}{5x} \qquad \angle BCE=180-90+\alpha-45=45+\alpha$

$AC^2=AE^2+CE^2-2AE\cdot CE\cdot\cos\angle AEC=AE^2+CE^2$

$DE=AE\,tg\,\alpha, \quad BC=AC\,tg\,\alpha=5x\,tg\,\alpha \qquad 9x^2=AE^2+AE^2tg^2\alpha$

$9x^2=AE^2(1+tg^2\alpha) \quad AB^2=25x^2(tg^2\alpha+1) \quad AB^2=(5x\,tg\,\alpha)^2+25x^2$

$\cancel{\frac{3x}{AE}=\frac{5x}{AB}}$



$4x^2=DE^2+CE^2-\sqrt{2}\cdot DE\cdot CE$

$BC^2=CE^2+BE^2-\sqrt{2}\,CE\cdot BE$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)