МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Так a, b, c - первые три члена геометрической прогрессии, то пусть $b = a\cdot q$, $c = a\cdot q^2$. (q - шаг геометрической прогрессии)

Тогда четвёртый член - d, находится по формуле $d = aq^3$.

Найдём корни квадратного уравнения $ax^2 + 2bx + c$ подставив вместо b и c, aq и aq^2.

$$ax^2 + 2aqx + aq^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2aq \pm \sqrt{4a^2q^2 - 4a^2q^2}}{2a} = \frac{-2aq}{2a} = -q$$

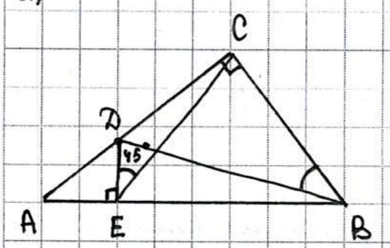
Тогда $d = -q$, то есть $-q = aq^3$.

Либо $q = 0$ и тогда $c = 0$, либо $q \neq 0$ и тогда можно разделить обе части на q и получится, что $aq^2 = -1 = c$

Ответ: 0 или -1.

Задача 4.

а)



Дано:
$\triangle ABC$ - прямоугольный
$AD : AC = 3 : 5$
$DE \perp AB$
$\angle CED = 45°$
Найти:
$tg\angle BAC$ - ?

Решение:

$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC}$.

Четырёхугольник $BEDC$ - вписанный, т.к. $\angle BED + \angle BCD = 180°$.

$\angle DEC = \angle DBC = 45°$, как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу.

Тогда $\triangle BCD$ - равнобедренный прямоугольный ($\angle DCB = 90°$ и $\angle CBD = 45°$)

~~$BC = CD$~~ То есть $BC = CD$

Так как $AD : AC = 3 : 5$, то $CD : AC = 2 : 5$, а $CD = BC \Rightarrow BC : AC = \frac{2}{5} = tg\angle BAC$.

Ответ: $\frac{2}{5}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

б) $AC = \sqrt{29}$ и найти $S_{\triangle CED}$.

1) $\triangle EAD \sim \triangle CAB$ по 2ум углам ($\angle A$-общий, $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$)
~~коэффициент подобия~~

$$\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow ED = \frac{AD}{AB} \cdot BC = \frac{6}{5}$$

2) ~~AB~~ по теореме Пифагора для $\triangle ACB$:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{29 + \frac{4}{25} \cdot 29} = \frac{29}{5}$$

3) $\sin\angle EDC = \sin\angle EDA = \frac{AE}{AD} = \frac{3 \cdot 5}{3\sqrt{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

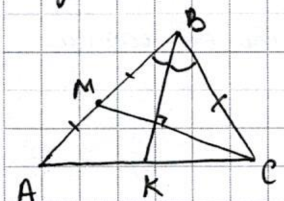
4) ~~AE~~ по теореме Пифагора для $\triangle ADE$:

$$AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = \sqrt{\frac{9 \cdot 29}{25} - \frac{36}{25}} = 3$$

5) $S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle CDE \cdot CD \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{29} \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{5}$

Ответ: $\frac{6}{5}$.

Задача 2.



Пусть в треугольнике ABC биссектриса ⊥ медиане.

BK - биссектриса, CM - медиана

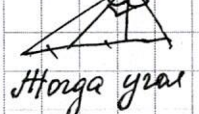
В $\triangle MBC$ BK - биссектриса и высота $\Rightarrow \triangle MBC$ - равнобед.

Значит сторона BC в 2 раза меньше стороны AB

По свойству биссектрисы в $\triangle ABC$:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{KC} = 2$$

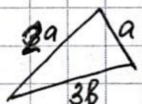
Заметим, что медиана и биссектриса из одной вершины не могут быть перпендикулярны.



Тогда угол больше 180°, а такого быть не может.

Тогда нам подходят треугольники, такие, что у них одна сторона в два раза больше другой

Подсчитаем сколько их.



Пусть одна сторона a, другая $2a$ и третья $3в$.

$$3a + 3в = 1200$$

$$a + в = 400$$, т.к. a - целая, то и $в$ - целая.

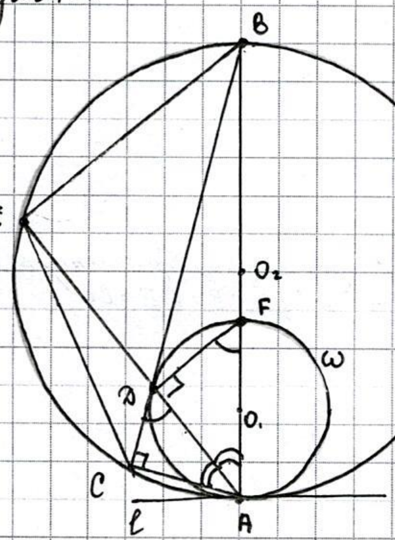
По неравенству треугольника:

$\begin{cases} 3a > 3в \\ 2a < a + 3в \end{cases} \begin{cases} a > в \\ a < 3в \end{cases}$ Тогда $a > 200$ и $a < 300$. Целых чисел от 200 до 300 - 99.

Ответ: 99.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.



Пусть центры окружностей ω и Ω, O_1 и O_2. ~~соответствен~~

Утверждение:

O_1, O_2, A - прямая.

Док-во:

Проведём касательную в A (l - касательная)

$O_1A \perp l$ и $O_2A \perp l \Rightarrow O_1, O_2, A$ - прямая ч.т.д.

Пусть AB повторно пересекает ω в точке F.

$\angle BCA = 90°$, как вписанный опирающийся на диаметр. в Ω

$\angle CAD = \angle DFA$, как угол между хордой и касательной и вписанный угол, опирающ. на одну дугу.

$\angle FDA = 90°$, как вписанный угол, опирающ. на диаметр в ω.

Тогда $\triangle ACD \sim \triangle ADF$ по 2ум углам.

Значит $\angle CAD = \angle DAF \Rightarrow AD$ - биссектриса в $\triangle CAB$

По свойству биссектрисы для $\triangle CAB$:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{1}{3} \Rightarrow AB = 3AC.$$

По теореме Пифагора для $\triangle ABC$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = \frac{AB^2}{9} + BC^2$$

$$AB^2 \cdot \frac{8}{9} = BC^2$$

1) $AB = \sqrt{\frac{BC^2 \cdot 9}{8}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 9}{8}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{R = \frac{3}{2}\sqrt{2}}}$

$\Downarrow$

$AC = \sqrt{2}$

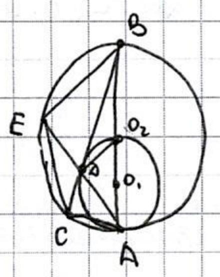
Так как $\triangle ACD \sim \triangle DAF$ следует, что $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AF}$

2) $AF = \frac{AD^2}{AC} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\underline{r = \frac{3}{2\sqrt{2}}}}$

По теореме Пифагора для $\triangle ACD$:

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

Так как $R = 2r$, тогда рисунок такой:



$S_{ACEB} = S_{ACB} + S_{CEB}$

$S_{ACB} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4}{2} = 2\sqrt{2}$

$S_{CEB} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где p - полупериметр $\triangle CEB$
$a = BC$, $b = c = BE = CE$

$\triangle CEB$ - равнобедренный
т.к.

$\angle ECB = \angle EAB = \angle CAE = \angle CBE$

как вписанные углы на одну дугу опирающиеся.

Найдём BE.

$\triangle ADO_2 \sim \triangle AEB$ по 2 углам ($\angle A$ общий, $\angle ADO_2 = \angle AEB = 90°$)

$\frac{DO_2}{EB} = \frac{AO_2}{AB} = \frac{1}{2}$

$BE = 2DO_2$

Так как $\triangle ACD \sim \triangle ADO_2$ (уже было доказано)

$\frac{DO_2}{CD} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow DO_2 = \frac{AD \cdot CD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow BE = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot 2 = \sqrt{6}$

Тогда $p = 2 + \sqrt{6}$, $a = 4$, $b = c = \sqrt{6}$.

$S_{CEB} = \sqrt{(2+\sqrt{6})(\sqrt{6}-2) \cdot 4} = 2\sqrt{6-4} = 2\sqrt{2}$

3) $S_{ACEB} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \underline{\underline{4\sqrt{2}}}$

Ответ: $R = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $S_{ACEB} = 4\sqrt{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7.

1) $f(1)=0$, т.к. $f(a\cdot 1)=f(a)+f(1)$.

2) $f(\frac{1}{a})=-f(a)$, т.к. $f(\frac{1}{a}\cdot a)=f(\frac{1}{a})+f(a)=0$.

3) $f(n)=\alpha_1\cdot f(p_1)+\alpha_2\cdot f(p_2)\ldots$
$(n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k})$

Если $x=1$, то подходят 20 чисел y, чтобы $f(\frac{x}{y})<0$.
(все кроме 1)

При $x=2, 3$ $f(2)=f(3)=1$.

$f(\frac{2}{y})=\underset{1}{f(2)}+f(\frac{1}{y})<0 \Rightarrow f(\frac{1}{y})<-1$ таких 18.

~~При x=3~~

При $x=4, 5, 6, 9$ $f(4)=f(5)=f(6)=f(9)=2$

$f(\frac{4}{y})=\underset{2}{f(4)}+f(\frac{1}{y})<0 \Rightarrow f(\frac{1}{y})<-2$ таких 14.

При $x=7, 8, 10, 12, 15, 18$. $f(x)=3$

Чисел y – 8.

При $x=14, 16, 20, 21$ $f(x)=4$

Таких чисел y – 4

При $x=11$ $f(x)=5$

Чисел y – 3

При $x=13$ $f(x)=6$

Чисел y – 2

При $x=17$ $f(x)=7$

Чисел y – 1

При $x=19$ $f(x)=9$ и чисел y – нет

Ответ: 70 пар.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

ОДЗ:

$xy-2x-y+2\geqslant 0$

$y\geqslant \frac{2(x-1)}{(x-1)}$

$$\begin{cases} y-2x\geqslant 0 \\ (y-2x)^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

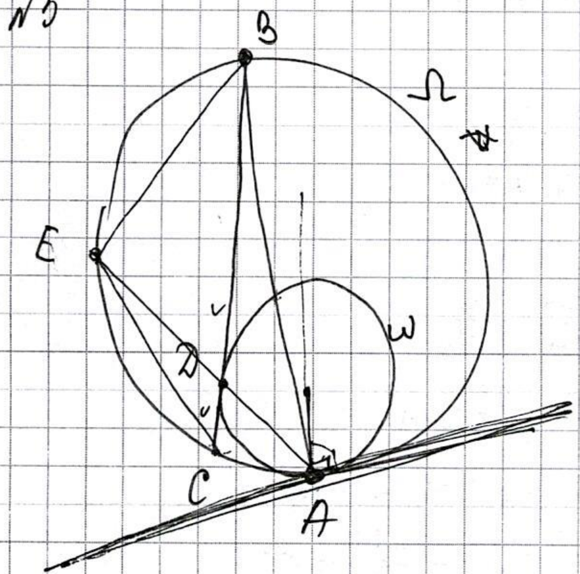
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

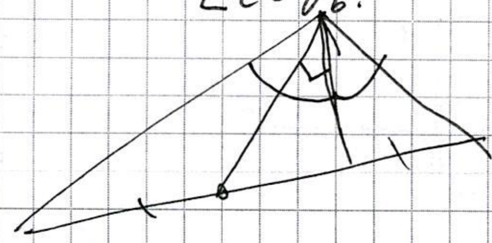
№5



$BC = 4$

$BE = \sqrt{6}$

$EC = \sqrt{6}.$

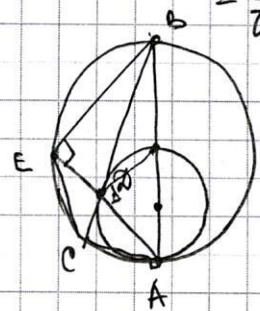


~~EB~~

$\frac{DO_2}{CD} = \frac{O_2A}{AD}$

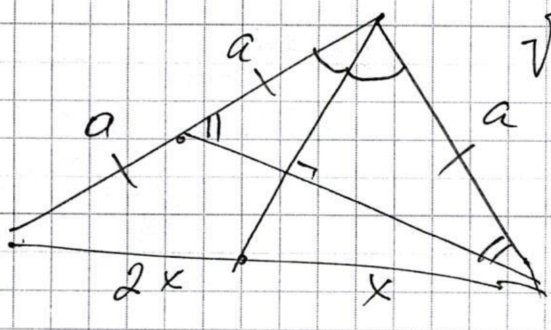
$DO_2 = \frac{O_2A \cdot CD}{AD} = \frac{3 \cdot 1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$

$2\cdot(90+\alpha) = 180 + 2\alpha.$



$\frac{DO_2}{CD} = \frac{AD}{AC}$

$DO_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$



$\sqrt{\frac{3}{2}}.$

$a > 200.$

$2a < a + 3x$

$a < 3x$

$a > x$

$a + x = 400.$

$a > x$

$3x > a$

$300 > a > 200$

$a = 300.$

~~300~~. 299.

$3a = 897.$

$3x = 303.$

$p = \frac{BC + BE + EC}{2} = 2 + \sqrt{6}$

$\sqrt{(2+\sqrt{6})(\sqrt{6}-2)2} = 2\sqrt{6-4} = 2\sqrt{2}.$

$\underbrace{299 \ldots 203 \quad 202 \quad 201}_{99.}$

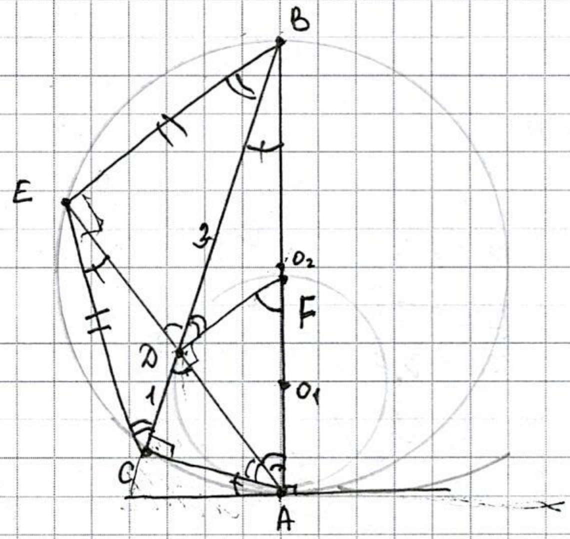
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

AB - диаметр.



$ED \cdot DA = 3.$

~~$BF \cdot BA = 9$~~

$BF \cdot BA = 9.$

$BC = 4$

$ED \cdot DA = 3.$

$\frac{BA}{CA} = \frac{3}{1}$

$BA = 3CA$

$AB^2 = CA^2 + 16$

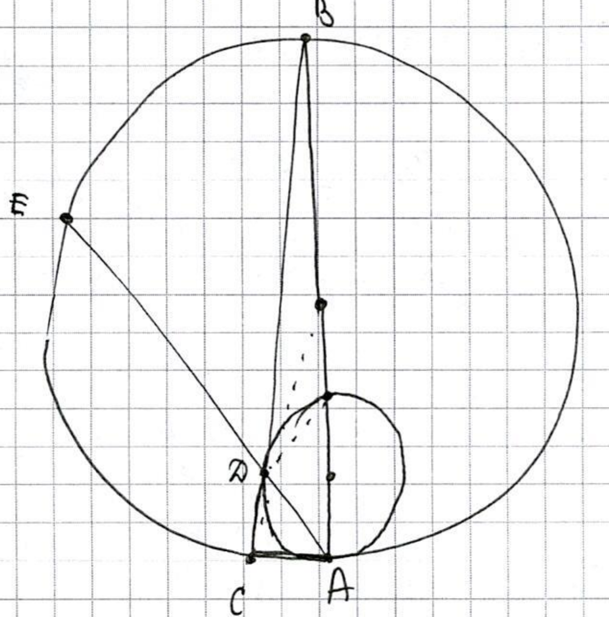
$AB^2 = \frac{AB^2}{9} + 16$

$\frac{8}{9} AB^2 = 16$

$AB^2 = 18$

$AB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$R = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$



$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$

$x + |2x - 1| - ax - b \geq 0$

$x(1-a) + |2x - 1| - b \geq 0$

$\frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} =$

$= \underline{9.}$

$x(1-a) + 2x - 1 - b \geq 0$

$3x - xa - 1 - b \geq 0$

$x \geq \frac{b+1}{3-a}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a \quad b=aq \quad c=aq^2$

$ax^2+2bx+c=0$

$\cancel{x_{1,2}=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2}=\pm\sqrt{b^2-ac}-b}$

$\cancel{a \quad aq \quad aq^2}$

$\cancel{x=\pm\sqrt{a^2q^2-a^2q^2}-aq}$

$x=\frac{-2aq\pm\sqrt{4a^2q^2-4a^2q^2}}{2}=-aq.$

$-aq=aq^3 \qquad aq^3+aq=0$

$\cancel{aq(q^2+1)=0} \quad aq(q^2+1)=0.$

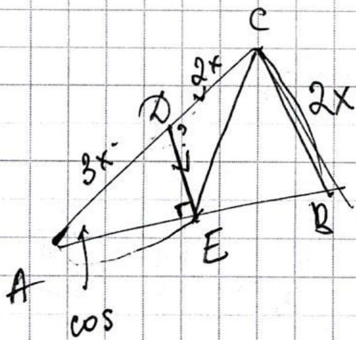
$a=0, q=0.$

Ответ: 0.

$\frac{3}{5}\sqrt{29}-\frac{6}{5}$

$\frac{9\cdot 29-36}{25}=\frac{9\cdot 29-9\cdot 4}{25}=$

$=\frac{9\cdot 25}{25}=9$



$\frac{3}{5}\sqrt{29}$

$\frac{EA}{BC}=\frac{3\cancel{x}}{5\cancel{x}}$

$\frac{3}{5}\sqrt{29}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{29}$

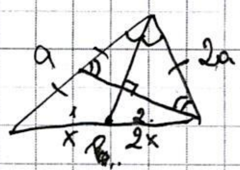
$\frac{6\cdot 29\cdot 5}{5\cdot 25\cdot 29}=\frac{6}{5}$

$ED=\frac{6}{5}x$

$\cos\alpha=\sin 90-\alpha.$

$BC=\frac{2}{5}x$

$BC^2=\frac{4}{25}\cdot 29$



$3x<3a$

$x<a$

$1200:6=200$

$a>200$

$a=200 \quad 201$

$2a=400 \quad 402$

$3x=600 \quad 597$

$\cancel{\frac{5\cdot 29+4\cdot 29}{5}}$

$\cancel{\frac{9\cdot 29}{5}}$

$\frac{25\cdot 29+4\cdot 29}{25}$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

ОДЗ:
$xy-2x-y+2\geq 0$

$$\begin{cases} \begin{cases} y-2x\geq 0 \\ y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \end{cases} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y-2x\geq 0 \\ y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \end{cases} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\geq 2x \\ y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0 \; (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \; (2) \end{cases}$$

$2x^2-5xy+6x+5y-5=0.$

$2x^2-x(5y-6)+5y-5=0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

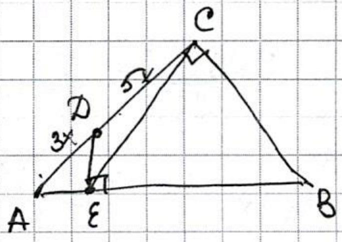
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$x_{1,2} = \frac{-(5x-6) \pm \sqrt{(5x-6)^2 - 8(5y-5)}}{4} = \cancel{\frac{-5x+6 \pm \sqrt{25x^2 - 100x + 36}}{4}}$$

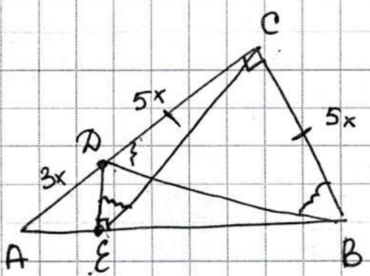
$$(5x-6)^2 - 8(5y-5) \geq 0$$

$$25x^2 - 60x + 36 - 40y + 40 \geq 0$$



$tg\,BAC$ - ? $\quad tg\,BAC = \frac{BC}{AC}$

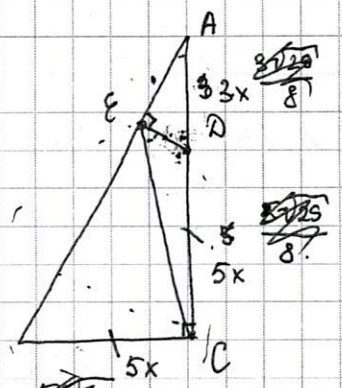
$\angle CED = 45°$



$$tg = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{8}$$

$AC = \sqrt{29}$

$S_{\triangle CED}$



$\sqrt{29}$

$x = \frac{\sqrt{29}}{8}$

~~sin ∠BAC = sin ∠EDA~~

~~cos ∠α = sin 90 − α~~

$\frac{ED}{BC} = \frac{3}{8}$ $\qquad AE = \sqrt{9x^2 - \frac{125}{64}x^2}$

$ED = \frac{15}{8}x$

$\cos\angle EDA = \frac{5}{8}$

$\sin\angle EDA = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$

$9 \cdot 64 = 576 - 125 = 451$

$19 \cdot 19 =$

$64 - 25 = 39$

$$S = \frac{\sin \cdot ED \cdot DC}{2} = \frac{\frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \frac{15}{8}x \cdot 5x}{2} =$$

$$\begin{array}{r} \times 19 \\ 19 \\ \hline 171 \\ 19\ \ \\ \hline 361 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y-2x \geq 0$

$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \quad 4x^2+2y^2-8x-8y+6=0.$$

$\cancel{y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0}$

$\cancel{2x^2+y^2-4x-4y+3=0.}$

$\cancel{2x^2-5xy+6x+5y-5=0.}$

$y^2+5xy-10x-9y+8=0$

$x(5y-10)=9y-y^2-8$

$$\boxed{x=\frac{-y^2+9y-8}{5y-10.}}$$

$-x(3y-2)$

$4x^2-5xy+2x+y^2+y-2=0$

$2x^2-4x+y^2-4y+3=0$

$(5y-2)^2-4\cdot4\cdot(y^2+y-2)\geq0$ $\quad(1)\ 25y^2-20y+4-16y^2-16y+32\geq0$

$16-4\cdot2\cdot(y^2-4y+3)\geq0$ $\quad(2)\ 16-8y^2+32y-24\geq0$

$(1):\ 9y^2-36y+36\geq0$ $\quad(3y-6)^2\geq0$ ← любое.

$8y^2-32y+8\leq0$

$y^2-4y+2\leq0$

$\cancel{(y-2)^2\leq0}$ $\Rightarrow y-2=0\ \ y=2.$

$2\geq2\sqrt6-\sqrt3$

$4-2\sqrt6\ \leq\ \geq 2-\sqrt3$

$4y^2-16y+4$

$(2y-2)$

$\mathcal{D}=16-4=12$

$\frac{4-\sqrt{12}}{2}=2-\sqrt3$

$y\geq2x$

$2-\sqrt3 \quad 2+\sqrt3$ (y)

$2-\sqrt6 \quad 2+\sqrt6$ (x)

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$2y^2+6x^2-5xy-2x-3y+1=0$

$y^2-4y+2x^2-4x+3=0$

$\mathcal{D}$ $16-4(2x^2-4x+3)=16-8x^2+16x-\cancel{24}\geq 0$

$\cancel{8x^2-16x+8\leq 0}$

$\cancel{x^2-2x+1\leq 0}$

$\cancel{(x-1)^2\leq 0}$

$y^2-4y+1=0.$

$y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

$y^2-y(5x-1)+4x^2+2x-2=0$

$(5x-1)^2-4(4x^2+2x-2)\geq 0$

$25x^2-10x+1-16x^2-8x+8\geq 0$

$9x^2-18x+9\geq 0$

$x^2-2x+1\geq 0.$ $(x-1)^2\geq 0.$

$\underline{x=1.}$ $x=1$

$\cancel{y=}$ $y^2-4y+4+2-2=0$

$y^2-4y+4=0.$

$y_{1,2}=4\pm\sqrt{16-16}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

ОДЗ: $xy-2x-y+2\geq 0$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-2x\geq 0 \\ (y-2x)^2=xy-2x-y+2 \quad (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \quad (2) \end{cases}$$

(2): Решим относительно y.

$$y^2-4y+2x^2-4x+3=0$$

$$D\geq 0 \Rightarrow 16-4(2x^2-4x+3)\geq 0$$

$$16-8x^2+16x-12\geq 0 \quad \cdot(-1) \text{ и } :8$$

$$x^2-2x+1\leq 0 \qquad 8x^2-16x-4\leq 0$$

$$2x^2-4x-1\leq 0$$

$2-\sqrt6$ $\quad 2+\sqrt6$ $\quad x$

$$\frac{4\pm\sqrt{16+8}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{24}}{2}=$$

$$=2\pm\sqrt6$$

$(x-1)^2\leq 0$, но квадрат числа ≥ 0.

Тогда $(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$

Найдём y.

$$y^2-4y+2-4+3=0$$

$$y^2-4y+1=0$$

$$\left.\begin{aligned} y_1&=2-\sqrt3 \\ y_2&=2+\sqrt3 \end{aligned}\right\}$$ т.к. $y\geq 2x \Rightarrow y=2+\sqrt3$, а $2-\sqrt3$ – не подходит

Подставим в первое и проверим, что для него это тоже решение:

~~$2+\sqrt3-2=\sqrt{2+\sqrt3-2-\sqrt3+2}$~~

$$2+\sqrt3-2\neq\sqrt{2+\sqrt3-2-2-\sqrt3+2}$$

$\sqrt3\neq 0 \Rightarrow$ нет решений, потому что для второго это было единственное подходящее решение.

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №5

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

ОДЗ:
$xy-2x-y+2\geq 0$

$$\begin{cases} y-2x\geq 0 \\ y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \quad (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \quad (2) \end{cases}$$

(1): ~~Возведём в квадрат и раскроем скобки и перенесём всё влево.~~

$\cancel{y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0}$

~~Решим относительно x~~

(2): $2x^2-4x+y^2-4y+3=0$

Чтобы было решение для ~~y~~, $D\geq 0$

$\cancel{D=16-8(y^2-4y+3)\geq 0}$

$\cancel{16-8y^2+32y-24\geq 0}$ Домножаем на (-1)

$8y^2-32y+8\leq 0$ Делим на 8

$y^2-4y+1\leq 0$

$y\in[2-\sqrt{3};\,2+\sqrt{3}]$

$f(2) = 1.$

$f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0.$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y} \cdot y\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \underset{}{\overset{0}{f(1)}} + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f\left(\frac{1}{p} \cdot p\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) + f(p)$

$f(1 \cdot b) = \underset{0.}{f(1)} + f(b)$

$f\left(\frac{1}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y)$

~~18/20~~

$21 + 18$

$f($

$\frac{1}{\ }$

$\frac{2}{a} = f(2) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f(2) - f(a).$

21

$f(a) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) \dots$

$f(1) = 0$
$f(2) = 1$
$f(3) = 1$
$f(4) = 2$
$f(5) = 2$
$f(6) = 2$
$f(7) = 3$
$f(8) = 3$
$f(9) = 2$
$f(10) = 3$
$f(11) = 5$
$f(12) = 3$
$f(13) = 6$
$f(14) = 4$
$f(15) = 3.$
$f(16) = 4.$
$f(17) = 8$
$f(18) = 3.$

$1 - (\dots).$

$\frac{2}{\ }$

$f(19) = 9.$
$f(20) = 4.$
$f(21) = 4.$

$y(x-1) - 2(x-1)$

$\cancel{(y-2)(x-1) \geq 0}.$

$\cancel{y \geq 2 \,/\, x \geq 1}.$

$y \geq \frac{2(x-1)}{x-1}. \quad y \geq 2.$

$x \neq 1.$

$\underbrace{20 + 18}_{38} + 14 + 8 + 4 + 3 + 2 + 1$

$38 \quad 52 \quad 60 \quad 64 \quad 67 \quad 70.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)