

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Л1

м.к. a, b, c - члены геометрической прогрессии, то
 $a = a, b = a \cdot e, c = a \cdot e^2$, где e - какое-то число.

Максимум данного уравнения будет равен $a \cdot e^3$. Тогда
 $ax^2 - 2bx + c = ax^2 - 2a \cdot e \cdot x + ae^2 = 0$

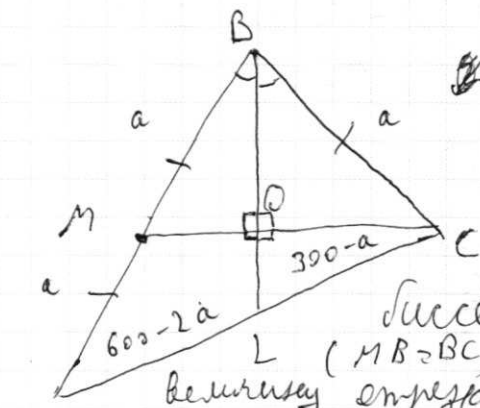
$$D = (2ae)^2 - 4a \cdot ae^2 = 4a^2e^2 - 4a^2e^2 = 0.$$

$$x = \frac{2ae \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{2ae \pm 0}{2a} = \frac{2ae}{2a} = e.$$

м.к. корни уравнения
равны $a \cdot e^3$, то $ae^3 = e \rightarrow a = \frac{e}{e^3} = \frac{1}{e^2} \Rightarrow b = \frac{1}{e^2} \cdot e = \frac{1}{e}$
 $\Rightarrow c = \frac{1}{e^2} \cdot e^2 = 1.$

Ответ: 1.

Л2.



В $\triangle ABC$ обозначим медиану M середины AB , а
отрезок BL - биссектриса $\angle C$ $\triangle ABC$. $BL \cap CM$ в
точке O . м.к. $BO \perp AC$, то

BO - высота, а м.к. BO еще и биссектриса

биссектриса ($BO \in BL$), то $\triangle MBC$ - равнобедренный

L ($MB = BC$) $\Rightarrow BC = AM \Rightarrow AB = 2 \cdot BC$. Обозначим

величину отрезка BC как a . Тогда $BM = AM = a$, $AB = 2a$.

тогда $AC = 300 - AB - BC = 900 - 3a$. То же самое

биссектрисе $\frac{AB}{AL} = \frac{BC}{CL} \Rightarrow \frac{2a}{AL} = \frac{a}{CL} \Rightarrow AL = \frac{CL \cdot 2a}{a} = 2CL$.

тогда $2CL + CL = 900 - 3a \Rightarrow CL = 300 - a$, тогда

$$AL = (900 - 3a) - (300 - a) = 600 - 2a.$$

неравенство A , но фактически выполняется строгое

$$\begin{cases} (900 - 3a) + a > 2a \\ (900 - 3a) + 2a > a \\ 2a + a > 900 - 3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 900 > 4a \\ 900 > 2a \\ 900 < 6a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 225 > a \\ 150 < a \end{cases}$$

м.к. стороны целые, то
 $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ всего вариантов
 $149 - 226 - 224 - 157 + 1 =$
 $74.$

Ответ: 74

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \\ x-6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \Rightarrow (x-6)(y-1) \geq 0 \\ \Rightarrow x-6 \text{ и } y-1 \text{ всегда } \text{одинаковы} \\ \text{быть одинакового знака} \end{aligned}$$

$$x^2-12xy+36y^2 = (x-6)(y-1)$$

$$x^2-12xy+36y^2 + (1-y)(x-6) = 0 \Rightarrow x^2-12xy+36y^2 + x-xy-6+6y = 0$$

$$= x^2 + x(1-13y) + (36y^2+6y-6) = 0. \text{ Рассмотрим}$$

данное выражение как квадратный трехчлен относительно x .

$$D = b^2 - 4ac = (1-13y)^2 - 4(36y^2+6y-6) = 169y^2 - 26y + 1 - 144y^2 - 24y + 24 = 25y^2 - 50y + 25 = 25(y^2 - 2y + 1) = (5(y-1))^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{13y-1 \pm 5(y-1)}{2} = \frac{18y-6}{2}; \frac{8y+4}{2} \Rightarrow x = 9y-3; 4y+2;$$

в обоих случаях $x-6$ и $y-1$ будут одинакового знака

* ← →

$$x = 9y - 3 \quad 4y + 2$$

$$(4y+2)^2 + 2y^2 - 12(4y+2) + 20 = 0$$

$$16y^2 + 16y + 4 + 2y^2 - 48y - 24 + 20 = 0$$

$$18y^2 - 36y = 0$$

$$18y(y-2) = 0$$

$$y = 2, \text{ при } x = 10$$

$$y = 0, \text{ при } x = 2$$

$$x = 4y - 2 \quad 9y - 3$$

$$(9y-3)^2 + 2y^2 - 12(9y-3) + 20 = 0$$

$$81y^2 - 54y + 9 + 2y^2 - 108y + 36 - 4y + 20 = 0$$

$$83y^2 - 166y + 65 = 0$$

$$83y^2 - 166y + 83 - 18 = 0$$

$$83(y-1)^2 = 18$$

$$y-1 = \pm \sqrt{\frac{18}{83}}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{\frac{18}{83}}$$

$$y = 1 + \sqrt{\frac{18}{83}}, \text{ при } x = 6 + 9\sqrt{\frac{18}{83}}$$

$$y = 1 - \sqrt{\frac{18}{83}}, \text{ при } x = 6 - 9\sqrt{\frac{18}{83}}$$

Ответ: $x = 6 + 9\sqrt{\frac{18}{83}}, y = 1 + \sqrt{\frac{18}{83}}; x = 6 - 9\sqrt{\frac{18}{83}}, y = 1 - \sqrt{\frac{18}{83}};$
 $x = 10, y = 2; x = 2, y = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.

м.к. $13 = 13 \cdot 1$, но $f(13) = f(13 \cdot 1) = f(13) + f(1) \Rightarrow f(13) = f(13) + f(1) \Rightarrow$

$f(1) = 0$. Заполним таблицу $f(x)$, где все $x \in \mathbb{Z}^+$, $x \in [1, 22]$.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
f(x)	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8	3	9	4	4	6

$$f(2) = \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor = 1; f(3) = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1; f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 2; f(5) = \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2; f(6) = f(2) + f(3) = 2$$

$$f(7) = \left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3; f(8) = f(2) + f(4) = 3; f(9) = f(3) + f(3) = 2; f(10) = f(2) + f(5) = 1 + 2 = 3;$$

$$f(11) = \left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor = 5; f(12) = f(3) + f(4) = 3; f(13) = \left\lfloor \frac{13}{2} \right\rfloor = 6; f(14) = f(2) + f(7) = 4$$

$$f(15) = f(3) + f(5) = 3; f(16) = f(4) + f(4) = 4; f(17) = \left\lfloor \frac{17}{2} \right\rfloor = 8; f(18) = f(3) + f(6) =$$

$$= 3; f(19) = \left\lfloor \frac{19}{2} \right\rfloor = 9; f(20) = f(4) + f(5) = 4; f(21) = f(3) + f(7) = 4; f(22) =$$

$$= f(2) + f(11) = 6. \text{ П. } x = \frac{x}{y} \cdot y, \text{ но } f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y); \text{ м.к. } f\left(\frac{x}{y}\right) < 0, \text{ но } f(x) - f(y) \geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(y) > f(x)$. Выпишем кол-во определенных значений $f(x)$, при $x \in$

$[2; 22]$. $f(x) = 1$ - 2 варианта; $f(x) = 2$ - 4 варианта; $f(x) = 3$ -

6 вариантов; $f(x) = 4$ - 4 варианта; $f(x) = 5$ - 1 вариант;

$f(x) = 6$ - 2 варианта; $f(x) = 8$ - 1 вариант; $f(x) = 9$ - 1 вари-

ант. м.к. $f(y) > f(x)$ получит кол-во вариантов наоборот y при

определении $f(x)$ и сложим все варианты:

$$2 \cdot 19 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 9 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 =$$

$$= 38 + 60 + 54 + 20 + 4 + 4 + 1 = 98 + 58 + 8 + 1 = 165 + 10 =$$

$$= 174 + 58 + 8 + 1 = 172 + 9 = 181.$$

Ответ: 181 пара.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.

Все пары $(a; b)$, такие, что
для всех $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$

$$8x - 6 \cdot |2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

$$f(x) = 8x - 6|2x - 1|$$

при $x \geq 0,5$, $f(x) = 8x - 12x + 6$ ^{6-4x}

при $x \leq 0,5$, $f(x) = 8x + 12x - 6$ ^{12x-6}

x	0	0,5	1	2	3	4	-1	5
f(x)	-6	4	2	-2	-6	-10	-26	-74

$$g(x) = -8x^2 + 6x + 7$$

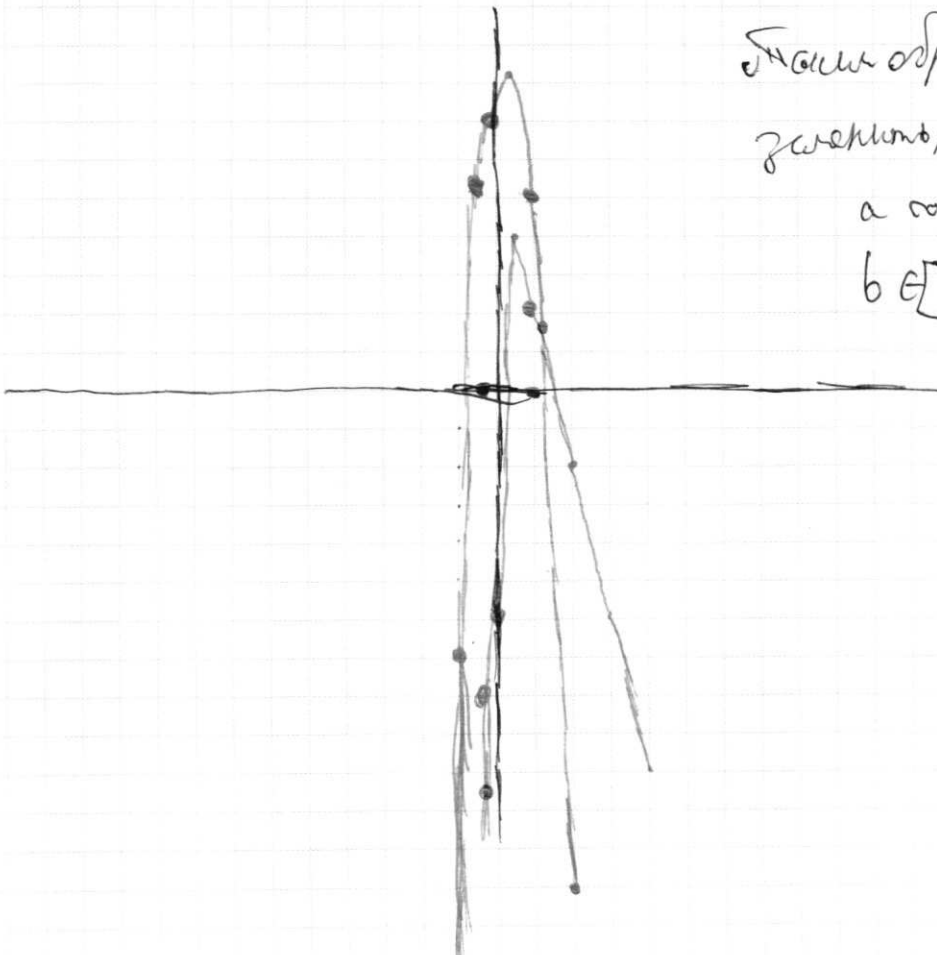
$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

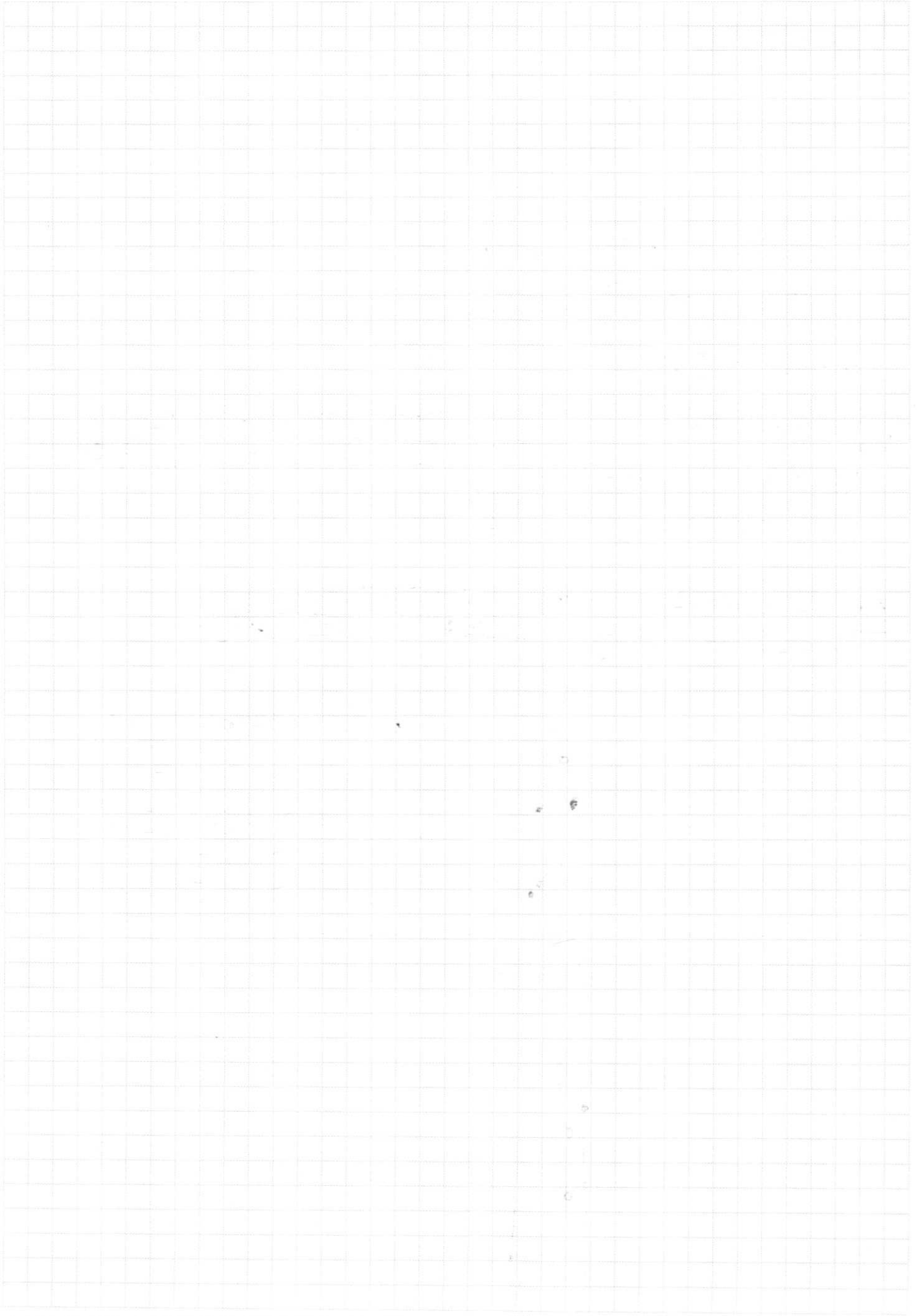
x	0	1	$\frac{3}{8}$	-1	-2	2	3
g(x)	7	5	$\frac{63}{8}$	-7	-27	-13	-47

Таким образом можно
заявить, что $a \in$

$$a \in [-1, 3], a$$

$$b \in [3, 5, 4]$$





черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



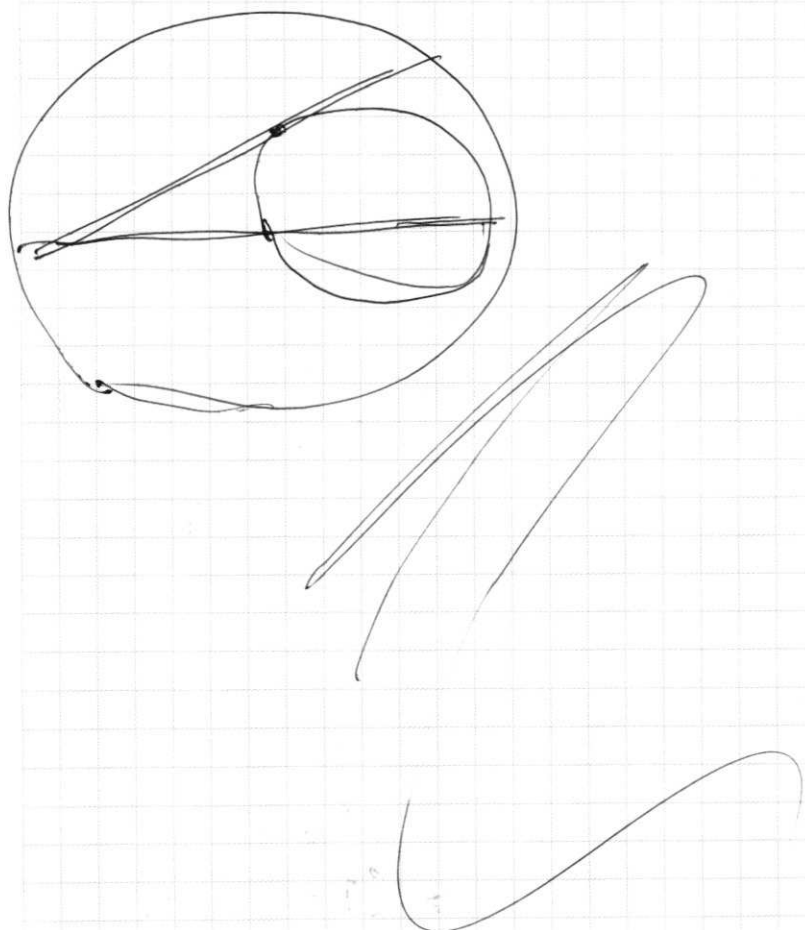
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

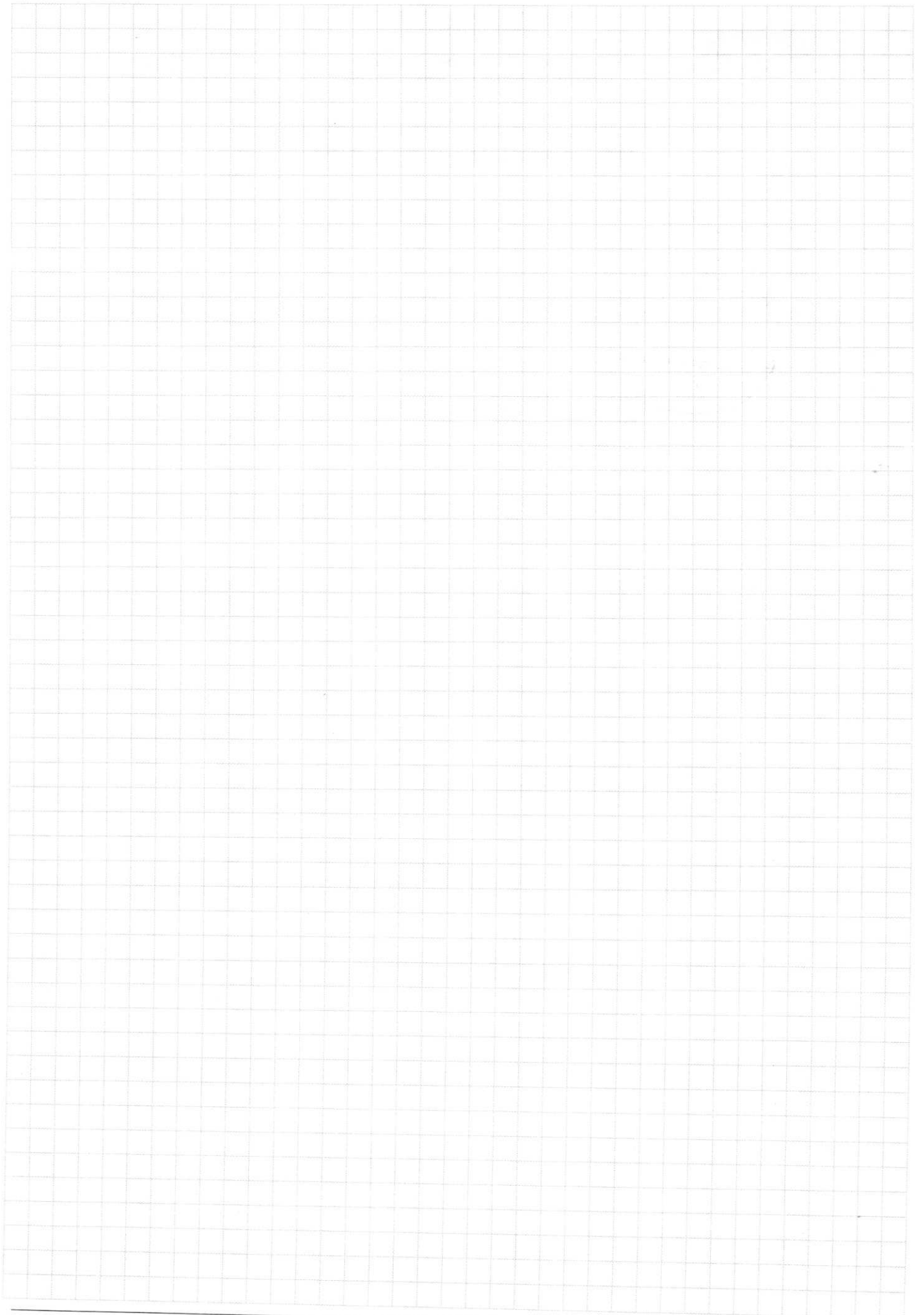
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

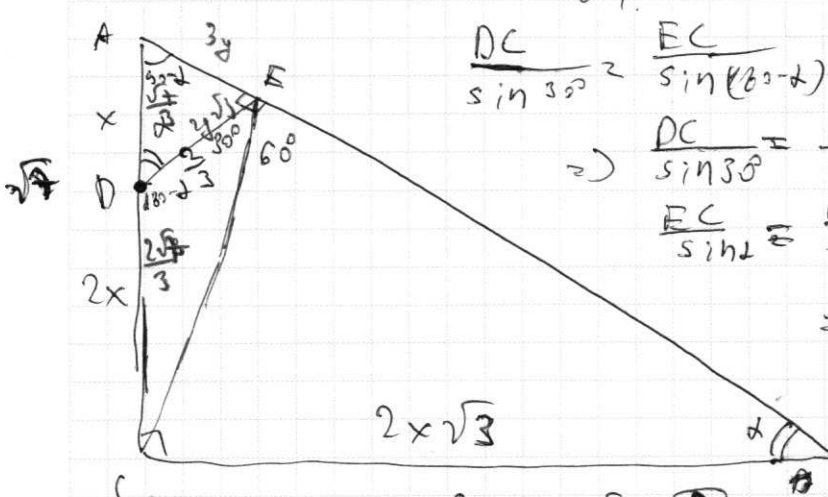


черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

AC AC = 2\sqrt{7} S?



$$\frac{DC}{\sin 30^\circ} = \frac{EC}{\sin(60^\circ - \alpha)} = \frac{BC}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin \alpha}$$

$$\frac{EC}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin 60^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 60^\circ}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{DC \cdot \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$a) \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x\sqrt{3}}{2x} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle BAC = 60^\circ$$

б) AC = 2\sqrt{7}

$$DE = \frac{AC}{3} \cdot 2 = \frac{2\sqrt{7}}{3}, AD = \frac{\sqrt{7}}{3}. \text{ Пусть } DE = 2y\sqrt{3}, \text{ а } AE =$$

$$= 3y$$

$$(2y\sqrt{3})^2 + (3y)^2 = AD^2 = \frac{7}{9}$$

$$12y^2 + 9y^2 = \frac{7}{9}$$

$$21y^2 = \frac{7}{9}$$

$$y^2 = \frac{1}{27}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{27}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{1}{27}} \quad DE = 2y\sqrt{3} = 2\sqrt{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3}$$

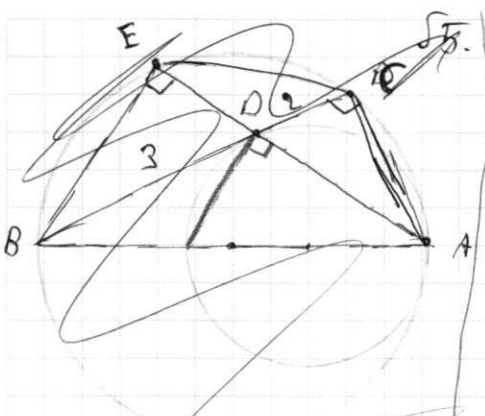
$$\frac{DE}{\sin \angle DCE} = \frac{DC}{\sin \angle DEC} \Rightarrow \sin \angle DCE = \frac{DE \cdot \sin \angle DEC}{DC} = \frac{2/3 \cdot \frac{1}{2}}{2\sqrt{7}/3} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) - \sin(180^\circ - (180^\circ - \alpha)) = \sin(\angle DCE + \angle DEC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{27}{2\sqrt{7}} + \frac{1}{2\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle DEC} = DE \cdot DC \cdot \sin \angle EDC \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{27 + \sqrt{3}}{4\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{7} + 27\sqrt{3}}{9\sqrt{7}} \approx 0,5$$

$$= \frac{27 + \sqrt{3}}{9} \approx 3 + \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ Ответ: } 3 + \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ . Приближенно}$$

57.



f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	2	4	4	2	2	2	3	3	2	3	5
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
	3	6	4	3	4	8	3	5	4	4	8

$\Gamma, R, \text{so } BACE - ?$

$f(6) = f(0) + f(6)$

$f(p) = \lfloor p/2 \rfloor$

$f(3) = 1, f(1.3) = f(1) + f(3) = f(1) + 1$

$f(1) = 0$

$f(2) = 1$

$f(4) = f(2.2) = f(2) + f(2) = 2$

$f(3) = \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$

$f(5) = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$

~~0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3~~
 $\rightarrow 0, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3$
 $3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 8, 9$

- 0:1
- 1:2
- 2:4
- 3:6
- 4:4
- 5:1
- 6:2
- 8:1
- 9:1

$n \cdot k \geq 2, n \geq 2$
 $f(1) = 0, \text{ не учитываем}$

~~0:1~~ $2 \cdot (21 - 2) + 4 \cdot (9 - 4) +$
 $+ 6 \cdot (15 - 6) + 4 \cdot (9 - 4) + 1 \cdot (5 - 1) +$
 $+ 2 \cdot (4 - 2) + 1 \cdot (2 - 1) =$
 $= 2 \cdot 19 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 9 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 =$
 $= 38 + 60 + 54 + 20 + 4 + 4 + 1 =$
 $= 114 + 58 + 9 = 172 + 9 = 181$

Ответ: ~~181~~ 181

$f(\frac{x}{y} \cdot y) = f(\frac{x}{y}) + f(y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

m.k. $f(\frac{x}{y}) < 0$

no $f(y) > f(x)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3

$$1) \sqrt{x-6y} = \sqrt{xy-6y-x+6}$$

$$2) x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$1) x-6y = \sqrt{y(x-6) - (x-6)}$$

$x-6y = \sqrt{(y-1)(x-6)}$ $(y-1)$ и $(x-6)$ одного знака

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = (y-1)(x-6)$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 + (1-y)(x-6) = 0$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 + x - xy - 6 + 6y = 0$$

$$x^2 + x(1-12y-y) + (36y^2 + 6y - 6) = 0$$

$$x^2 + x(1-13y) + (36y^2 + 6y - 6) = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 169y^2 - 26y + 1 - 4(36y^2 + 6y - 6) =$$

$$= 25y^2 - 50y + 25 = 25(y^2 - 2y + 1) = (5(y-1))^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{13y-1 \pm 5(y-1)}{2} = \frac{8y+4}{2}; \frac{18y-6}{2} = \sqrt{4y^2 + 2; 9y - 3} = x$$

$$2) x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$1. x = 4y + 2$$

$$(4y+2)^2 + 2y^2 - 12(4y+2) - 4y + 20 = 0$$

$$16y^2 + 16y + 4 - 48y - 24 - 4y + 20 = 0$$

$$16y^2 - 36y = 0$$

$$16(y^2 - 2y) = 0$$

$$16y(y-2) = 0$$

$y = 0$	$y = 2$
$x = 2$	$x = 10$

$$2. x = 9y - 3$$

$$(9y-3)^2 + 2y^2 - 12(9y-3) - 4y + 20 = 0$$

$$81y^2 - 54y + 9 + 2y^2 - 108y + 36 - 4y + 20 = 0$$

$$81y^2 - 166y + 65 = 0$$

$$83y^2 - 166y + 65 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 83^2 - 83 \cdot 65 =$$

$$= 83(83-65) = 83 \cdot 18$$

$$2 \cdot x = 9y - 3$$

$$(9y-3)^2 + 2y^2 - 12(9y-3) - 4y + 20 = 0$$

$$81y^2 - 54y + 9 + 2y^2 - 108y + 36 - 4y + 20 = 0$$

$$83y^2 - 166y + 65 = 0$$

$$83y^2 - 166y + 65 = 0$$

$$83y^2 - 166y + 83 - 18 = 0$$

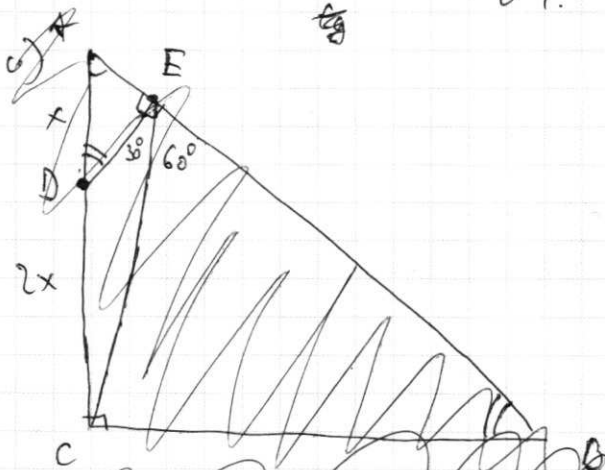
$$83(y-1)^2 = 18$$

$$y-1 = \pm \sqrt{\frac{18}{83}}$$

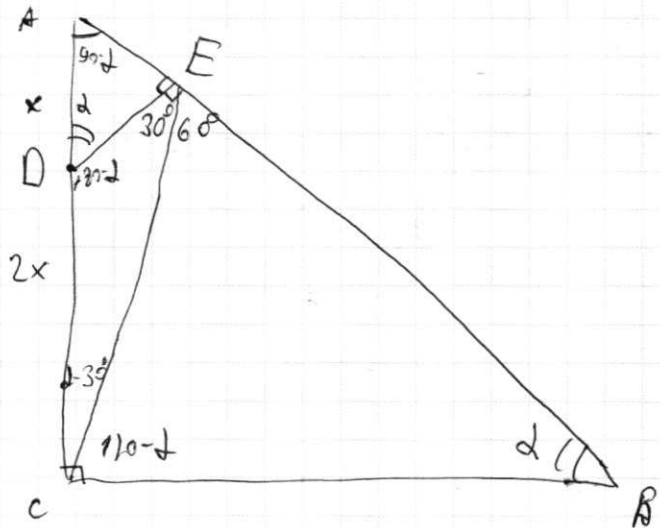
$y =$	$\sqrt{\frac{18}{83}} + 1$	$-\sqrt{\frac{18}{83}} + 1$
$x =$	$9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6$	$-9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6$

(3) (V)

√4.



$\angle BAC = ?$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$a, a \cdot a, a \cdot a \cdot a, a^2, a^3$~~ $ax^2 - 2bx + c = 0$
 $b = a \cdot e, c = a \cdot e^2$

~~$ax^2 - 2aex + ae^2 = 0$
 $D = b^2 - 4ac = 4e^2 - 4a^2e^2 = 0$
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2ae \pm 0}{2a} = -e$~~

~~$x = \frac{-b}{2a} = -e$~~

~~$e = ae \rightarrow a = e, b = e, c = 1$~~

~~$\frac{1}{e^2} x^2 - 2 \frac{1}{e} x + 1 = 0$~~

~~$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot \left(\frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{e^2} = 0$~~

~~$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = e$~~

~~$\frac{1}{e^2} \cdot e^2 - 2 \cdot \frac{1}{e} \cdot e + 1 = 0$~~

~~$1 - 2 + 1 = 0$~~

$ax^2 - 2aex + ae^2 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 4e^2 - 4e^2 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = -e$

~~$a = e, b = e, c = 1, d = e$~~

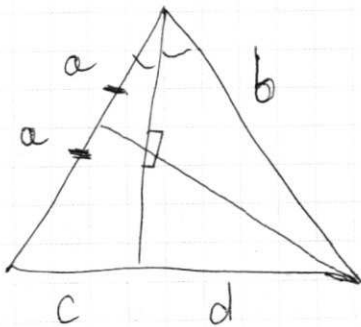
$ae^3 = e$

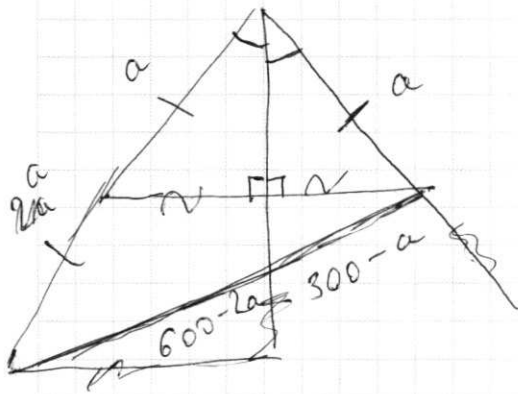
$a = \frac{1}{e^2}$

$a = \frac{1}{e^2}, b = e, c = 1, d = e$

Ответ: $c = 1$.

$\frac{c}{2a} = \frac{e}{2 \cdot \frac{1}{e^2}} = \frac{e^3}{2}$





a от 1 до 299

$$900 - a > a$$

$$3a > 900 - 3a \quad 900 > 2a$$

$$450 > a$$

$$6a > 900 \quad 900 - 2a > 2a$$

$$\boxed{a > 150}$$

$$900 > 4a$$

$$225 > a$$

a от 101 до 299

a от 151 до 224

Всего вариантов $299 - 101 + 1 = 199$ $224 - 151 + 1 = 74$

Ответ: $199 + 74 = 273$ вариантов

3.

$$\begin{array}{r} 224 \\ - 150 \\ \hline 74 \end{array}$$

$$1) \sqrt{x-6y} = \sqrt{xy-6y-x+6}$$

$$2) x+2y^2-12x-9y+20=0$$

$$1) \sqrt{x-6y} = \sqrt{xy-6y-x+6}$$

$$\sqrt{x-6y} = \sqrt{(x-6)(y-1)} \quad x-6 \text{ и } y-1 \text{ одного знака}$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = (x-6)(y-1)$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 + (1-y)(x-6) = 0$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 + x - xy - 6 + 6y = 0$$

$$x^2 + x - 13xy + 36y^2 + 6y - 6 = 0$$

$$x^2 + x(1-13y) + (36y^2 + 6y - 6) = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 163y^2 - 26y + 1 - 144y^2 - 24y + 24 =$$

$$25y^2 - 50y + 25 = 25(y^2 - 2y + 1) = 25(y-1)^2 = (5y-5)^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{13y-1 \pm 5(y-1)}{2} = \frac{18y-6}{2} \text{ ; } \frac{8y-4}{2} = 9y-3 \text{ ; } 4y-2 = x$$

$$x^2 - 12xy + 2y^2 - 4y + 20 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 144 - 4(2y^2 - 4y + 20) = -8y^2 + 16y - 80 + 16y = -8y^2 + 32y - 80$$