МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. ~~[3 балла]~~ Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

$\{-1\} \cup (0;3)$

2. ~~[4 балла]~~ Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

24

3. ~~[4 балла]~~ Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

1 $y=4$ $x=1$

2 $y=x=-1-\sqrt{10}$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45°$.

0,6

11,25

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| > 6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y) < 0$.

128

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (I часть)

Решение: это неравенство ≤ 0 только тогда, когда

Я буду использовать метод интервалов

1) числитель ≥ 0, а знаменатель < 0

либо

2) числитель ≤ 0, а знаменатель > 0

Знаменатель $\neq 0$

Давайте сейчас рассмотрим только числитель и посмотрим, когда он больше 0, а когда меньше

$x^2-2x+5-4|x-1|$

$(x-1)^2+5-4|x-1|$

① при $x \geq 1$, тогда модуль раскрывается как обычные скобки

$(x-1)^2+4-4(x-1)$

$x^2-2x+4-4x+4$

x^2-6x+9

$(x-3)^2$

квадрат всегда ≥ 0, значит при $x \geq 1$ числитель ≥ 0

(при $x=3$ числ. $=0$)

② при $x<1$, тогда модуль раскрывается со знаком минус.

$(x-1)^2+4-4(1-x)$

$x^2-2x+5-4+4x$

x^2+2x+1

$(x+1)^2$

квадрат всегда ≥ 0, значит при $x<1$ числитель ≥ 0

(при $x=-1$ числ $=0$)

Теперь рассмотрим знаменатель №1 (II часть)

$|x|\cdot|x-3| = |x(x-3)|$

$4x^2 - 12x + |x|\cdot|x-3|$

$4x(x-3) + |x(x-3)|$

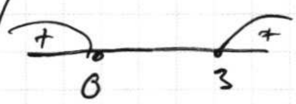
① $x(x-3) \geq 0$

т.е при $x \in (-\infty;0]\cup[3;+\infty)$

$4x(x-3) + x(x-3)$

$(4x+x)(x-3)$

$5x(x-3)$



~~больше~~ ≥ 0 при $x\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$

А у нас в этом случае x именно такой,

Значит при $x \in (-\infty;0]\cup[3;+\infty)$

знаменатель ≥ 0

($=0$ при $x=0$, $x=3$)

$x \neq 0$, $x \neq 3$ (знаменатель не может быть $=0$)

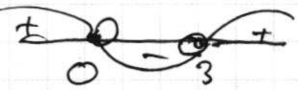
② $x(x-3) < 0$

$x \in (0;3)$

$4x(x-3) - x(x-3)$

$(4x-x)(x-3)$

$3x(x-3)$



при $x \in (0;3)$

знаменатель меньше 0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (III часть)

Значит мы получили что числитель всегда ≥ 0
А знаменатель < 0 при $x \in (0;3)$

Значит нам подходит $x \in (0,3)$ и те x при которых числ $=0$; числ $=0$ при $x = 0; 3; -1$.

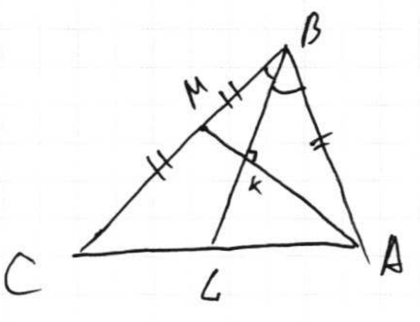
Однако $x \neq 0; 3$ иначе знаменатель $=0$, а на 0 делить нельзя.

Значит наше уравнение $=0$ при $x=-1$.

Ответ: $\{-1\} \cup (0;3)$

№2. (I часть)

Решение:



ABC - подходящий нам $\triangle$.
AM - медиана $\Rightarrow CM = MB$
BL - бис-са $\Rightarrow \angle CBL = \angle LBA$
по усл. $BL \perp MA \Rightarrow \angle BLA = 90°$
$\Rightarrow BK$ - бис и высота в $\triangle MBA$
$\Rightarrow MBA$ - р/б $\Rightarrow MB = BA$

Получается нам треугольник таков, что у него ~~он~~ есть две стороны, отличающиеся по длине в 2 раза. Пусть $BA = x$, тогда $CB = 2x$
Тогда $CA = 300 - 3x$; т.к. $CA + AB + BC = 300$ по усл.

Значит нужно найти кол-во №2 (II часть) треугольников стороны которых

| Случай, когда сумма 2х сторон равна третьей, т.е треугольник вырожденный, нам не подходит |

$x;\ 2x;\ 300-3x$ и по правилу треугольников

$$\left.\begin{array}{l|l|l} x+2x > 300-3x & 6x>300 & x>50 \\ x+300-3x > 2x & 300>4x & 75>x \\ 2x+300-3x > x & 300>2x & 150>x \end{array}\right\} \Rightarrow x \in [51;74]$$

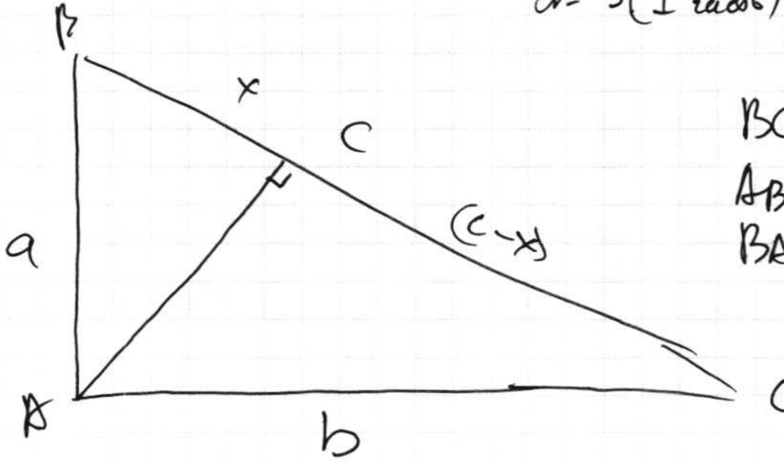
Т.к. по условию стороны должны быть целыми то и x должен быть целым.

Нам подходят x лежащие в отрезке от 51 ; до 74.

Таких x 24 ; а каждому x соответствует всего один треугольник ⇒ треугольников подходящих по условию всего 24.

Ответ: 24

№ 5 (I часть)



Найдем на какие отрезки делит высота гипотенузу.

$BC=c$ $\quad BC=x$

$AB=b$ $\quad BC-?$

$BA=a$

$AC^2 = a^2 - x^2$

$AC^2 = b^2 - (c-x)^2$

$x = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$a^2 - x^2 = b^2 - (c-x)^2$

$a^2 - \cancel{x^2} = b^2 - c^2 - \cancel{x^2} + 2cx$

$a^2 - b^2 + \underset{a^2+b^2}{c^2} = 2cx$

$x = \dfrac{a^2}{c}$ =

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

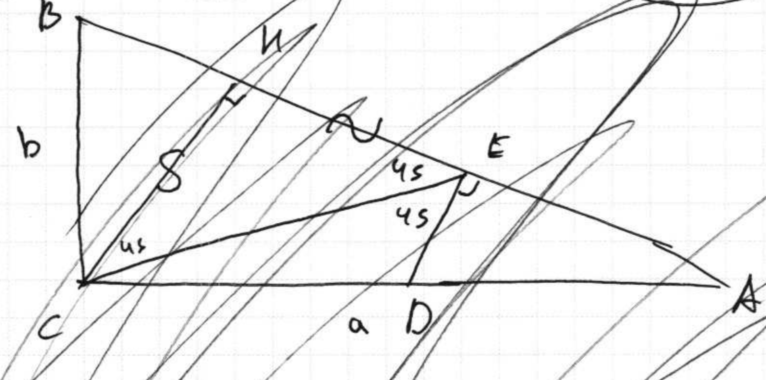
№ 5 (II часть)

Значит $AC^2 = a^2 - x^2 = a^2 - \frac{a^4}{c^2}$

$$AC = \sqrt{\frac{a^2c^2-a^4}{c^2}} = \sqrt{\frac{a^2(a^2+b^2)-a^4}{a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$$

Значит высота опущенная на гипотенузу равна $\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$

где a и b - катеты △



$a = CA = \sqrt{29}$

$b = BC = \sqrt{29} \cdot 2,5$

$CH = \sqrt{\frac{29 \cdot 29 \cdot 25:4}{29 + 29 \cdot 25:4}} =$

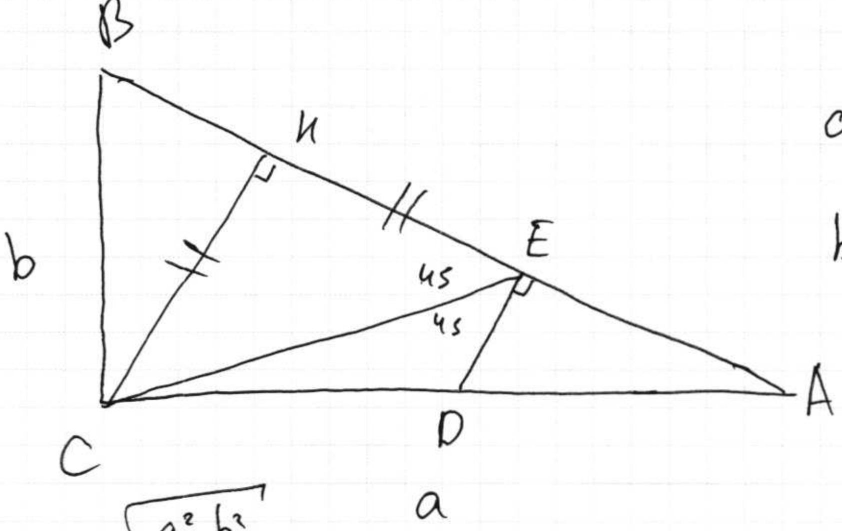
$\sqrt{\frac{29 \cdot 25}{4 + 25}} = \sqrt{\frac{29 \cdot 25}{29}} = \sqrt{\frac{29 \cdot 25}{29}} = \sqrt{25} =$ 5

Т.к $DE \perp AB$ и $\angle CED = 45°$ то $\angle HEC = 45°$

$\angle CHE = 90° \Rightarrow \angle HCE = 180 - 90 - 45 = 45 \Rightarrow CHE$ - р/б $\Rightarrow CH = CE$

ошибка в условии ♡♡♡♡♡

№5 (III часть)



$a = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$b = \sqrt{29}$

$$CH = \sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2}{a^2+b^2}}$$

$$CH = \sqrt{\frac{\frac{25\cdot 29}{4}\cdot \cancel{29}}{\frac{25\cdot\cancel{29}}{4}+\cancel{29}}} = \sqrt{\frac{25\cdot 29}{25+4}} = \sqrt{25} = 5$$

Т.к. $DE \perp BA$, то $\angle HED = 90$; т.к. $CED = 45°$ то $\angle HEC = 45°$

$\angle$ ~~CHA~~ $HCE = 180-90-45 = 45° \Rightarrow CHE$ - р/б $\triangle$

$\Rightarrow CH = HE = 5$

Найдем теперь HA

$$HA = x = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{b^2+a^2}}$$

$$HA = \frac{25\cdot 29}{4\sqrt{29+\frac{25\cdot 29}{4}}} = \frac{25\cdot 29}{4\sqrt{\frac{29\cdot 4+25\cdot 29}{4}}} = \frac{25\cdot 29}{4\sqrt{\frac{29^2}{4}}} = \frac{25\cdot 29}{\frac{29}{2}\cdot 4} =$$

$$= \frac{25}{2} = 12{,}5 \Rightarrow EA = HA - HE = 12{,}5 - 5 = 7{,}5$$

$\triangle CHA \sim \triangle DEA$ по углам $\Rightarrow \frac{EA}{HA} = \frac{DA}{CA} = \frac{7{,}5}{12{,}5} = \underline{\underline{0{,}6}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (IV часть)

$S_{\triangle DEA}$ - ?

Мы знаем что $CH = 5$

$EA = 7{,}5$

$\frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AC} = 0{,}6$ $\triangle CHA \sim \triangle DEA$ с коэф 0,6

=> ~~...~~

$$\frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{HC} = 0{,}6$$

$\frac{ED}{HC} = 0{,}6 \Rightarrow ED = 0{,}6 \cdot HC = 0{,}6 \cdot 5 = 3$

$S_{\triangle DEA} = \frac{DE \cdot EA}{2} = \frac{3 \cdot 7{,}5}{2} = 11{,}25$

DE - высота в $\triangle DEA$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = 0{,}6$; $S_{AED} = 11{,}25$.

№7 (I часть)

$f(1)=0$
$f(2)=2$
$f(3)=3$
$f(4)=f(2)+f(2)=4$
$f(5)=5$
$f(6)=f(2)+f(3)=5$
$f(7)=7$
$f(8)=f(4)+f(2)=6$
$f(9)=6$
$f(10)=7$
$f(11)=11$
$f(12)=7$
$f(13)=13$
$f(14)=9$
$f(15)=8$
$f(16)=8$
$f(17)=17$
$f(18)=8$
$f(19)=19$

$f(p\cdot 1)=\underset{p}{\underset{\shortparallel}{f(p)}}+\underset{\text{значит } 0}{f(1)}$

$f(1)=0$

ан-но:

$0=f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)=2+\underset{-2}{\underset{\shortparallel}{f\left(\frac{1}{2}\right)}}$

$0=f\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=f(n)+f\left(\frac{1}{n}\right)$

$n\in\mathbb{N}$

$f\left(\frac{1}{n}\right)=-f(n)$

А как мы поняли $f(k)>0$

если $k\in\mathbb{N}$ и $1\le k\le 19$.

Значит $f\left(\frac{1}{2}\right);\ f\left(\frac{1}{3}\right);\ f\left(\frac{1}{4}\right);\ f\left(\frac{1}{5}\right);\ldots\ f\left(\frac{1}{19}\right)<0$.

Нам нужно найти все такие $(x;y)$ $(x;y\in\mathbb{N})$ что

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ $\quad 3\le x\le 19$, $\quad 3\le y\le 19$

Минимально $\frac{x}{y}=\frac{3}{19}$; max $\frac{x}{y}=\frac{19}{3}=6\frac{1}{3}$

~~Давайте Я утверждаю что все $(x;y)$ подходят, такие что~~

~~$\frac{x}{y}\notin\mathbb{Z}$ не целое~~ ~~т.е. при $\frac{x}{y}\notin\mathbb{N}$ $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 (II часть)

Заметим, что если $\frac{x}{y} \in \mathbb{N}$ (т.е. целое), то $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0$

Значит уже какая то часть не подходит

① числ = 3

f от ...

Разберем сейчас все случаи. Будем разбирать случаи разных числителей. Чтобы нам пара подходила, т.е $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ нам нужно чтобы $f(x) < f(y)$

$\left(\cancel{\frac{3}{3}}\right); \left(\frac{3}{4}\right); \left(\frac{3}{5}\right); \left(\frac{3}{6}\right); \left(\frac{3}{7}\right); \left(\frac{3}{8}\right); \left(\frac{3}{9}\right); \left(\frac{3}{10}\right); \left(\frac{3}{11}\right); \left(\frac{3}{12}\right); \left(\frac{3}{13}\right); \left(\frac{3}{14}\right); \left(\frac{3}{15}\right); \left(\frac{3}{16}\right); \left(\frac{3}{17}\right); \left(\frac{3}{18}\right); \left(\frac{3}{19}\right)$

т.к $\frac{3}{3} = 1 \in \mathbb{N}$.

$f(1) = 0$

$$\boxed{\text{Будет } f\left(\frac{a}{b}\right) < 0, \text{ если } f(a) < f(b)}$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = f(a) + \underbrace{f\left(\frac{1}{b}\right)}_{-f(b)} = f(a) - f(b)$$

$f(3) = 3$ все остальные $f(m) > 3$ $\Rightarrow$ все эти пары $(x; y)$ подходят.

$4 \leq m \leq 19$

$y = 4, 5, 6 \dots 19$ подх

② числ. = 4. $x = 4$

$f\left(\frac{4}{3}\right) > 0$ т.е. не подх т.к. $f(4) > f(3)$ | $y = 3; 4$ не подх

$f\left(\frac{4}{4}\right) = 0$ не подх

$f(4) = 4$ Значит $f\left(\frac{4}{5}\right); f\left(\frac{4}{6}\right); f\left(\frac{4}{7}\right) \dots, f\left(\frac{4}{19}\right)$ подх

$\wedge$ 0

$y = 5, 6, 7, 8, 9, \dots 19$ подх

③ числ $(x) = 5$ $y = 3; 4, 5, 6$ не подх т.к $f(5) \geq f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$

$f(5) = 5$ Значит, $f\left(\frac{5}{7}\right); f\left(\frac{5}{8}\right) \dots f\left(\frac{5}{19}\right)$ подх $y = 7, 8, 9 \dots 19$ подх

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача № 7 (часть III)

(4) числ(x) = 6$\overline{7}$ $\quad$ y = 3, 4; 5; 6; [illegible]; [illegible] не подх (при этих y $f(x) \geq f(y)$)

$f(6) = 5$

Значит подходят y = 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

---

(5) x = 7 $\quad$ y = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, не подх (при этих y $f(x) \geq f(y)$)

$f(7) = 7$

Значит подходят y = 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.

---

(6) x = 8 $\quad$ y = 3, 4, 5, 6, 8, 9, не подх.

$f(8) = 6$

Подх: y = 7, $\underbrace{10, 11, \ldots 19}$

---

(7) x = 9 $\quad$ y = 3, 4, 5, 6, 8, 9 не подх

$f(9) = 6$

Подх: y = 7, $\underbrace{10, 11, \ldots 19}$

---

(8) x = 10 $\quad$ y = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12. не подх

$f(10) = 7$ $\quad$ Подх: y = 11, $\underbrace{13, 14 \ldots 19}$.

---

(9) x = 11 $\quad$ y = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18 не подх.

$f(11) = 11$ $\quad$ Подх: y = 13, 17, 19

---

(10) x = 12 $\quad$ ~~[illegible]~~ Ан-но x = 7

$f(12) = 7$

---

(11) x = 13 $\quad$ y = 3, 4.. 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18 не подх

$f(13) = 13$

Подх: y = 17, 19

---

(12) x = 14 $\quad$ y = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18

$f(14) = 9$

Подх: y = 11, 13, 17, 19

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 (IV часть)

(13) $x=15$ $\quad y = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18$ не подх

$f(15)=8$ $\quad y = 11, 13, 14, 17, 19$ подх

---

(14) $x=16$

$f(16)=8$ $\quad$ Ан-но с $x=15$

---

(15) $x=17$ $\quad y = 3, 4, \dots 16, 17, 18$ не подх

$f(17)=17$ $\quad y = 19$ подх

---

(16) $x=18$ $\quad$ Ан-но $x=15$

$f(18)=8$

---

(17) $x=19$ $\quad y =$ все не подх

$f(19)=19$

Осталось посчитать сколько подх (подчеркнуто желтым)

$15+1+4+2+3+11+8+11+8+8+13+13+15+16 = 128$

(Я оооочень надеюсь, что я не обсчиталась)))

Ответ: 128.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3. (I часть)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \leftarrow y=\frac{9-x^2}{2}$$

$y \geq 2x$ должно быть

т.к. $\sqrt{xy} \geq 0$

$x; y$ одного знака; т.к.

$xy \geq 0$

~~1: если $x \geq 0$ то и $y \geq 0$ (т.к. $xy \geq 0$ должно быть~~

$$\frac{9-x^2}{2}-2x=\cancel{\sqrt{xy}} = \sqrt{x\frac{9-x^2}{2}} \quad \Big| \cdot 2$$

$$(9-x^2)-4x=\sqrt{2x(9-x^2)} \quad \Big| \text{(в квадрат)}$$

$$(9-x^2)^2+16x^2-8x(9-x^2)=2x(9-x^2)$$

$$(9-x^2)(9-x^2-8x-2x)+16x^2=0$$

$$(x^2-9)(x^2+10x-9)+16x^2=0$$

$$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$$

$x=1$ подх

$2y+x^2=9$

$2y=8 \quad y=4$

$$(x-1)(x^3+11x^2+9x-81)$$

$x=1$
$y=4$
очевидно подходит

А теперь давайте поймем, что если $x=y$, то $x, y \leq 0$ (иначе $x-2x<0$ (при $x \geq 0$))

~~Пусть~~ $y=x=-a$ a ~~натуральное~~ положит.

$$\underset{a}{-a+2a}=\underset{a}{\sqrt{-a\cdot(-a)}}=ua$$

Подходит.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 12
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (II часть)

но при $x=y$ $x,y<0$

$x^2+2x-9=0$

$x=-1\pm\sqrt{1+9}=-1\pm\sqrt{10} \Rightarrow x=-1-\sqrt{10}$

$y=-1-\sqrt{10}$

Проверим, что подходят

$-2\cancel{-2\sqrt{10}}+(1+10\cancel{+2\sqrt{10}})=9$ $+$

$\cancel{-1}-\cancel{\sqrt{10}}+\cancel{2}+\cancel{2}\sqrt{10}=1+\sqrt{10}$ $+$

Заметим что у нас уже есть 2 ответа $x=1$, $y=4$ и $x=-1-\sqrt{10}$, $y=-1-\sqrt{10}$

Также заметим что каждому y соответствует ровно 1 x.

А так же заметим, что если рассматривать относительно y, то получится второй степени. $\sqrt{y}=y^{1/2}$ $2y=y^1$

Значит у нас 2 ну значит и ответа 2, а мы их нашли!

Ответ: $x=1$, $y=4$; $x=-1-\sqrt{10}$, $y=-1-\sqrt{10}$

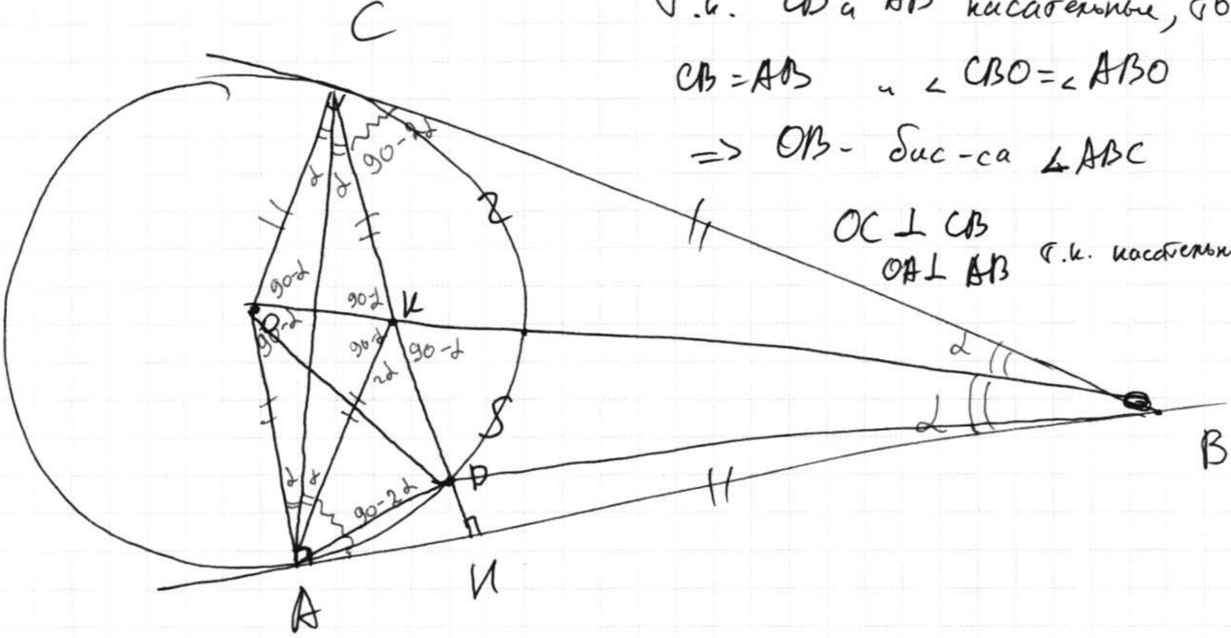
№ 4.

Т.к. CB и AB касательные, то $CB = AB$ и $\angle CBO = \angle ABO$

$\Rightarrow OB$ - бис-са $\angle ABC$

$OC \perp CB$

$OA \perp AB$ т.к. касательные



~~AB~~ =

$OA = OD = OC = R = 6$ подг.

$S_{\triangle ADB} = 15$

$S_{\triangle ADB} = \dfrac{DH \cdot AB}{2} = 15 \Rightarrow DH \cdot AB = 30$; $DH \cdot CB = 30$

$DH = \dfrac{30}{CB}$

Нам нужно найти $\dfrac{AB}{CH} = \dfrac{CB}{CH} = \dfrac{CB}{CD + DH}$

Пусть $\angle CBO = \angle OBA = \alpha$

тогда $\angle BKH = 90 - \alpha$ т.к. KH ~~высота~~ $\perp AB$

$\angle BKH = \angle CKO = 90 - \alpha$

$\angle COB = 90 - \alpha$ $(\triangle OCB)$ $\Rightarrow \triangle OCK$ - р/б

$\angle AOB = 90 - \alpha$

Ан-но $\triangle OAK$ - р/б $\Rightarrow OAKC$ - ромб

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 14

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81 \,|\, x-1$

$x^3+11x^2+9x-81$

$-\,x^4-x^3$

$11x^3-2x^2-90x+81$

$-\,11x^3-11x^2$

$9x^2-90x+81$

$-\,9x^2-9x$

$-81x+81$

$xy<0$

$x=y$

$2x+x^2=9$

$x^2+2x-9=0$

$x=-1\pm\sqrt{10}$

$-1-\sqrt{10}$

$y=$

$-(1+\sqrt{10})$

$11+2\sqrt{10}-2-2\sqrt{10}$

$-1-\sqrt{10}+2+2\sqrt{10}$

$1+\sqrt{10}$

x^2+x-

② $(x-1)^2+4-4|x-1|\le 0$

$1+2+5-8$

$x=2$

при $x=1>0$

при $x=0>0$

$10000-200+5-4\cdot 99$

$(x-1)^2+4=4|x-1|$

$x^2-2x+5=4x-4$

$x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$

$x=3$

$x^2-2x+5=4-4x$

$x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$ при $x=-1$

+ − +

−1 3

2.1

$x-1$

16 − 24

−8

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1° всегда!

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leq 0$$

$x^2-2x+5=$

$1\pm\sqrt{1-5}$

$2\pm\sqrt{4-}$

$\frac{22,5}{2}$ 11,25

$4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|$

$4x(x-3)+|x(x-3)|$

$150+75$ $22,5$ $\frac{112,5}{10}$

$\frac{3\cdot 75}{20}$ $\frac{225}{20}$

$$\frac{(x-1)^2+4-4|x-1|}{4x(x-3)+|x(x-3)|} \leq 0$$

1

$4x(x-3)+|x(x-3)| \leq 0$

0 3

if $x\geq 3$ не подх

при $x\in[0;3]$ знаменатель ≤ 0

$\boxed{x\neq 0}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81 \;|\; x-1$

$-\;x^4-x^3 \qquad\qquad x^3+11x^2+9x-81$

$11x^3-2x^2-90x+81$

$-\;11x^3-11x^2$

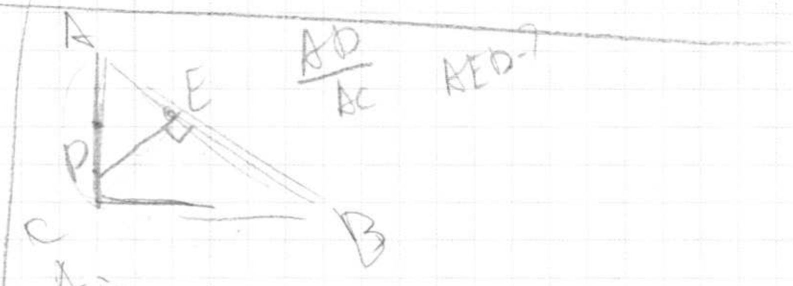
$9x^2-90x+81$

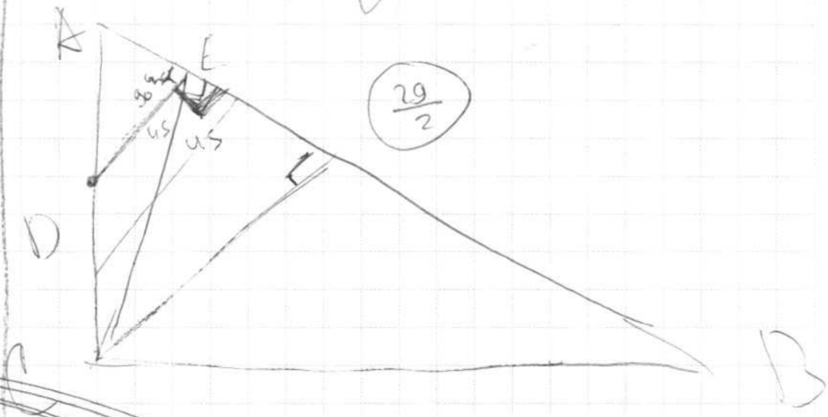
$-\;9x^2-9x$

$-81x+81$

$-\;81x+81$

0





$(x^3+11x^2+9x-81)(x-1)$

$29+\frac{25\cdot 29}{4}$

$\frac{29\cdot 4+25\cdot 29}{4}$

$\frac{29^2}{4}$

$y-2=\sqrt{y}$

$y^2+4-4y=y$

$y^2-5y+4=0$

$y=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}$ $\quad \frac{5\pm 3}{2}$

$y=4$

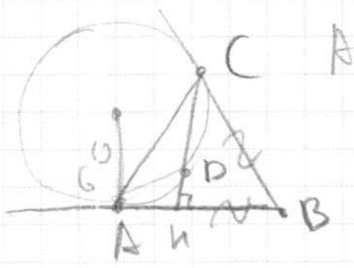
1

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

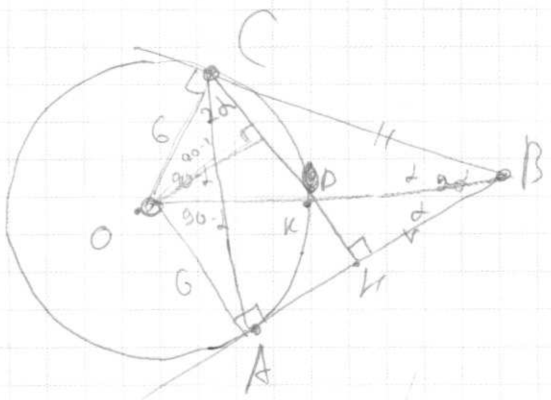
Страница №__

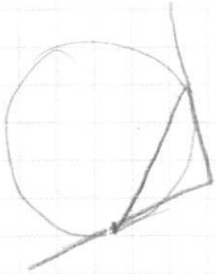
(Нумеровать только чистовики)

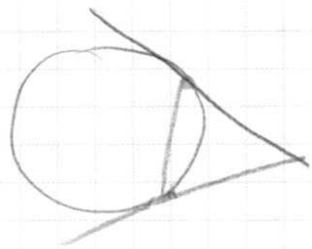


$AB \cdot CH = CB : CH$

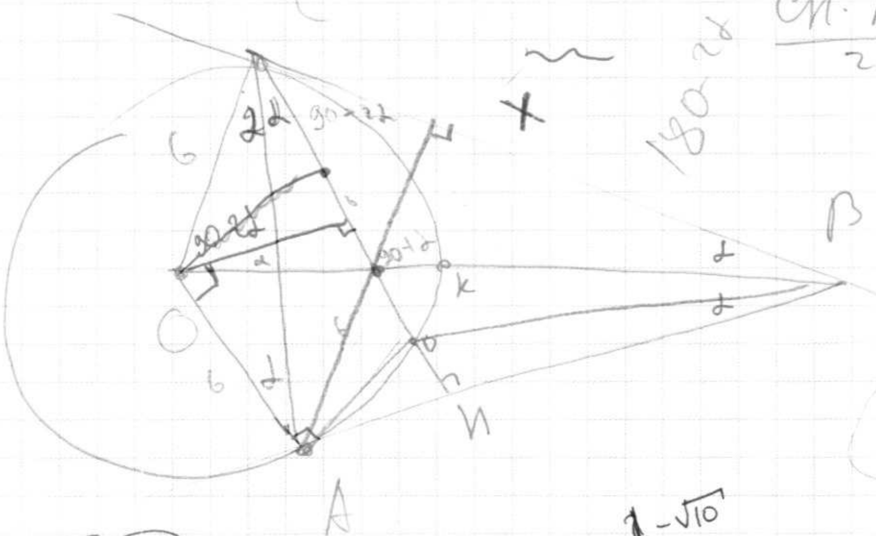
$S = 15$







$\frac{AB}{CH} = \frac{CB}{CH}$ - ?



$180 - 2\alpha - 90$

$\frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{CH \cdot CB}{2} = 15$

$CH \cdot CB = 30$

x

$\frac{CB}{CH}$ $\frac{x}{30 : x} = \frac{x^2}{30}$ $CH = \frac{30}{x}$

$\sin 2\alpha$ - ?

$1 - \sqrt{10}$

$1 - \sqrt{10}$

$\sqrt{10} + 1$

$2\sqrt{10} + 2$

$OB = \sqrt{6^2 + x^2}$

$7 - 2\sqrt{10}$

$(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$

$(x^2 - 2x - 9)^2$

$-1 + \sqrt{10} - 2\sqrt{10} + 2$

$1 - \sqrt{10}$

$DH \cdot AB = 30$ $DH \cdot CB = 30$

$CH = CD + DH$

$-1 \pm \sqrt{10}$

$\sqrt{10} - 1$

$11 - 2\sqrt{10}$

$1 \pm \sqrt{1 + 9}$

$1 \pm \sqrt{10}$

$-2 + 2\sqrt{10}$

$\sqrt{(\sqrt{10} - 1)^2}$

$\sqrt{10} - 1$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{9-x^2}{2} - 2x = \sqrt{x\cdot\frac{9-x^2}{2}}$$

$$\frac{(9-x^2)^2}{4} + 4x^2 - 2x(9-x^2) = \frac{x(9-x^2)}{2} \quad \Big|\cdot 4$$

$$(9-x^2)^2 + 16x^2 - 8x(9-x^2) = 2x(9-x^2)$$

$$(9-x^2)(9-x^2-8x-2x)+16x^2=0$$

$$(9-x^2)(-x^2-10x+9)+16x^2=0$$

$$(x^2-9)(x^2+10x-9)+16x^2=0$$

$-1+\sqrt{10}$

$-2+2\sqrt{10}+x^2=9$

$11-2\sqrt{10}$

$\sqrt{10}-1$ $1-\sqrt{10}$

$$\begin{cases} 9-2y=\sqrt{y^2} \\ 2y+y^2=9 \end{cases}$$

y

x^2+2x+9

$x=-1\pm\sqrt{1-}$

$\frac{10\sqrt{29}}{\sqrt{41}}$

$5\pm\sqrt{25+9}$

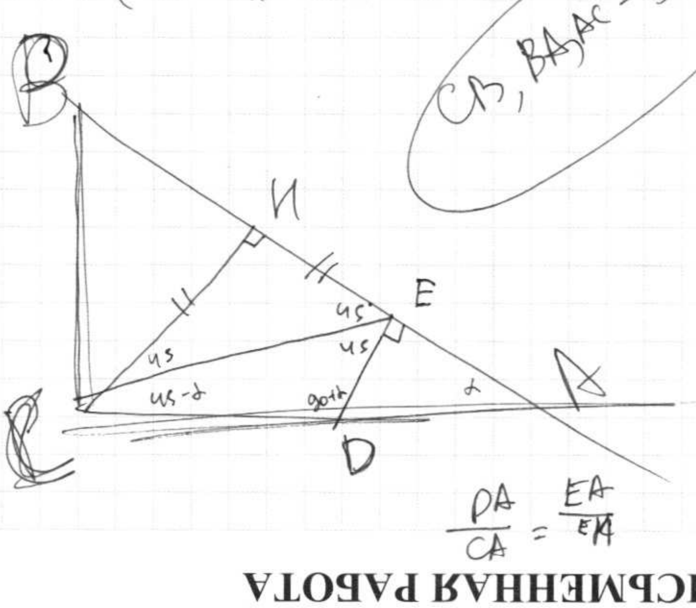
34

$5\pm\sqrt{34}$

$\sqrt{\frac{29\cdot 25\cdot 4}{41}}$

$\sqrt{\frac{29\cdot 25}{\frac{16}{4}+25}}$

CB, BA, AC – дано



$HA=\frac{AC^2}{\sqrt{AC^2+CB^2}}$

$\frac{29^2\cdot 25}{4\cdot 29+\frac{29\cdot 25}{4}}$

$\frac{DA}{CA}=\frac{EA}{EA}$ $\frac{AD}{AC}=\frac{EA}{AH}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y \cdot x \geq 0$

$y \geq 2x$

$y \geq 2xy + \sqrt{x+y}$

$9 - x^2 \geq 4x$

$\frac{9-x^2}{2} = y$

$$\frac{9-x^2}{2} - 2x = \sqrt{x \cdot \frac{9-x^2}{2}} \quad \Big| \cdot 4$$

$$2(9-x^2) - 8x = \sqrt{8x(9-x^2)}$$

$$4(9-x^2)^2 + 64x^2 - 32x(9-x^2) = 8x(9-x^2)$$

$$(9-x^2)^2 + 16x^2 - 8x(9-x^2) = 2x(9-x^2)$$

$$(9-x^2)^2 + 16x^2 - 8x(9-x^2) = 2x(9-x^2)$$

$$(9-x^2)(9-x^2-8x-2x) + 16x^2 = 0$$

$$(x^2-9)(x^2+10x-9) + 16x^2 = 0$$

$$x^4 + 10x^3 - 9x^2 - 9x^2 - 90x + 81 + 16x^2 = 0$$

$$x^4 + 10x^3 - 2x^2 - 90x + 81 = 0$$

$1 + 11 + 9 - 81 = -60$

$8 + 44 + 18 - 81 = -11$

$27 + 99 + 27 - 81 = 72$

$+$ к нечет.

$(x+a)^3 = x^3 + 3a x^2 + 3$

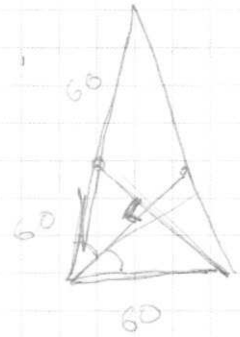
$18 + 54 =$

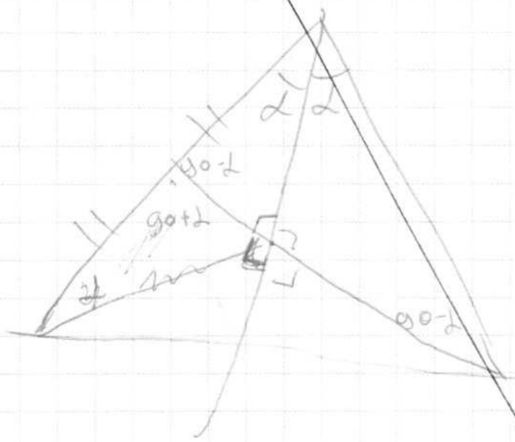
$x = 1 \quad \sim = 0$

$1 + 10 - 2 - 90 + 81 \quad 9 + 81 - 90$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



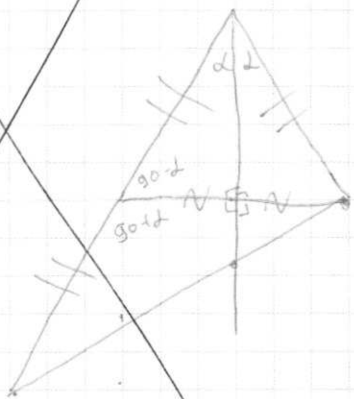


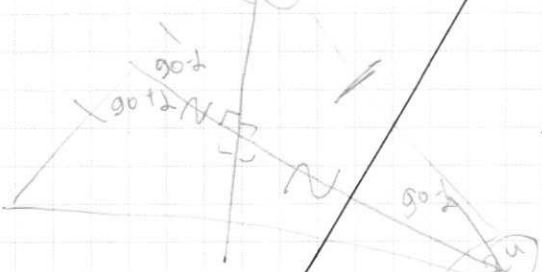
~~x+2y~~

$x+2x+y=300$

$3x+y=300$

$y=300-3x$





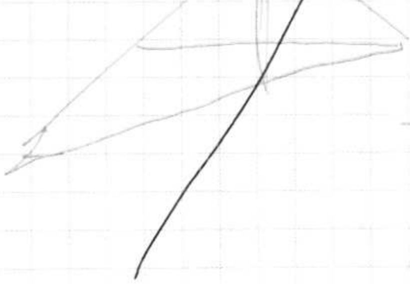
Треугольник

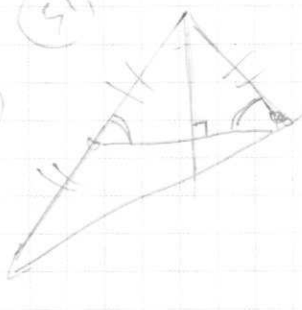
$x;2x;y$

$(51;74)$

$1;26$

26





$x;2x;300-3x$

$x\in(75;50)$

$3x \geq 300-3x$ | $x\geq 50$

$300-2x \geq 2x$ | $75\geq x$

$300-x \geq x$ | $x\leq 150$

$6x\geq 300$

$x\geq 50$

$x<150$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$(x-1)^2+4-4|x-1| \overset{?}{\leq} 0$

$-1 \pm \sqrt{10}$

$2+2\sqrt{10}$

$(x-1)^2+4-4(x-1) \leq 0$ при $x \geq 1$

$x^2-2x+5-4x+4 \leq 0$

$x^2-6x+9 \leq 0$

$(x-3)^2 \leq 0$

не бывает <0

только при $x=3$ $=0$

$(x-\sqrt{10})$

$(x-1)^2+4-4(1-x) \leq 0$ при $x \leq 1$

$\sqrt{11-2\sqrt{10}}$

$(\sqrt{10}-1)^2$

$x^2-2x+5-4+4x \leq 0$

$x^2+2x+1 \leq 0$

$(x+1)^2 \leq 0$

не бывает <0

только при $x=-1$ $=0$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$y \geq 2x$

$y=\frac{9-x^2}{2}$

$\frac{9-x^2}{2} \geq 2x$

$9-x^2 \geq 4x$

$x^2+4x-9 \leq 0$

$x=-2 \pm \sqrt{4+9}$

$-2-\sqrt{13}$ $\quad$ $-2+\sqrt{13}$

$\frac{9-x^2}{2}-2x = \sqrt{x \cdot \frac{9-x^2}{2}}$

$+2x$

$2x+9$

$1+8$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = p$

$f(2\cdot 3) = 2+3$

$f(1) = 0$

$f(2) = 2$

$f(3) = 3$

$f(4) = 4$

$f(5) = 5$

$f(6) = 5$

$f(7) = 7$

$f(8) = f(4\cdot 2) = f(4) + f(2) = 6$

$f(9) = 6$

$f(10) = 5 + 2 = 7$

$f(11) = 11$

$f(12) = 4+3 = 7$

$f(13) = 13$

$f(14) = 9$

$f(15) = 8$

$f(16) = 8$

$f(17) = 17$

$f(18) = 8$

$f(19) = 19$

$f(1,5) = 1$

$f(1,5) = 2$

$0,25 \cdot 4 = 1$

$f(1) = f(4) + f(0,25)$

$f(0,25) = -4$

$f(0,5) = -2$

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

$y = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ нод x

$x = 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = -3$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = -4$

$\frac{19}{4} = f\left(\frac{1}{5}\right) = -5$

$f\left(\frac{1}{6}\right) = -5$

$f\left(\frac{1}{19}\right) = -19$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

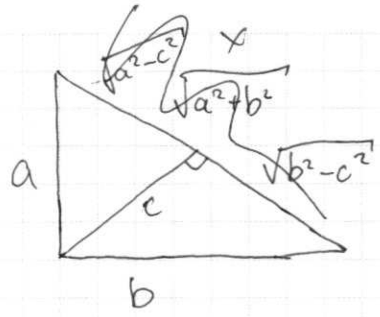
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\sqrt{a^2-x^2}$

$\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}-x)^2-b^2}$

$f\left(\frac{16}{18}\right) = f(16)\cdot f\left(\frac{1}{18}\right)$

$\sqrt{a^2-c^2} + \sqrt{b^2-c^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

$a^2-c^2+b^2-c^2 \qquad a^2+b^2$

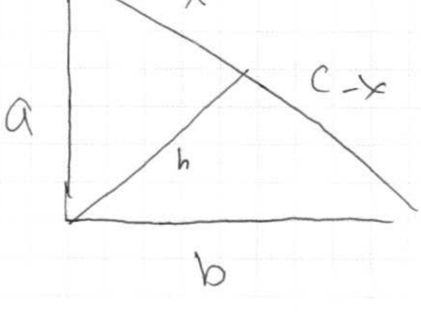
$2\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}$

$\frac{75}{125} \qquad \frac{3}{5}$

$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}-x\right)^2-b^2}$

$a^2-x^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}-x\right)^2-b^2$

$(a^2+b^2-x^2)^2 = a^2+b^2+x^2-2\left(\sqrt{a^2+b^2}-x\right)$



$h:\ a^2-x^2 = b^2-(c-x)^2$

$a^2-\cancel{x^2} = b^2-c^2-\cancel{x^2}+2cx$

$a^2+c^2-b^2 = 2cx$

$c^2 = a^2+b^2$

$2a^2 = 2cx \qquad x = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)