

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках S и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

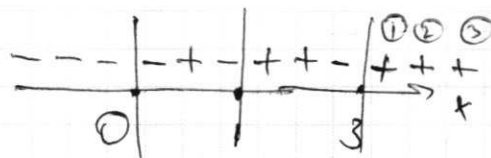
7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + 1x| \cdot |x - 3|} \geq 0$$

(1) (2) (3)



+++
 $x > 3$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \geq 0$$

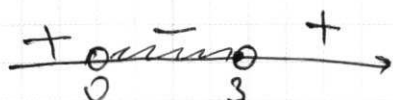
$$\frac{x^2 - 6x + 9}{5x^2 - 15x} \geq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{x-3}{5x} \geq 0$$

ОДЗ: $x \neq 3$ $x \neq 0$

$x \in (0; 3)$ → не удовл. $x \geq 3$



+-
 $3 > x \geq 1$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4x + 4}{4x^2 - 12x - x^2 + 3x} \geq 0$$

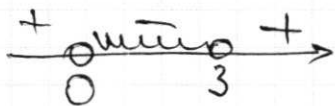
$$\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 - 9x} \geq 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \geq 0$$

ОДЗ: $x \neq 3$
 $x \neq 0$

это черновик

$$\frac{x-3}{3x} \leq 0$$



$$\underline{x \in [1; 3)}$$

- + -

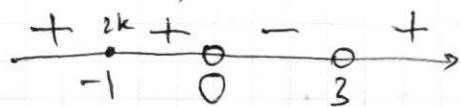
$$0 \leq x < 1$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x} \leq 0$$
$$4x^2 - 12x \rightarrow x^2 + 3x$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{3x^2 - 9x} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \leq 0$$

ODЗ: $x \neq 0$
 $x \neq 3$



$$\underline{x \in (0; 1)}$$

- - -

$$x \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 5 + 4x - 4}{4x^2 - 12x + x^2 - 3x} \leq 0$$

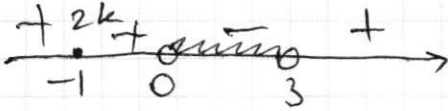
$$\frac{x^2 + 2x + 1}{5x^2 - 15x} \leq 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \leq 0$$

ODЗ: $x \neq 0$
 $x \neq 3$

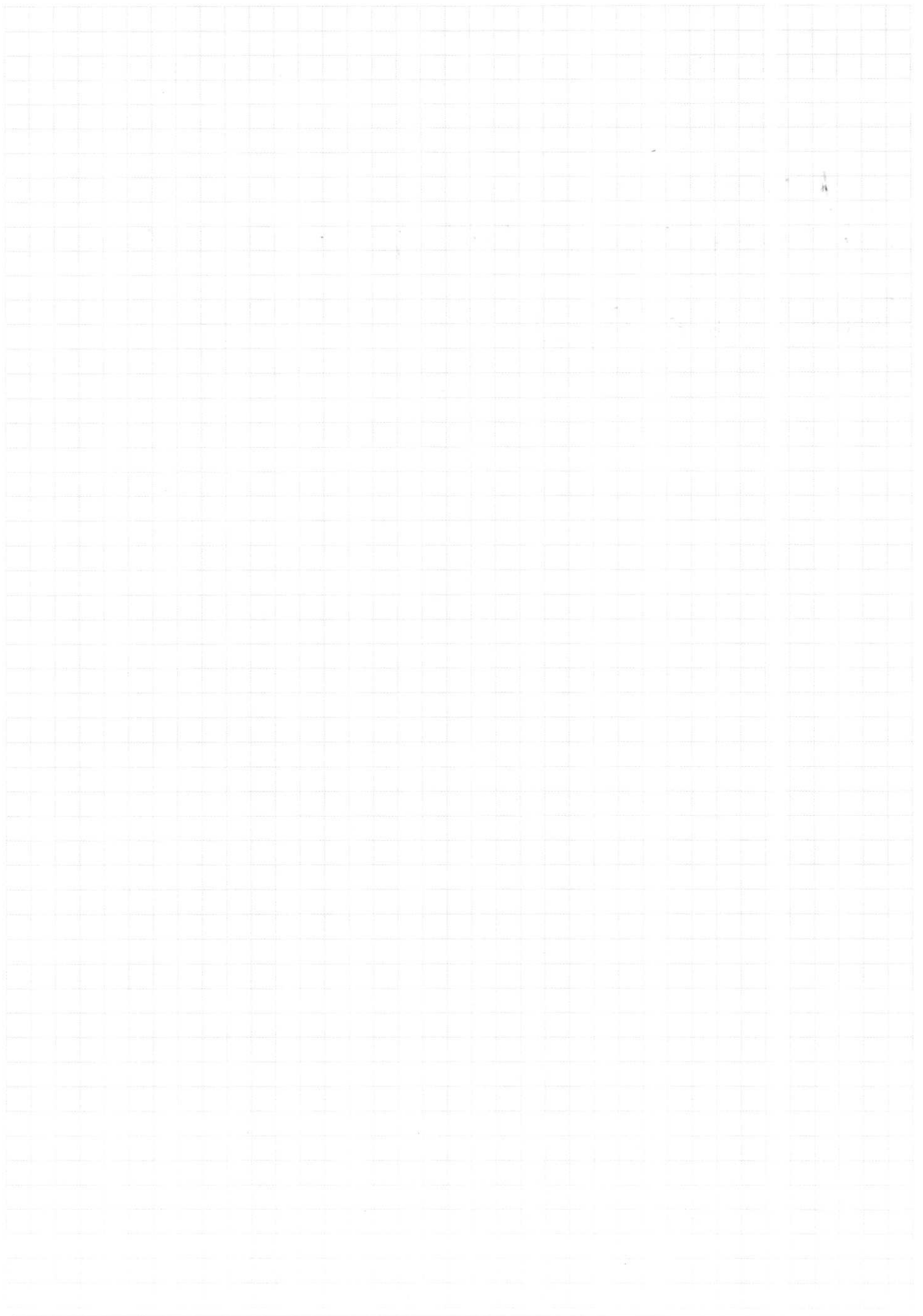
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)



$x \in (0; 3)$ уровн. ограничена

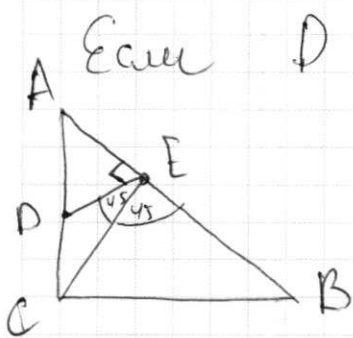
Ответ: $x \in (0; 3)$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

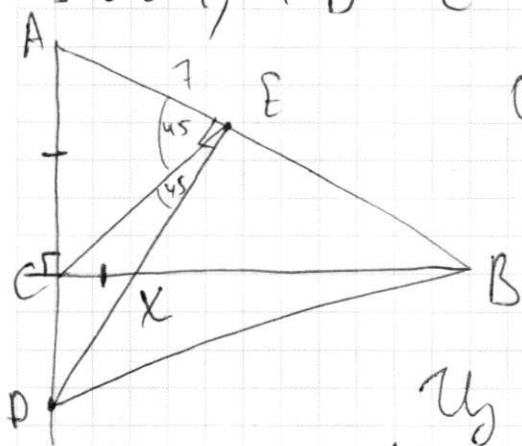
N5



Если $D \in$ отрезку AC
 Тогда $DEBC$ - вписан, т.к. $\angle DEB + \angle ACB = 180^\circ$

$\angle DEC = \angle CEB = 45^\circ \Rightarrow DC = CB$
 \Rightarrow противоречие, т.к. $AC \neq BC$

Значит, т.к. $D \in$ прямой, содержащей AC



① $\triangle AEC \sim \triangle ADB$ (как треугольники, образованные основаниями 2-х высот и вершиной треугольника)

$\angle AEC = \angle ADB = 45^\circ$ (по построению)

Уг. $\triangle DCB$, $\angle C = 90^\circ$

$\angle CDB = \angle CBD = 45^\circ \Rightarrow \triangle DCB$ - р.и.б

Взвзв $CD = BC = 2,5\sqrt{29}$

$\Rightarrow AD = CD + AC = 3,5\sqrt{29}$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{3,5\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 3,5$$

② $EXEA$ - вписан, т.к. $\angle AEX + \angle AED = 180^\circ$

т.к. $\angle AEC = \angle CEX = 45^\circ$, то $\angle AC = \angle CX$

$\Rightarrow AC = CX = \sqrt{29} \rightarrow BX = 1,5\sqrt{29}$

Уг. $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{29 + 6,25 \cdot 29} = \sqrt{29 \cdot 7,25} = \frac{29}{2} = 14,5 \text{ (по м. Пифагора)}$$

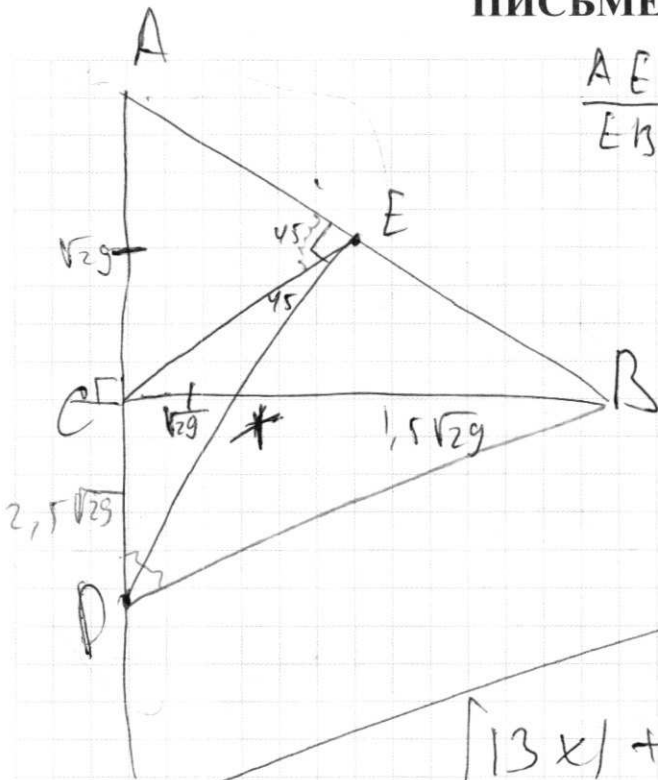
По м. Менелая и Зевиса:

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BX}{CX} \cdot \frac{CD}{AD} = 1$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{CX \cdot AD}{CD \cdot BX} = \frac{\sqrt{29} \cdot 3,5\sqrt{29}}{2,5\sqrt{29} \cdot 1,5\sqrt{29}} = \frac{3,5}{2,5 \cdot 1,5} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

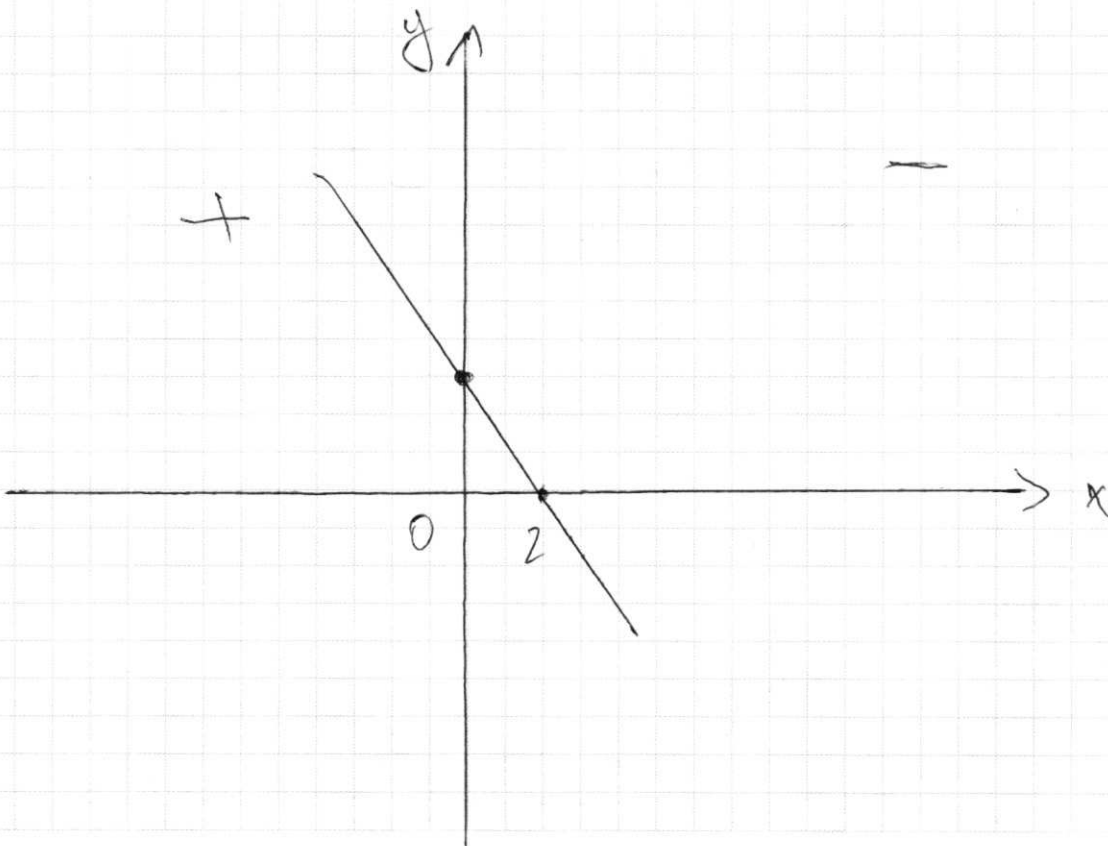
$$\frac{AE}{EB} = \frac{BK}{CK} \cdot \frac{CB}{AD} = 1$$



$$\triangle AED \sim \triangle ABC$$

$$y = \frac{3x-6}{-2} = \frac{6-3x}{2}$$

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6 \\ x^2 - 2x + y^2 - 3y \leq 0 \end{cases}$$



$$1,5^2 = 2,25$$

$$\begin{array}{r} 1,5 \\ \sqrt{\quad} \\ \underline{1,5} \\ 2,25 \\ \underline{2,25} \\ 0 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

$$= \frac{7 \cdot 0,5}{9,5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 0,5} = \frac{7}{15 \cdot 0,5} = \frac{14}{15}$$

Тогда
$$\begin{cases} \frac{AE}{EB} = \frac{14}{15} \\ AE + EB = 14,5 \end{cases} \rightarrow AE = \frac{14 EB}{15}$$

$$\frac{14 EB}{15} + EB = 14,5$$

$$29 EB = 14,5 \cdot 15$$

$$EB = \frac{14,5 \cdot 15}{29}$$

$$AE = \frac{14 \cdot 14,5 \cdot 15}{15 \cdot 29} = \frac{14 \cdot 14,5}{29} = \frac{14 \cdot 29}{2 \cdot 29} = 7$$

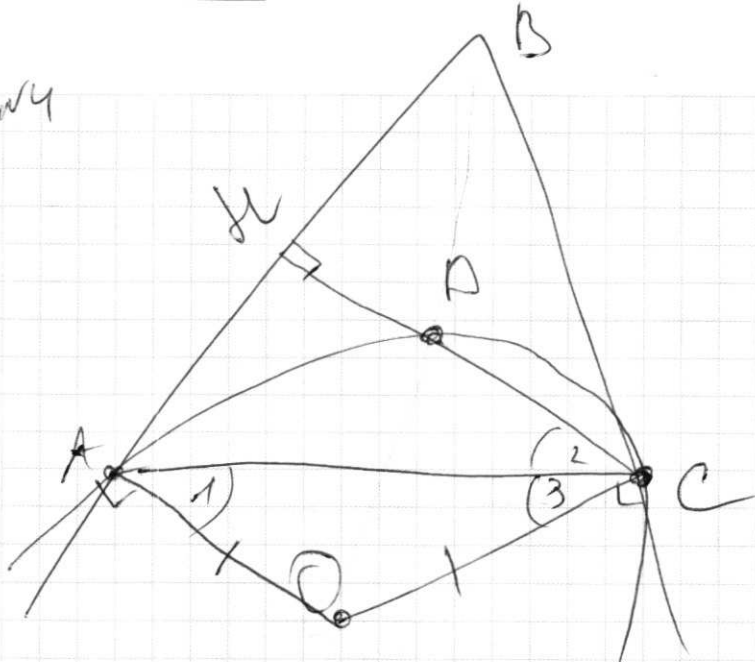
Уг $\triangle AED$, $\angle AED = 90^\circ$

$$ED = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{49 \cdot 29}{4} - 49} = \sqrt{\frac{49 \cdot 25}{4}} = \frac{7 \cdot 5}{2} = \frac{35}{2}$$

$$S_{AED} = \frac{1}{2} AE \cdot ED = \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{2} \cdot 7 = \frac{35 \cdot 7}{4} = \frac{245}{4} = 61,25$$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = 3,5$; $S_{AED} = 61,25$

нч



1) BO - биссек. $\triangle ABC$, т.к. $AO = OC$ и $AO \perp AB$ и $OC \perp BC$ (как диаметры)

2) $EM \parallel AO$, т.к. $AO \perp BA$ и $EM \perp BA$
 $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$

$\angle 1 = \angle 3$ по д.в.у. и т.к. равнобедренн $\triangle AOC$

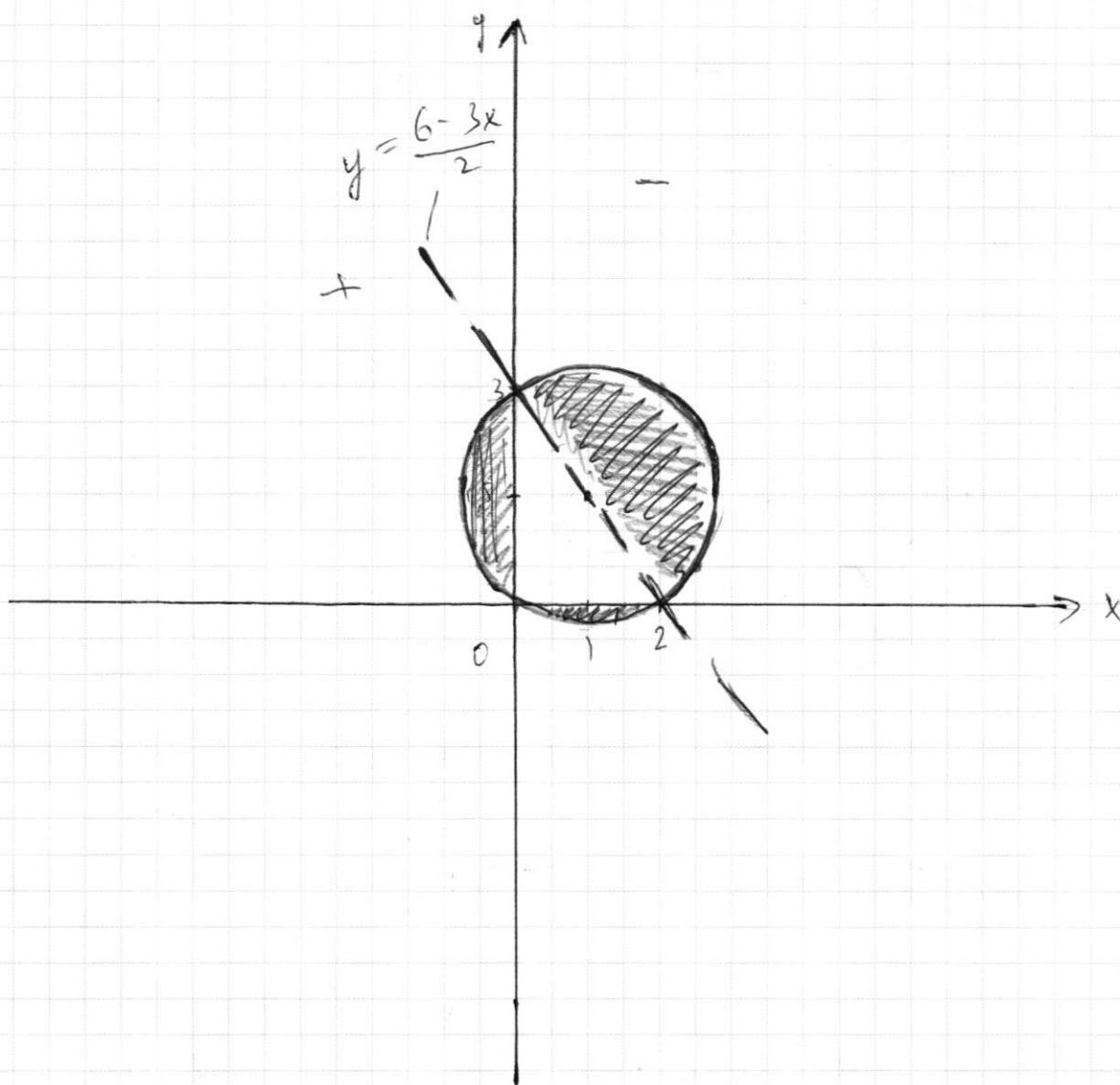
3) $\triangle ABC$ - р.б. (т.к. $\angle BAC = \angle BCA$)

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6 \\ x^2 - 2x + y^2 - 3y \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 3y \leq 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1,5)^2 \leq 3,25$$

Окр. с центром в $(1; 1,5)$ и радиусом $\sqrt{3,25}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (продолжение)

$$\textcircled{1} \quad x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad 6 - 3x - 2y \geq 0$$

$$3x + 2y + 6 - 3x - 2y > 6$$

$$6 > 6 \quad (\text{неверно})$$

$$\textcircled{2} \quad x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad 6 - 3x - 2y \leq 0$$

$$3x + 2y + 2y + 3x = 6 > 6$$

$$6x + 4y > 12$$

$$3x + 2y > 6$$

$$y = \frac{6 - 3x}{2}$$

$$\textcircled{3} \quad x \leq 0 \quad y \geq 0 \quad 6 - 3x - 2y \geq 0$$

$$-3x + 2y + 6 - 3x - 2y > 6$$

$$-6x > 0$$

$$x < 0$$

$$\textcircled{4} \quad x \geq 0 \quad y \leq 0 \quad 6 - 3x - 2y \geq 0$$

$$3x - 2y + 6 - 3x - 2y > 6$$

$$-4y > 0$$

$$y < 0$$

$$\text{Сритура} = 3,25\pi - \frac{3 \cdot 2}{2} = 3,25\pi - 3$$

$$\text{Ответ: } 3,25\pi - 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$y - 2x = \sqrt{xy} \quad |^2$$

ОДЗ: $y - 2x \geq 0$

$$xy = y^2 + 4x^2 - 4xy$$

$$y^2 + 4x^2 - 5xy = 0$$

$$(y - 2,5x)^2 - 2,25x^2 = 0$$

$$(y - 4x)(y - x) = 0$$

$$y = 4x$$

или

$$y = x$$

$$x^2 + 2y - 9 = 0$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x_1 = 1; x_2 = -9$$

(по формулам
Виета)

Если $x = 1$, то $y = 4$

Если $x = -9$, то $y = -36$
(не удовлет. ОДЗ)

$$x^2 + 2y - 9 = 0$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

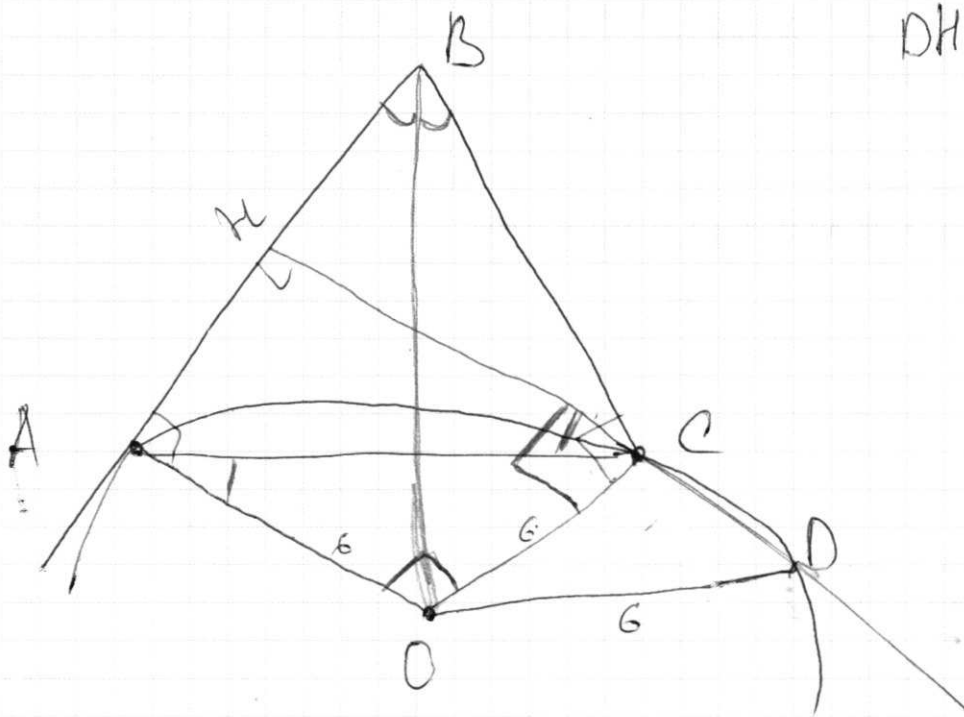
$$D = 4 + 36 = 40$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$$

$(-1 + \sqrt{10}; -1 + \sqrt{10})$ не удовлет.
ОДЗ

$(-1 - \sqrt{10}; -1 - \sqrt{10})$ удовлетворяет

Ответ: $(1, 4); (-1 - \sqrt{10}, -1 - \sqrt{10})$



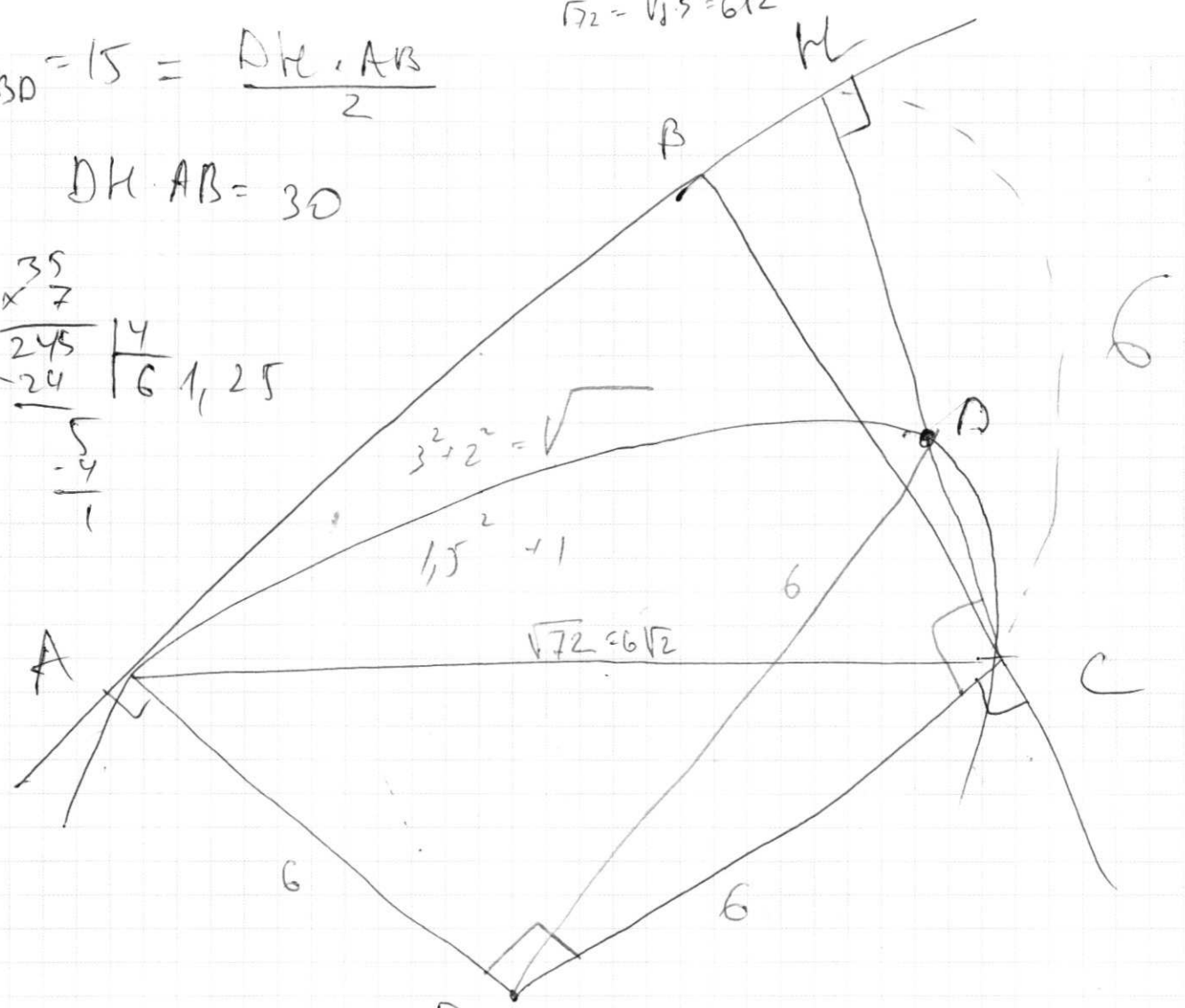
$$DH \cdot AB = 30$$

$$\sqrt{72} = \sqrt{9 \cdot 8} = 6\sqrt{2}$$

$$S_{ABD} = 15 = \frac{DH \cdot AB}{2}$$

$$DH \cdot AB = 30$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 7 \\ \hline 245 \\ -24 \\ \hline 5 \\ -4 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 4 \\ 6 \end{array} \quad 1,25$$



$$\frac{AD}{AC} ; S_{AED}$$

$$AC = \sqrt{29}$$

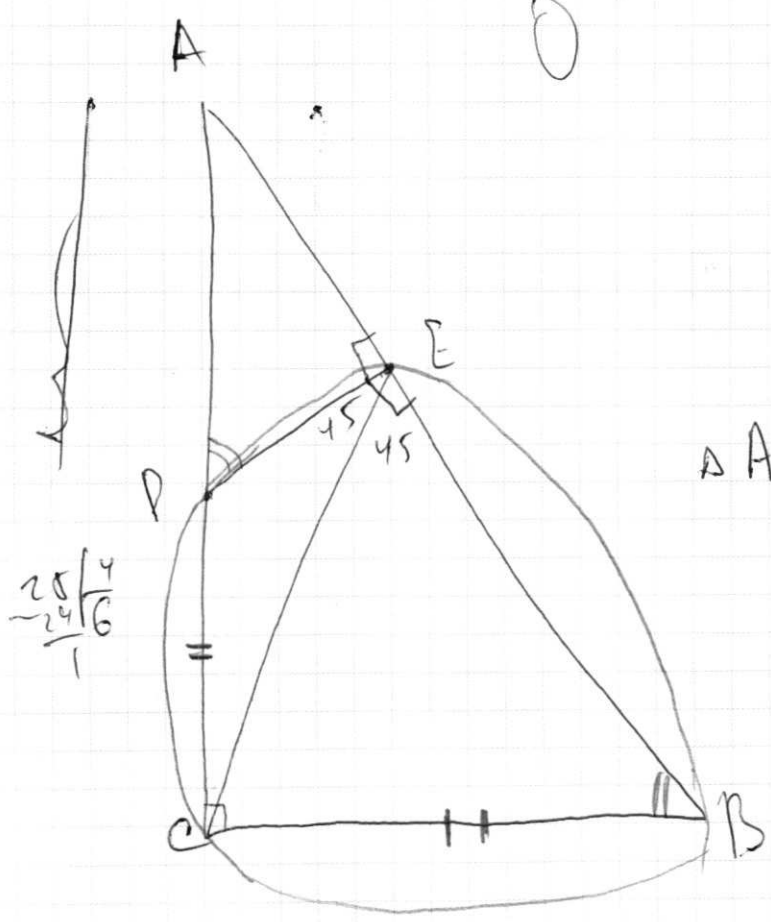
$$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2} \quad 29 \frac{4}{7}$$

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\text{Значит } AD = \frac{5\sqrt{29}}{2}$$

$$S_{AED} = \frac{1}{2} AD \cdot AE = \frac{25 \cdot 29 + 4 \cdot 29}{4} = \frac{29 \cdot 29}{4}$$



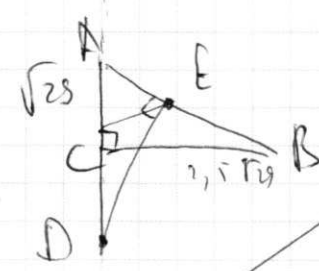
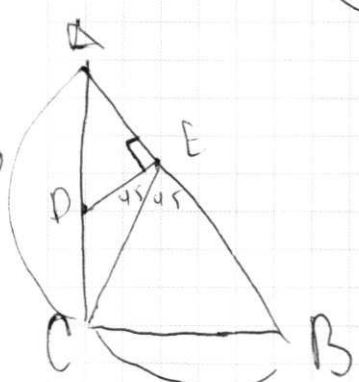
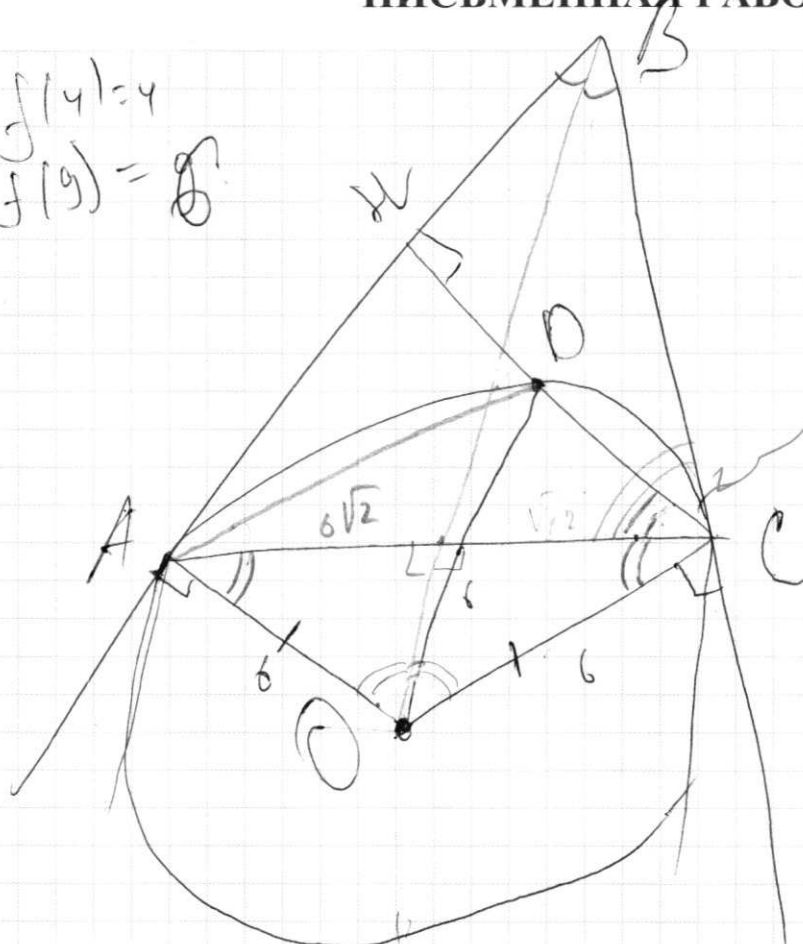
$$\begin{array}{r} 25 \frac{4}{7} \\ -24 \frac{6}{7} \\ \hline 1 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

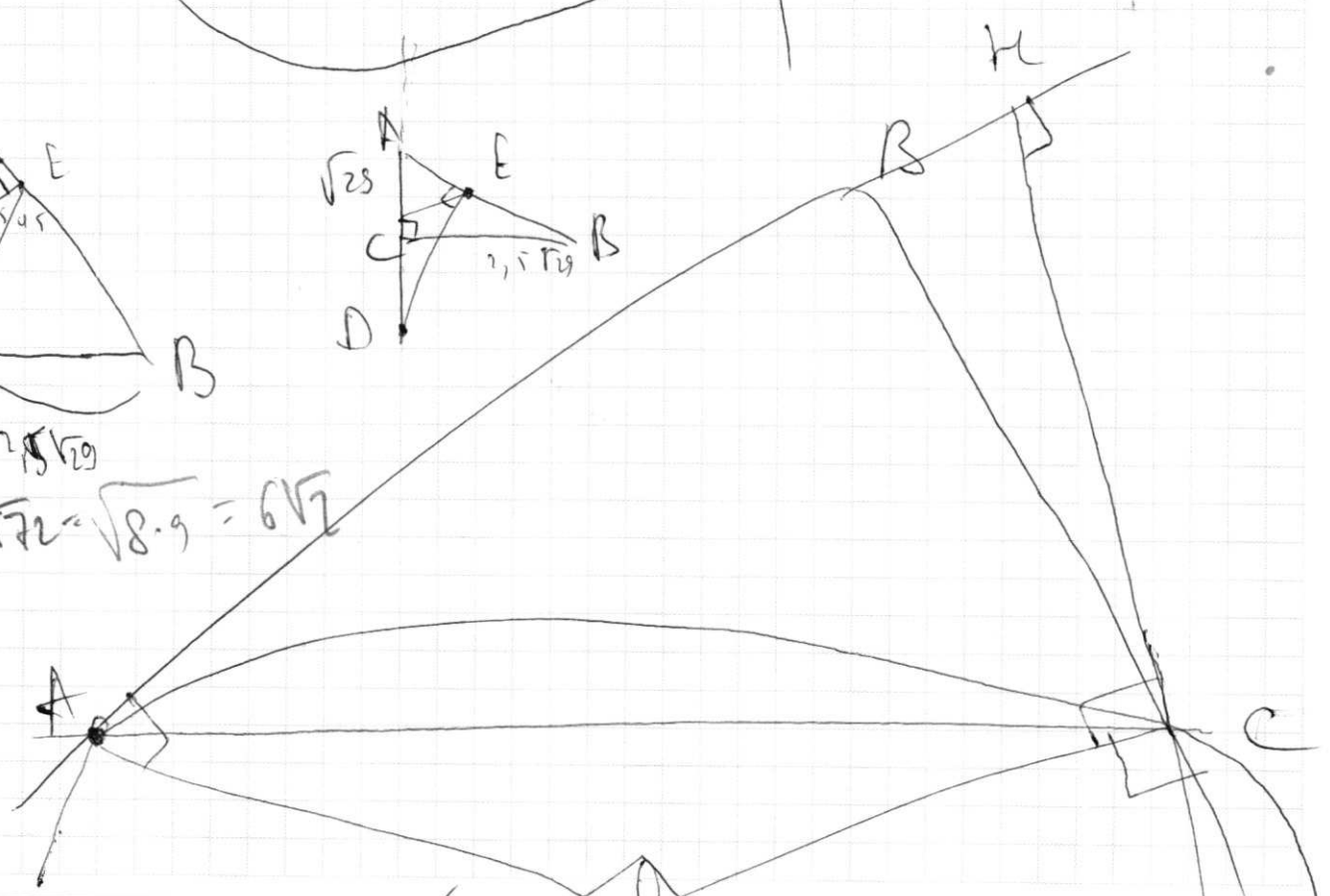
$f(4) = 4$
 $f(9) = 8$

$AB \cdot \sin C = 30$

симметрия в плоскости



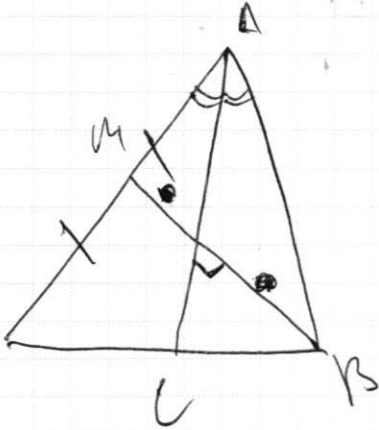
$2 \cdot 6 \cdot \sqrt{29}$
 $\sqrt{72} = \sqrt{8 \cdot 9} = 6\sqrt{2}$



черновик чистовик
 (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$P=300$



$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \times 2,5 \\ \hline 12,5 \\ 50 \\ \hline 6,25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1,5 \\ \times 1,5 \\ \hline 7,5 \\ 15 \\ \hline 2,25 \end{array}$$

NS

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \times 2,5 \\ \hline 6,25 \end{array}$$

$$y - 2x = \sqrt{xy} \quad |^2$$

ОДЗ: $y - 2x \geq 0$

$$xy = y^2 + 4x^2 - 4xy$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$(y - 2,5x)^2 - 2,25x^2 = 0$$

~~Решение~~

$$(y - 4x)(y - x) = 0$$

$$y = 4x \quad y = x$$

$$-2 - 2\sqrt{10}$$

$$1 + 10 + 2\sqrt{10}$$

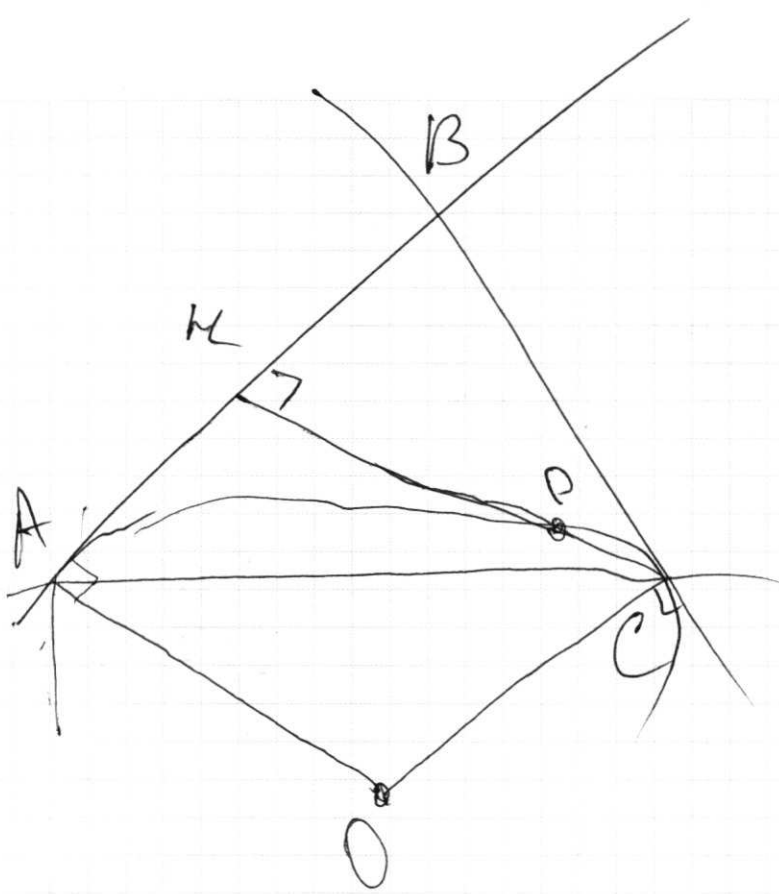
$$2y + x^2 = 9$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -9$$

$$y = 4 \quad y = -36 \text{ (отбрасываем)}$$

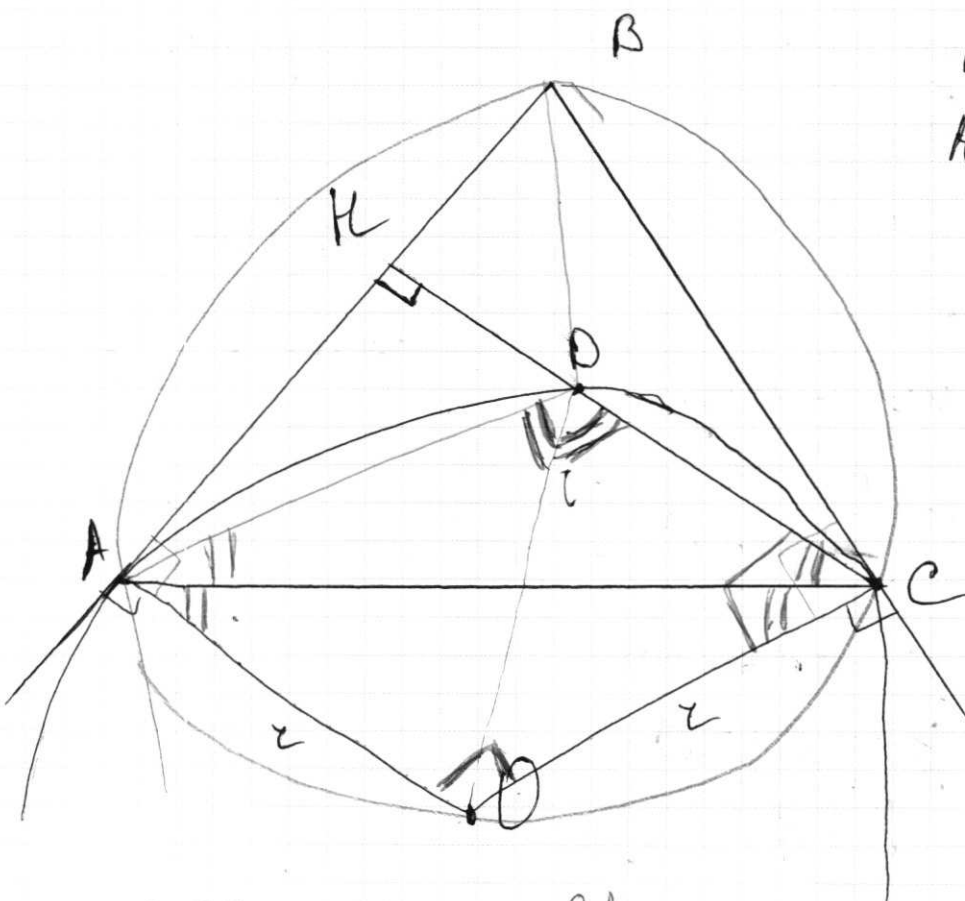
$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 9 &= 0 \\ D &= 4 + 36 = 40 \\ x_{1,2} &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \\ &= -1 \pm \sqrt{10} \\ x &= -1 - \sqrt{10} \end{aligned}$$



$$\angle = 6$$

$$S_{ABP} = 15$$

$$\frac{AB}{CH} = ?$$



$$AO \parallel CH$$

$$AOCB - \text{вписан}$$

$$DH \cdot AB = 30$$

$$\begin{aligned} \parallel &= \frac{180}{4} = \\ &= 45 \end{aligned}$$

~~AO совн.~~ CH совпадает с BC

$$CH - AO = \angle = 6$$

$$AB = 30$$