МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| > 6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 2 3 4 5 6 7

$y - 2x = \sqrt{xy} \rightarrow xy \geq 0$

$2y + x^2 = 9$

$2y = (3-x)(3+x)$

$y = \frac{(3-x)(3+x)}{2}$

$(3-x)(3+x) =$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$

$8y + 4x^2 = 36$

$y^2 - 5xy +$

$36 - 8y$

$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$ $D = 25x^2 - 16x^2 = 9x^2 \geq 0$

150

$\frac{(3-x)^2(3+x)^2}{4} - 5x\left(\frac{(3-x)(3+x)}{2}\right) + 4x^2 = 0$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$y^2 - 18x - x^4$

$x_1 = \frac{-8+10}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-18}{2} = -9$

$\frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2}$

$4u - 36$

$y_1 = \frac{5x+3x}{2} = 4x \rightarrow -36$

x $y_2 = \frac{5x-3x}{2} = x$

$3x + 3n$

$3(x+n)$

$n = 3(100 - x)$

$3x + n = 300$

$3x > n$

$n > x$

$x + n = 100$

$3x > 3n$

$2x + 3n > x$

$4x^2 - 4x^2 - 8x^2$

$3x + n > 2n$

$n < 150$

$3x > 300 - 3x$

$75 > x$

$300 - 3x > x$

$6x > 300$

$300 - 4x$

$x > 50$

$x < 75$

$f(x) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3)$

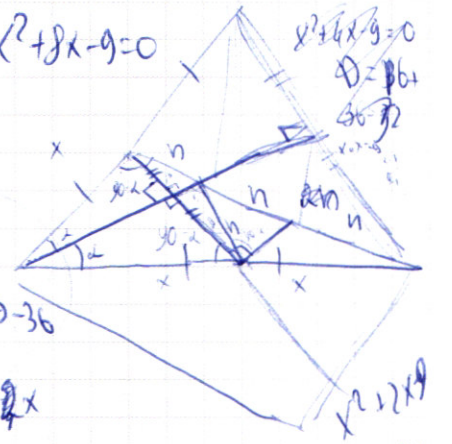
$8x + x^2 = 9$ $D = 64 + 36 = 100$

$4x + x^2 = 9$

$x^2 + 8x - 9 = 0$

$x^2 + 4x - 9 = 0$

$D = 16 + 36 = 52$

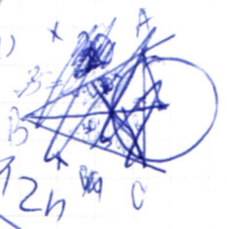


$x^2 + 2x + 9$

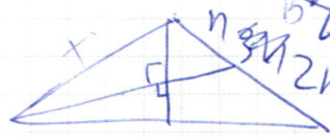
$D = 4 + 36 = 40$

$x - 2x = -8$ $y = -36 + 18$

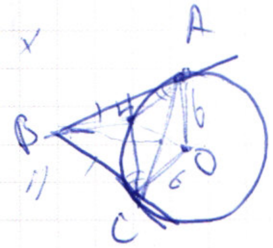
$y > n$



$3x + n = 2n$



x $7x$ x



$f(p) = f(10) \cdot f(p)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(1 \cdot 1) = f(1)$

$f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$h =$

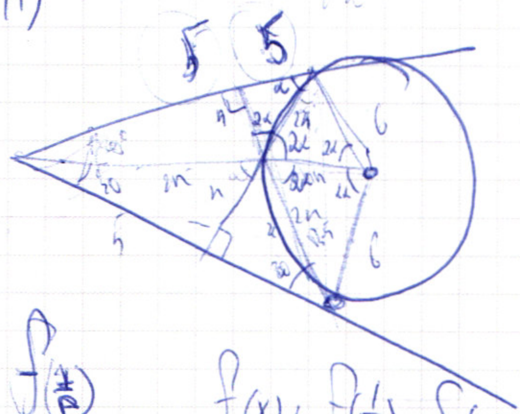
$\alpha = 30°$

$25 + x^2 = 100$

$x^2 = \sqrt{75}$

$x = 5\sqrt{3}$

$f(0) = 0$



$25 + h^2 = 6h^2$

$h = \sqrt{\frac{25}{3}}$

$\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$\frac{5 \cdot 2}{5 \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$f(1) = f(0)$

$f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1)$

$f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$

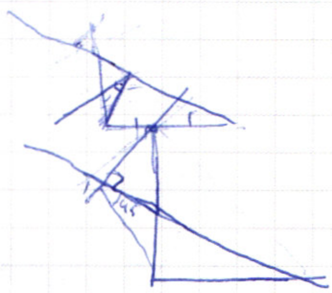
N4

2 3 4 5 6 7 8 9 10
3 4 5 8 7 15 14 12 11
6 9 10 16
18

$f\left(\frac{1}{p}\right)$

13

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$



N	Реш.	Запис.	Порядок	Тема
1	✓	✓	4	≤
2	✓	✓	2	{ △
3	✓	✓	1	{
4	✓		6	△○
5	✓	✓	3	△
6				{≤
7	✓	✓	5	f(?)

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

f(3) f(4) f(5) f(7)
f(6)

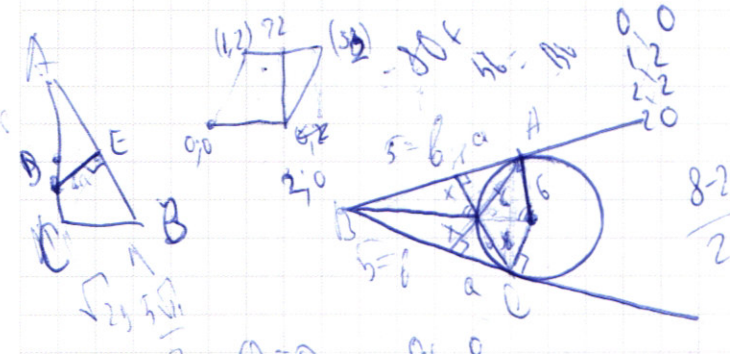
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



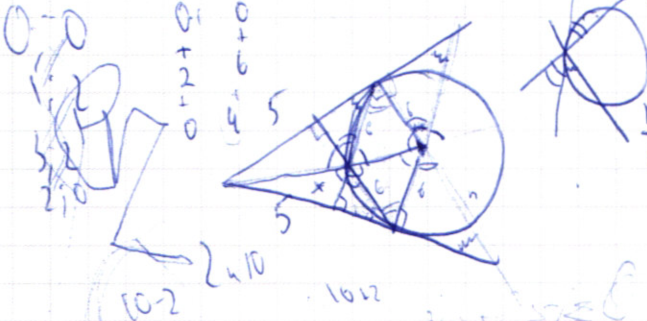
$\frac{b}{a+b} = \frac{x}{6}$

$30 = b\cdot 6 \Rightarrow b = 5$

$\frac{8\cdot 2}{2} \cdot \frac{3x\cdot(a+b)}{b} = 30$

$x^2 - 2x + 5 - 4(x-1)$

при $x \geq 1$



$x = \frac{30}{a+b}$

$\frac{h}{6} = \frac{h+6}{x+6}$

$x^2 - 2x + 5$

$\frac{2CD}{\frac{29}{2}} = \frac{CE}{\sqrt{29}} = \frac{DE}{\frac{\sqrt{29}}{2}}$

$hx + 6h = 6h + 36$

$hx = 36$

$h\left(\frac{a+5}{30}\right) = 36$

$ha + 5h = 1080$

$\frac{CD}{CB} = \frac{CE}{CA}$

$\cancel{x^2+5} > 2x$

$x^2 - 2x + 5 - 4x + 4$

$x^2 - 2x + 5 + 4x - 4$

$4x^2 - 12x + x|(x-3)| < 0$

при $x \leq 0$:

$4x^2 - 12x + x(x-3)$

$5x^2 - 12x - 3x =$

$5x^2 - 15x < 0$

$\underbrace{5(x)(x-3)}_{0} > 0$

$\cancel{x^2 - 3x < 0}$

$x(x-3) < 0$

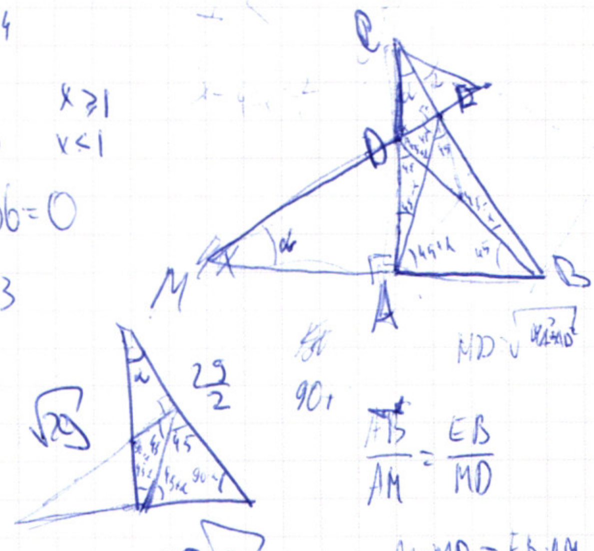
корни $\left[\begin{array}{ll} x^2 + 2x + 1 = 0 & x \geq 1 \\ x^2 - 6x + 9 = 0 & x < 1 \end{array}\right.$

$D = 36 - 36 = 0$

$x_1 = \frac{6}{2} = 3$

$= 0$ при $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 0 \end{array}\right.$

< 0



$\sqrt{29}$

$\frac{29}{2}$

$\frac{AB}{AM} = \frac{EB}{MD}$

$AB \cdot MD = EB \cdot AM$

$\frac{2{,}5}{2}\sqrt{29}$

$29 + \frac{25}{4} \cdot 29 =$

$29(1 + 6{,}25) = 29 \cdot 7\frac{1}{4} = \frac{29}{4}$

при $x > 0$ и $x < 3$:

$4x^2 - 12x - x^2 + 3x$

$3x^2 - 9x = 3(x-3)x < 0$

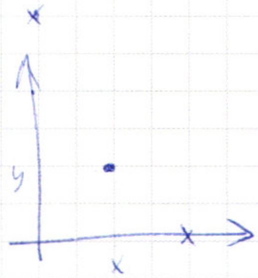
$2x + x^2 = 9$ $\quad x(x+1) = 9$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$x^2-2x-y(3-y)=0$

$D=4+4y(3-y)=4(1+3y-y^2)$

$4(1+y(3-y))$

$x(x-2)+y(y-3)$

$x_1=\frac{2\pm2\sqrt{\ }}{2}$

$x(x-2)-y(3-y)$

$1\pm\sqrt{1+y(3-y)}$

$x^2-2x-3y+y^2\le0$

$1+3y-y^2$

$-y$ $D=9+4=13$

$\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

$\left(y-\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\right)$

$\left(y-\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)$

x^2-

$2x+3y-x^2-y^2\ge0$

$3x+2y+(6-3x-2y)$ >0

$3(x+y)+2(x+y)+6-3x-2y$

$(3+2)(x+y)+x^2-3x+y^2-2y\ge0$

$5(x+y)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

10) $AB:CH=\frac{BA}{\frac{\sqrt{3}BA}{2}}=\frac{2BA}{\sqrt{3}BA}=\frac{2}{\sqrt{3}}=2:\sqrt{3}$

Ответ: $AB:CH=2:\sqrt{3}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

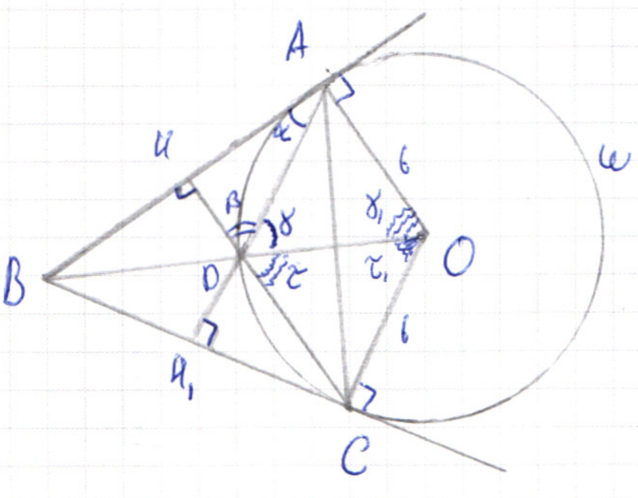
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left.\begin{array}{l} f(5)=f(6)=5 \\ f(8)=f(9)=6 \\ f(15)=f(16)=8 \\ f(16)=f(18)=8 \\ f(15)=f(18)=8 \end{array}\right\}$$ их всего 5

Значит кол-во подходящих нам пар: $136-5=131$

Ответ: ~~8~~ 131.

№4



Дано: BA и BC - касательные к окружности ω.

CH - высота $\triangle ABC$

$AO=6$

$S_{BDA}=15$

Найти: $AB:CH$

Решение: 1) нашу картинку можно считать симметричной относительно BO (если мы проведем высоту AH_1) т.к. с одной стороны от BO тоже самое, что и с другой.

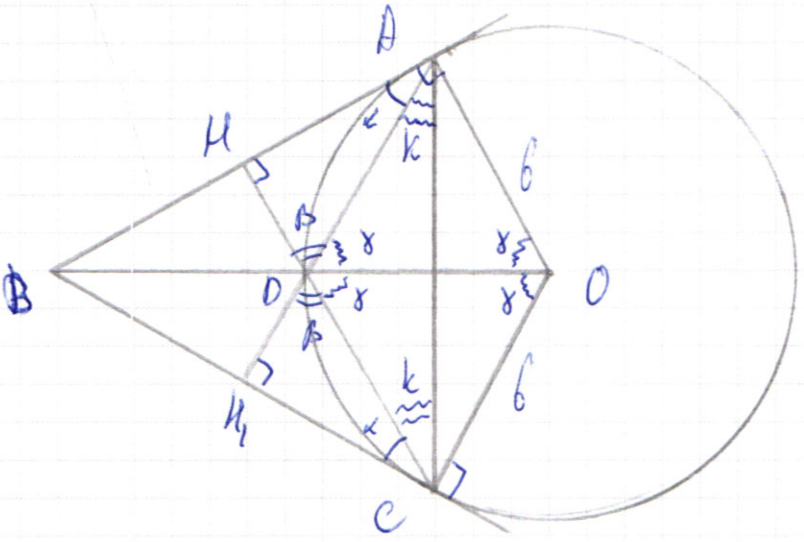
2) ~~Т.к.~~ $AO\perp BA$ и $OC\perp CB \Rightarrow AO\parallel HC$ и $AH_1\parallel OC \Rightarrow AOCD$ - параллелограмм

3) $\begin{cases} AO=OC=6 \\ AOCD\text{-параллелограмм} \end{cases} \Rightarrow AOCD$ - ромб $\Rightarrow \gamma=\tau$; $\gamma=\gamma_1$; $\tau_1=\tau$

3) Из симметрии картинки (1) => $\angle H_1CB = \cancel{\ldots} \angle HAD = \alpha$

4)
из $\triangle HAD$ => $\alpha + 90 = \cancel{\ldots}\ \gamma + \gamma = 2\cdot\gamma$

5)
Перерисуем картинку с новыми обозначениями углов:



6)
$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \tfrac{1}{2}\,\overset{\frown}{DC}\\ \gamma &= \overset{\frown}{DC}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \gamma = 2\alpha$$

7)
$\alpha + 90^\circ = 2\gamma = 4\alpha$

$90^\circ = 3\alpha \Rightarrow \underline{\alpha = 30^\circ} \Rightarrow \underline{\gamma = 60^\circ} \Rightarrow 2\gamma = 120^\circ \Rightarrow 2k = 60^\circ$

$\Downarrow$

$\underline{k = 30^\circ}$

8)
$\angle BAC = 60^\circ = \angle BCA \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle BAC$ — равнобедренный

9)
тогда: по теореме Пифагора для $\triangle BHC$ — $BH^2 + HC^2 = BC^2$

$\Downarrow$

$HC = \sqrt{BC^2 - BH^2}$ $\left(BH = \frac{1}{2}BC\right)$

$HC = \sqrt{\frac{3}{4}BC^2}$

$HC = \frac{\sqrt{3}BC}{2} = \frac{\sqrt{3}\cdot BA}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $x>3$:

$x>0$ и $x-3>0$ и $x-1>0$

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x^2-3x}=\frac{x^2-6x+9}{5x^2-15x}=\frac{(x-3)^2}{\underbrace{5x(x-3)}_{>0}}>0 \Rightarrow \frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}>0$$

при $x=0$ или $x=3$:

$x=0$: $4x^2-12x+|x||x-3|=0+0+0=0$

$x=3$: $4x^2-12x+|x||x-3|=36-36=0$

не знаменатель $\neq 0$

Значит $\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x||x-3|}\leq 0$ при $x=-1$; $3>x>0$

Ответ: ~~x=-1 или~~ $3>x>0$ или $x=-1$

№7

1) $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

2)

$0=f(1)=f\left(\frac{k}{k}\right)=f(k)+f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f(k)=-f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f\left(\frac{1}{k}\right)=-f(k)$

3) Рассмотрим $f(x/y)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y) \Rightarrow f(x/y)<0$ тогда и только тогда когда $f(x)<f(y)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

4) посчитаем $f(n)$ для каждого натурального от 3 до 19:

$f(3)=3$

$f(4)=f(2)+f(2)=2+2=4$

$f(5)=5$

$f(6)=f(2)+f(3)=5$

$f(7)=7$

$f(8)=f(2)+f(2)+f(2)=6$

$f(9)=f(3)+f(3)=6$

$f(10)=f(5)+f(2)=7$

$f(11)=11$

$f(12)=f(2)+f(2)+f(3)+f(3)=4+6=10$

$f(13)=13$

$f(14)=f(2)+f(7)=9$

$f(15)=f(3)+f(5)=8$

$f(16)=f(2)\cdot 4=2\cdot 4=8$

$f(17)=17$

$f(18)=f(2)+f(9)=2+6=8$

$f(19)=19$

~~расположим~~ тогда если мы возьмем любую пару x и y таких, что $f(x)\neq f(y)$ то нам подойдет или $(x;y)$ или $(y;x)$. всего пар x и y (разные ведь если взять n и n то $f(n)=f(n)$):

$\frac{17\cdot 16}{2}=136$

но пары x и y где $f(x)=f(y)$:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\triangle AED \sim \triangle ACB$ $\left(\begin{array}{l} \angle AED = \angle ACD = 90^\circ \\ \angle CAB = \angle DAE = \alpha \end{array} \right)$

Значит: $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{ED}{CB}$

$\frac{AE}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = \frac{AD}{\frac{29}{2}} = \frac{ED}{\sqrt{29}}$ $\Big| :2$

$\frac{AE}{5\sqrt{29}} = \frac{AD}{29} = \frac{ED}{2\sqrt{29}}$

6) $AD = AC - CD = AC - CB = \frac{5}{2}\sqrt{29} - \sqrt{29} = 1{,}5\sqrt{29}$

7) $AD : AC = \left(\frac{3}{2}\sqrt{29}\right) : \left(\frac{5}{2}\sqrt{29}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = 3:5$

8) $ED = \frac{AD}{29} \cdot 2 \cdot \sqrt{29} = \frac{2AD}{\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 3$

$AE = \frac{AD}{29} \cdot 5\sqrt{29} = \frac{5AD}{\sqrt{29}} = \frac{7{,}5\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 7{,}5$

9) $S_{AED} = (ED \cdot AE) : 2 = \frac{3 \cdot 7{,}5}{2} = \frac{45}{4} = 11{,}25$

Ответ: $AD : AC = 3:5$

$S_{AED} = 11{,}25$

№1

$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x|(x-3)} \le 0$

Случай №1: $\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|}{4x^2 - 12x + |x|(x-3)} = 0$

$\begin{cases} x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| = 0, \\ 4x^2 - 12x + |x|(x-3) \neq 0, \end{cases}$

при $x \geq 1$:

$$x^2-2x+5-4|x-1| = x^2-2x+5-4x+4 = x^2-6x+9$$

$$D = 36-94=0$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

$$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| = \overset{\text{Но тогда}}{4\cdot 9-12\cdot 3+0} = 36-36=0$$ — а так не должно быть

$\Downarrow$

$x \neq 3$

при $x<1$:

$$x^2-2x+5-4|x-1| = x^2-2x+5+4x-4 = x^2+2x+1$$

$$D = 2^2-4\cdot 1=0$$

$$x = \frac{-2+0}{2} = -1$$

$$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| = 4+12+4 = 20 \neq 0 \qquad x=-1$$

случай 2:

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x||x-3|} < 0$$

при $x<0$:

$x<0$ и $x-3<0$ и $x-1<0$

$$\cancel{4x^2-12x} \quad \frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x+x^2-3x} = \frac{x^2+2x+1}{5x(x-3)} = \frac{(x+1)^2}{5x(x-3)}\begin{matrix}>0\\>0\end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x+x^2-3x} > 0$$

при $1>x>0$:

$x>0$ и $x-3<0$ и $x-1<0$:

$$\frac{x^2-2x+5+4x-4}{4x^2-12x-x^2+3x} = \frac{x^2+2x+1}{3x^2-9x} = \frac{(x+1)^2}{3x(x-3)}\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix} \Rightarrow \frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} < 0$$

при $3>x>1$:

$x>0$ и $x-3<0$ и $x-1>0$

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x-x^2+3x} = \frac{x^2-6x+9}{3x^2-9x} = \frac{(x-3)^2}{3x(x-3)}\begin{matrix}>0\\<0\end{matrix} \Rightarrow \frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} < 0$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к. у медиана и биссектриса лежит внутри треугольника, то

$\alpha = y+\beta$

$\alpha = 90+\beta$

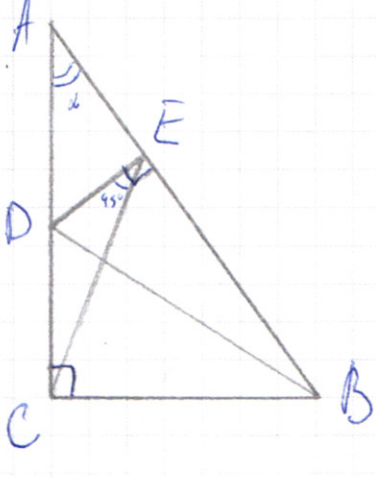
$\alpha > 90$

$\angle ADC = 2\alpha > 2\cdot 90 = 180°$ - но такого не может быть => этот случай не возможен!

Значит всего таких треугольников $75-50-1=24$

Ответ: 24 треугольника.

№ 5



Дано:

$\angle ACB = 90°$

$\angle AED = 90°$

$\angle DEC = 45°$

~~$BC = \frac{5}{2}\sqrt{29}$~~

$AC = \frac{5}{2}\sqrt{29}$

$BC = \sqrt{29}$

Найти: $AD : AC$

S_{AED}

Решение:

~~1) Проведем отрезок DB~~

~~2) $\angle DEB + \angle DCB = 90° + 90° = 180°$ => DEBC - вписанный четырехугольник. => $\angle CBD = \angle DEC = 45°$~~

~~$\angle CDB = \angle CEB = 90° - \angle CED = 45°$~~

~~3) $\angle CDB = \angle CBD = 45°$ => $\triangle CDB$ равнобедренный => $CD = CB$~~

~~4) $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$ - по теореме Пифагора~~

~~$AB = \sqrt{29 + \frac{25}{4} 29} = \sqrt{\frac{29^2}{4}} = \frac{29}{2}$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

5) $\triangle AED \sim \triangle ACB$ $\left(\begin{array}{l}\angle AED = \angle ACB = 90^\circ \\ \angle CAB = \angle DAE = \alpha\end{array}\right)$

Значит: $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{ED}{CB}$

$\frac{AE}{\sqrt{29}} = \frac{AD}{\frac{29}{2}} = \frac{ED}{\frac{5\sqrt{29}}{2}}$ | $\times 2$

$\frac{AE}{2\sqrt{29}} = \frac{AD}{29} = \frac{ED}{5\sqrt{29}}$

6)

$AD = AC - CD = AC - CB = \sqrt{29} - \frac{5}{2}$

1) $\angle CAB > 45^\circ$ $\left(\text{т.к. } \begin{cases}\angle CAB > \angle CBA \Leftarrow CB > AC \\ \angle CAB + \angle CBA = 90^\circ\end{cases}\right)$

~~$\angle CEB = \angle CAB + \angle EA$~~

$\angle CEB = \angle CAB + \angle ACE > 45^\circ$

$\angle CEB + \angle CED = 90^\circ$

$\angle CED = 90^\circ - \angle CEB$

$\angle CED < 90^\circ - 45^\circ$

$\angle CED < 45^\circ$

$\angle CED \neq 45^\circ$ - ПРОТИВОРЕЧИЕ

некорректное условие задачи

Решение: 1) проведем отрезок DB

2) $\angle DEB + \angle DCB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow DEBC$ - вписанный (в окружность) четырехугольник $\Rightarrow \angle CBD = \angle DEC = 45^\circ$ (опираются на одну дугу)

$\angle CDB = \angle CEB = 45^\circ$

3) $\angle CDB = \angle CBD = 45^\circ \Rightarrow \triangle CDB$ - равнобедренный $\Rightarrow CD = CB$

4) $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$ - по теореме Пифагора

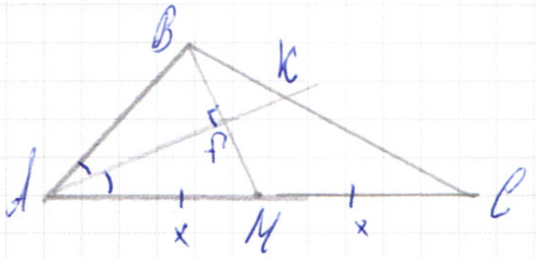
$AB = \sqrt{\frac{25}{4} \cdot 29 + 29} = \sqrt{\frac{29^2}{4}} = \frac{29}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Случай №1: Если в данном Δ есть такая биссектриса перпендикулярная медиане проведенной из другого угла:



$\left(\begin{array}{l} AM = MC = x \\ BC = n \end{array} \right)$

1) Мы видим что в ΔABM, AF - биссектриса и высота $\Rightarrow$ ΔABM - равнобедренный $(AB = AM)$.

2) Тогда: $P_{ABC} = 3x + BC = 3x + n = 300$

Мы по неравенству треугольника знаем, что $2x+n > x$
$x + n > 2x$
$3x > n$

Составим систему из неравенств:

$$\begin{cases} 3x+n = 300 \\ x+n > 2x \\ 3x > n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+n = 300, \\ n > x, \\ 3x > n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 300-3x, \\ n > x, \\ 3x > n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 300-3x, \\ 300 > 4x, \\ 6x > 300; \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = 300-3x, \\ 75 > x; \\ x > 50; \end{cases}$$

Тогда это будут все треугольники со сторонами $(x; 2x; 300-3x)$, где $x>50$. Теперь докажем, что любой треугольник с такими сторонами подходит по условию:

1) Проверим н-во треугольника:

$$\begin{cases} \text{I} & x+2x > 300-3x \\ \text{II} & 300-x > x \\ \text{III} & 300-2x > 2x \end{cases} \quad - \text{(надо доказать)}$$

I. $\cancel{3x > 150}$

$3x+3x = 6x > 6\cdot 50 = 300$

$3x+3x > 300$

$2x+x > 300-3x$ — верно

II. $150 = 75+75 > 2x$

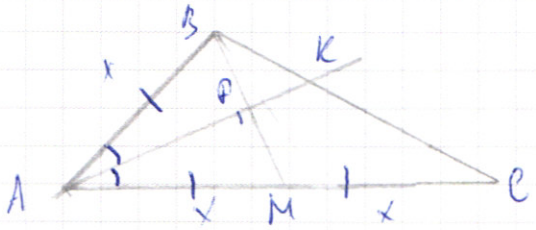
$300-x > x$ — верно

III.

$300 > 75\cdot 4 > 4x$

$300-2x > 2x$ — верно

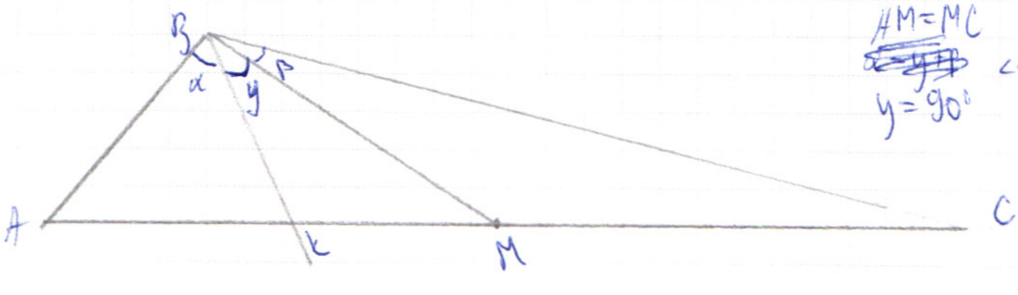
2) Проверим условие задачи (одна ~~из~~ из биссектрис $\perp$ одной из медиан). Рассмотрим медиану к стороне $2x$ и биссектрису к стороне $300-3x$:



$BC = 300-3x$
$AB = x$
$AM = MC = \frac{AC}{2} = x$

1) $\triangle ABM$ — равнобедренный ~~с осн.~~ и AP — биссектриса $\Rightarrow AP$ — высота $\Rightarrow AK \perp BM$ ч.т.д.

Случай №2: биссектриса перпендикулярна медиане выходящей из того угла (вершины):



$AM = MC$
~~...~~
$y = 90^\circ$
$\angle ABK = \angle KBC$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9, \end{cases}$$

1) $xy \geq 0$ (т.к. мы решаем на множестве рациональных чисел)
$x^2 \geq 0$
$\sqrt{xy} \geq 0$

2) раз $\sqrt{xy} \geq 0$, то и $y-2x \geq 0$ тогда:

$(y-2x=\sqrt{xy})$

$(y-2x)^2=\sqrt{xy}^2$

$y^2-4xy+4x^2=|xy|$

$y^2-5xy+4x^2=0$

3) $\cancel{2y^2+x^2=9}$ $y^2-5xy+4x^2=0$

$y_{1,2}=\frac{5x\pm\sqrt{25x^2-16x^2}}{2}=$

$y_{1,2}=\frac{5x\pm\sqrt{9x^2}}{2}$

$y_{1,2}=\frac{5x\pm|3x|}{2}$

$y_{1,2}=\frac{5x\pm3x}{2}$ (или $\frac{5x\mp3x}{2}$ что одно и то же)

$y_1=4x$

$y_2=x$

4) $2y+x^2=9$

4.1) при $y=4x$.
$x^2+8x-9=0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$x_1 = -9$ тогда $\left[\begin{array}{l} y = -36 \\ y = 4 \end{array}\right.$, но $y - 2x \geq 0$

$x_2 = 1$

при $y = -36$:

$-36 + 18 = -18 < 0 \Rightarrow y \neq -36$

при $y = 4$:

$4 - 2 \cdot 1 = 2 \geq 0$ - в

4.2) при $y = x$:

$x^2 + 2x - 9 = 0$

$D = 4 + 36 = 40$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2}$

$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{10}$

$x_1 = \sqrt{10} - 1 \quad > 0$

$x_2 = -(\sqrt{10} + 1) \quad < 0$

, но

$y - 2x \geq 0$

$y \geq 2x$

$x \geq 2x$

$0 \geq x \Rightarrow x = -(\sqrt{10} + 1)$

5)

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -(\sqrt{10} + 1) \\ y = -(\sqrt{10} + 1) \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ:

Проверка 1: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$

$y - 2x = 4 - 2 = \sqrt{4} = \sqrt{4 \cdot 1} = \sqrt{xy}$ - верно

$2 \cdot y + x^2 = 8 + 1 = 9$ - верно

Проверка 2: $\begin{cases} x = -(\sqrt{10} + 1) \\ y = -(\sqrt{10} + 1) \end{cases}$

$y - 2x = -(\sqrt{10} + 1) + 2(\sqrt{10} + 1) = \sqrt{10} + 1 = \sqrt{(\sqrt{10} + 1)^2} = \sqrt{xy}$ верно

$2y + x^2 = -2(\sqrt{10} + 1) + (\sqrt{10} + 1)^2 = -(2\sqrt{10} + 2) + 10 + 2\sqrt{10} + 1 = 11 - 2 = 9$ - верно