МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 19$, $3\leqslant y\leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\dfrac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \le 0$

1) $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x+5-4|x-1| \ge 0 \\ 4x^2-12x+|x||x-3| < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x+5-4|x-1| \le 0 \\ 4x^2-12x+|x||x-3| > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

1) $\begin{cases} x^2-2x+5-4|x-1| \ge 0 \\ 4x^2-12x+|x||x-3| < 0 \end{cases}$

$x^2-2x+5-4|x-1| \ge 0$.

1.1) $x \ge 1$.

$x^2-2x+5-4x+4 \ge 0$.

$x^2-6x+9 \ge 0$

$(x-3)^2 \ge 0$.

$\Downarrow$

$x \in [1; +\infty)$.

1.2) $x < 1$.

$x^2-2x+5+4x-4 \ge 0$.

$x^2+2x+1 \ge 0$

$(x+1)^2 \ge 0$.

$\Downarrow$

$x \in (-\infty; 1)$.

$x \in (-\infty; +\infty)$

$x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

$x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

ОДЗ: $4x^2-12x+|x||x-3| \ne 0$

1) $x \le 0$

$4x^2-12x+(-x)(3-x)=0$

$4x^2-12x+x^2-3x=0$

$4\cdot x(x-3)+x(x-3)=0$

$5\cdot x(x-3)=0$

$x=0; 3 \quad x \in [0]$

2) $x \in [0; 3)$

$4x^2-12x+x(3-x)=0$

$4x^2-12x-x(x-3)=0$

$3x(x-3)=0$

$x=0; 3 \quad x=0$

3) $x \ge 3$

$4x^2-12x+x(x-3)=0$

$x=0; 3$

$\Downarrow$

$\boxed{x \ne 0; 3}$

$4x^2-12x+|x||x-3|>0$.

Если $4x^2-12x>0$ то и всё >0.

$4x^2-12x \le 0$

$x^2-3x \le 0$

$x \in [0; 3]$. Тогда рассмотрим неравенство на $x \in [0; 3]$

$4x^2-12x+x(3-x)>0$

$4x^2-12x-x(x-3)>0$

$3x(x-3)>0$

$x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty) \Rightarrow x \in [0; 3]$

2) $\begin{cases} x^2-2x+5-4\|x-1\| \leq 0 \\ 4x^2-12x+\|x\|\|x-3\| \geq 0 \end{cases}$

По пунктам 1.1 и 1.2 — это никогда не верно если не достигается равенство, тогда:

$x^2-2x+5-4\|x-1\| = 0.$

1) $x \geq 1.$

$x^2-2x+5-4x+4=0.$

$(x-3)^2=0$

$\boxed{x=3}$

2) $x < 1.$

$x^2-2x+5+4x-4=0.$

$(x+1)^2=0$

$\boxed{x=-1.}$

~~От~~ $x=-1; 3.$ ~~п~~одставим в неравенство.

$3: x \notin 3$ из-за $x \neq 3.$

$-1: \dfrac{(-1)^2+2+5-4\cdot 2}{4+12+4} \vee 0.$

$0=0 \Rightarrow -1$ — подходит, но -1 и так входит по условию.

$x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

$\Downarrow$

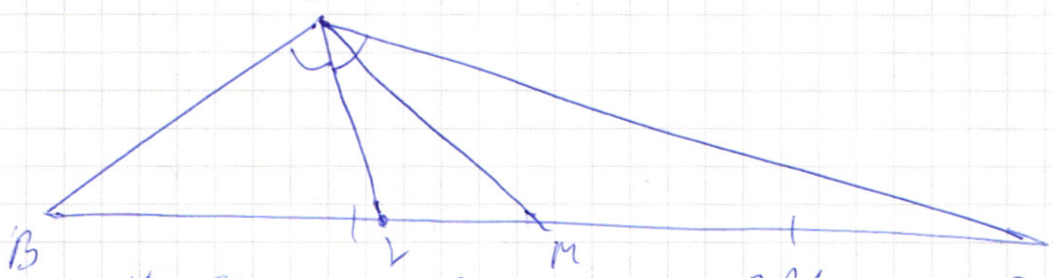
ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

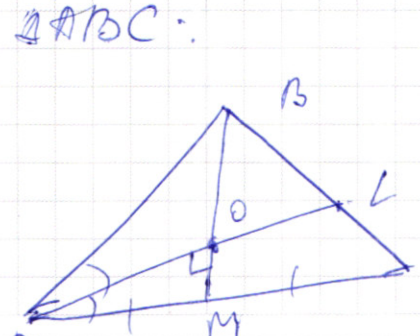
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) 1) Докажем, что биссектриса и медиана, проведенные из одной вершины не могут быть перпендикулярны:
Пусть есть △ABC:



Проведем медиану AM и биссектрису AL. Если ~~AM расположена~~ M на отрезке BC расположена правее L, то рассмотрим углы ∠LAC, и ∠LAB. Заметим, что так как биссектриса и медиана в любом треугольнике находятся внутри треугольника, то выбранный угол хотя бы 90° => угол ∠A – хотя бы 180°. — такого быть не может.

2) Мы знаем, что проведенные биссектриса и медиана проведены из разных вершин. △ABC:

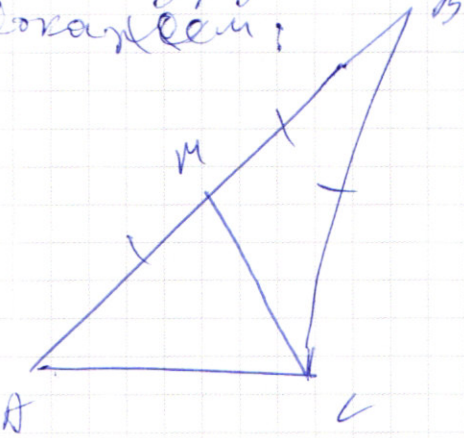


Проведем медиану BM и биссектрису AL.. Тогда по условию ∠AOB = 90°
($AL \cap BM = O$)
$AO \perp BM$, AO – бисс. => в △ABM
$AB = AM$ => $2AB = AC$

2) Продолжение !!!

Теперь заметим, что ~~для~~ в любом ~~прямоугольнике~~ треугольнике, в котором одна сторона больше другой в 2 раза — бисс. и медиана ⊥.

Докажем:



Пусть $AB = 2BC$.
Проведём медиану CM, тогда $BM = BC \Rightarrow$
бисс. $\angle B \perp MC$. ч.т.д.

Теперь найдём количество треугольников в которых одна сторона в 2 раза больше другой с $P = 300$.

Пусть одна сторона x, другая $2x \Rightarrow$ третья — $300 - 3x$.

По неравенству треугольника:

$$\begin{cases} 3x > 300 - 3x \\ x + 300 - 3x > 2x \\ 2x + 300 - 3x > x \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 50 \\ x < 75 \\ 300 > 0 \end{cases}$$

$x \in (50; 75) \Rightarrow$ ~~кол-во таких треугольников~~ ~~равно~~ эти треугольники это:

~~50~~ 51, 102, 147; 52, 104, 144; ....., 74, 148, 78

$\Downarrow$

Таких треугольников: 24.

Ответ: 24.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.

$S_{ABD}=16$

$R=6$

~~$\frac{CH}{OB}-?$~~, $\frac{DB}{CH}-?$

$\angle OAH=90^\circ$ – касательная

CH – высота

$\Downarrow$

$CH \parallel OA \to \angle HCA = \angle OAC$ (н.л.) $=$

$= \alpha = \angle HAD$ (угол между кас. и хордой)

~~$\angle ABD = \alpha$~~.

$\triangle ADC$: $\frac{AD}{\sin\alpha} = 2R$ (по теореме синусов)

$\triangle AHD$: $\sin\alpha = \sin\angle DAH = \frac{DH}{AD}$.

$\frac{AD^2}{DH} = 2R \quad AD^2 = 2R\cdot DH = 12DH$

$AH^2 + HD^2 = AD^2$ (по теореме Пифагора)

$AH^2 + HD^2 = 12DH \quad AH^2 = 12DH - HD^2$

$AH^2 = HD\cdot HC$ (свойство касательной и секущей)

$12DH - HD^2 = HD\cdot HC$.

$12 - HD = HC$

11. Продолжение!!!

$HC = h - HD$

$S_{ABD} = \frac{HD \cdot AB}{2} = 15 \Rightarrow HD \cdot AB = 30$

$HD = \frac{30}{AB}$

$HC = 12 - \frac{30}{AB}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

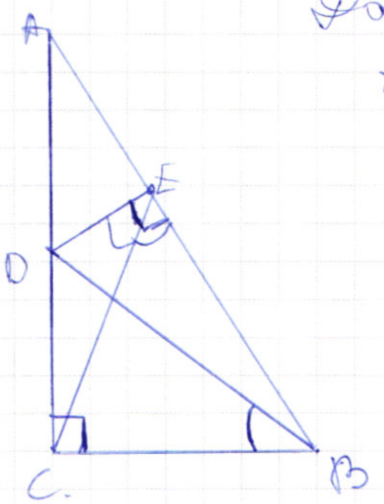
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



Дано:

$AC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

$BC = \sqrt{29}$

$\angle CED = 45^\circ$

Найти:

$\frac{AD}{AC} - ?$

$S_{DED} - ?$

$AC^2 + CB^2 = AB^2$ (по теореме Пифагора)

$29 + 29 \cdot \frac{25}{4} = AB^2$

$AB^2 = 29\left(1 + \frac{25}{4}\right)$

$AB^2 = \frac{29 \cdot 29}{4}$

$AB = \frac{29}{2}$

$\angle C = \angle DEB = 90^\circ \Rightarrow DEBC$ — вписан $\Rightarrow \angle DEC = \angle DBC = 45^\circ$

$\angle DBC = 45^\circ \Rightarrow \angle CDB = 45^\circ \Rightarrow \boxed{DC = BC}$

$\Downarrow$

$AD = AC - DC = AC - BC = \frac{5}{2}\sqrt{29} - \frac{2}{2}\sqrt{29} = \frac{3}{2}\sqrt{29}$

$\triangle DAE \sim \triangle BAC$ ($\angle A$ общ., $\angle DEA = \angle C = 90^\circ$)

$\Rightarrow \frac{S_{AED}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2$

$AD = \frac{3}{2}\sqrt{29}$

$AC = \frac{5}{2}\sqrt{29}$

$\Downarrow$

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{2}\sqrt{29} \cdot \frac{2}{5\sqrt{29}} = \frac{3}{5}$

$\cancel{\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{CB} = \frac{DE}{AC}}$

$S_{AED} = S_{ABC} \cdot \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = AC \cdot BC \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{5}{2} \cdot 29 \cdot \left(\frac{\frac{3\sqrt{29}}{2}}{\frac{29}{2}}\right)^2$

$S_{AED} = \frac{5}{2} \cdot 29 \left(\frac{3\sqrt{29} \cdot 2}{2 \cdot 29}\right)^2 = \frac{5}{2} \cdot 29 \left(\frac{3}{\sqrt{29}}\right)^2 = \frac{5}{2} \cdot 29 \cdot \frac{9}{29} = \frac{5 \cdot 9}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5.$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, $S_{AED} = 22{,}5$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

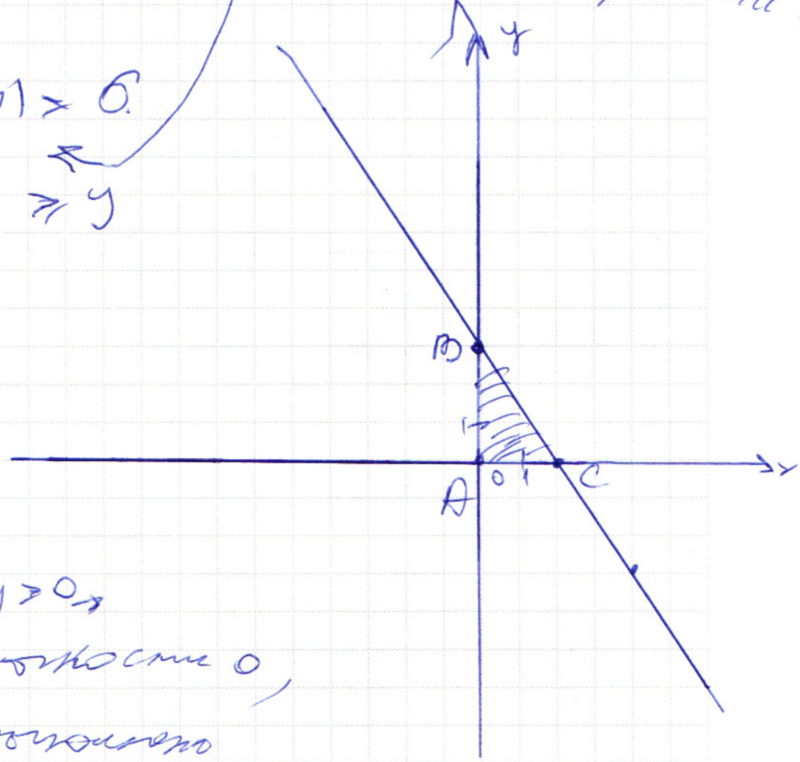
6. $\begin{cases} |3x| + |2y| + |6-3x-2y| \geq 6 \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$

Будем обозначать область не подходящую первому неравенству штриховкой ///.

I) $|3x| + |2y| + |6-3x-2y| \geq 6.$

1) $6 - 3x - 2y \geq 0$ $\quad \frac{6-3x}{2} \geq y$

Построим прямую $y = \frac{6-3x}{2}$.



Тогда

$3|x| + 2|y| + 6 - 3x - 2y \geq 6$

$3|x| - 3x + 2|y| - 2y \geq 0$

Заметим, что если $x \geq 0$, $y \geq 0$, то это выражение в точности 0, то есть неравенство не выполнено (Штрихуем все, что ниже прямой $y = \frac{6-3x}{2}$ и находится в I четверти)

А если хотя бы x или $y < 0$ то неравенство верно.

$3x+2y \geq 6$ $\Rightarrow$ $y \geq \frac{6-3x}{2}$

2) $3|x| + 2|y| + 3x + 2y - 6 \geq 6.$

$3|x| + 3x + 2|y| + 2y \geq 12$, Рассмотрим области выше $y = \frac{6-3x}{2}$:

I четверть: $x \geq 2$, $y \geq 3$. $\Rightarrow$ $3x + 3x + 2y + 2y \geq 12$ — верно.

II четверть: $x < 0$, $y > 3$: $-3x + 3x + 2|y| + 2y \geq 12$.
$|y| + y \geq 6$ — верно, так как $y \geq 3$

III четверть: нет области.

IV четверть: $y < 0$, $x > 2$. $3|x| + 3x + 2y - 2y \geq 12$.
$|x| + x \geq 4$. — верно так как $x > 2$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

6. Продолжение!!!

Таким образом, чтобы выполнялось первое неравенство — надо „выкинуть" из плоскости ΔABC с координатами $(0;0)$, $(2;0)$, $(0;3)$

$x^2-2x-3y+y^2\le 0$

$(x-1)^2-1+(y-1,5)^2-2,25\le 0$

$(x-1)^2+(y-1,5)^2\le 3,25$ — это область внутри ω с центром в $(1;1,5)$ и $R=\sqrt{3,25}$

$(1;1,5)$ — ~~это~~ центр гипотенузы ΔABC

~~$BC=\sqrt{10}$~~ $\quad BC=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}=2\sqrt{3,25}=2R$

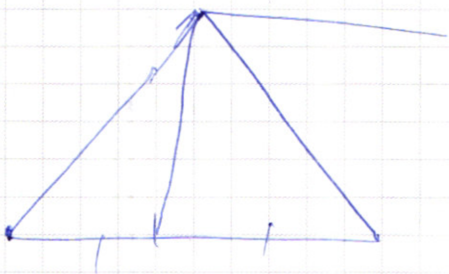
⇓

ΔABC — вписан

~~$\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$; $\sqrt{3,25}\vee\frac{\sqrt{10}}{2}$; $\frac{\sqrt{13}}{2}>\frac{\sqrt{10}}{2}$ => весь ΔABC находится внутри окружности => искомая площадь — это площадь круга $- S_{ABC} = \pi R^2 - S_{ABC} = \pi\cdot 3,25 -$~~

Искомая площадь равна площади окружности минус $S_{ABC}=\pi R^2-S_{ABC}=\pi\cdot 3,25-3=$
$=3,25\pi-3$.

Ответ: $S=3,25\pi-3$.



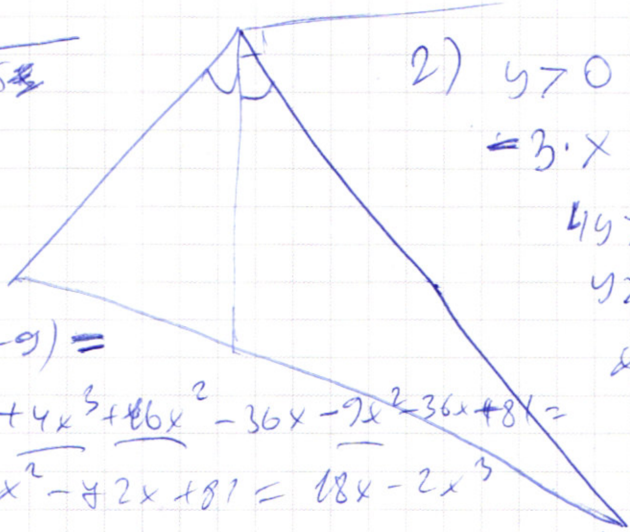
1) $x \geq 0,\ y \geq 0$

$3x+2y+3x+2y \geq 12.$

$6x+4y \geq 12.$

$3x+2y \geq 6.$

$$\begin{array}{r|l} x^2+4x-9 & x-1 \\ \cline{2-2} x^2-x & x+5 \\ \hline 5x-9 & \\ 5x-5 & \\ \hline -4. & \end{array}$$



2) $y \geq 0,\ x \leq 0$

$-3\cdot x+2y+3x+2y \geq 12.$

$4y \geq 12$

$y \geq 3.$

$x \geq 0$

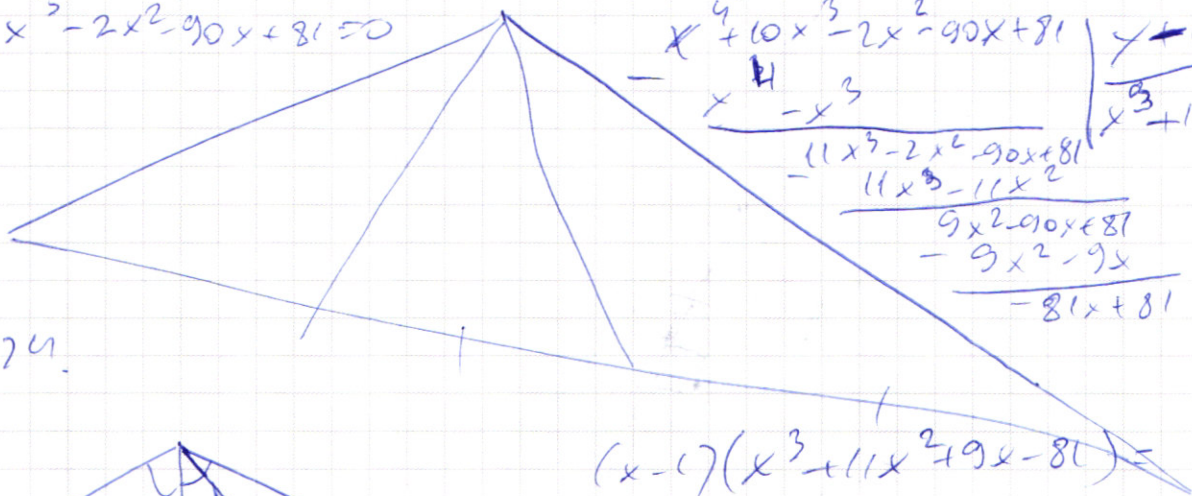
$(y$

$(x^2+4x-9)(x^2+4x-9)=$

$=x^4+4x^3-9x^2+4x^3+16x^2-36x-9x^2-36x+81=$

$=x^4+8x^3-2x^2-72x+81=18x-2x^3$

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$



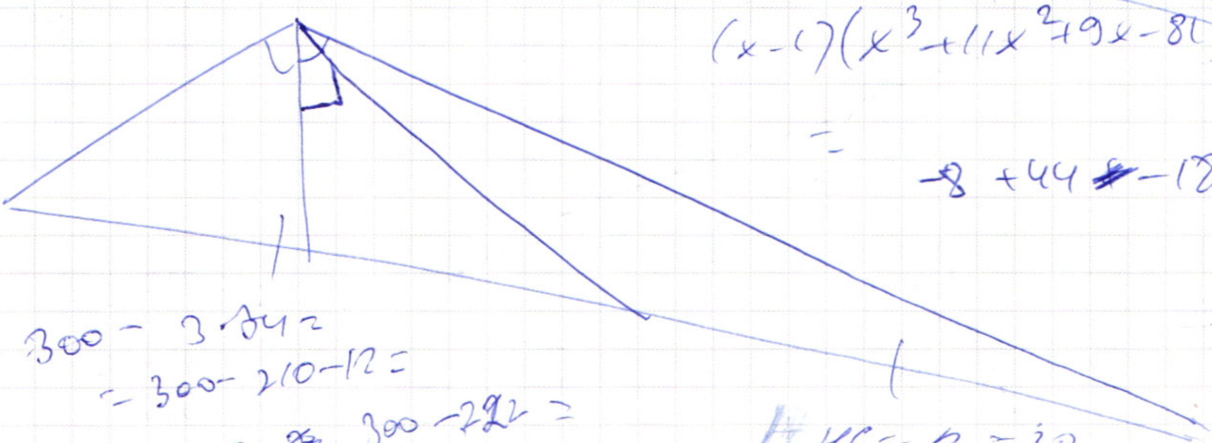
$$\begin{array}{r|l} x^4+10x^3-2x^2-90x+81 & x-1 \\ \cline{2-2} x^4-x^3 & x^3+11x^2+9x-81 \\ \hline 11x^3-2x^2-90x+81 & \\ 11x^3-11x^2 & \\ \hline 9x^2-90x+81 & \\ 9x^2-9x & \\ \hline -81x+81 & \end{array}$$

$74-50=24.$

$(x-1)(x^3+11x^2+9x-81)=$

$=$

$-8+44-18-81.$



$300-3\cdot 74=$

$=300-210-12=$

$=300-222=$

$=78.$

$HC=12-\frac{30}{AB}$

$\frac{AB}{HC}=\frac{AB}{12-\frac{30}{AB}}=\frac{AB^2}{12AB=30}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

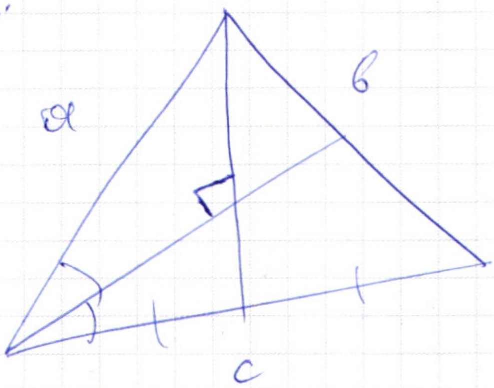
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \le 0$$

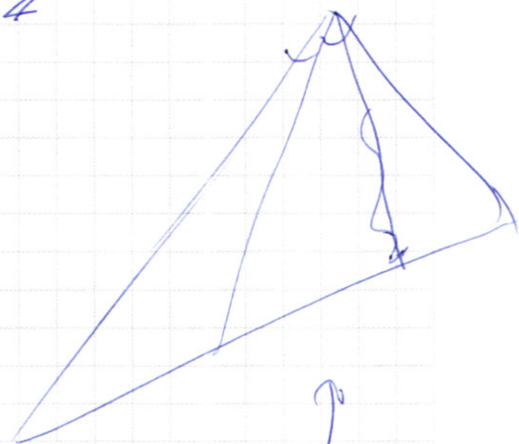
$4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| \quad \vee \quad 0.$

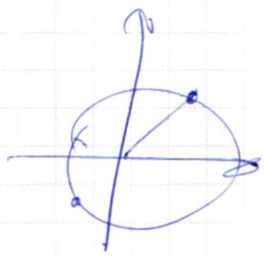
1) $x \geq 3$

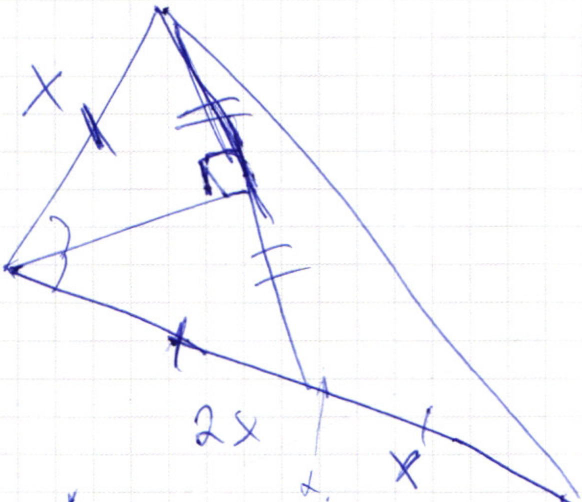


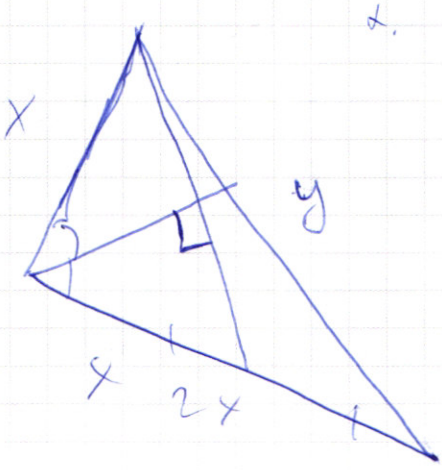
$P = 300$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$









$y = 300 - 3x$

$3x > 300 - 3x$

$x > 50$

$3x > y$

$\cancel{y + 2x > x}$

$x + y > 2x$

$x < y$

$x < 300 - 3x$

$4x < 300$

$x < 75$

76 226

$3|x| + 2|y| + |6 - 3x - 2y| > 6$

~~x<0~~ 1) $x \leq 0$, $y \leq 0$ $\mathbb{R}$

~~2) x > 0 ; y > 0.~~

~~3x + 2y~~

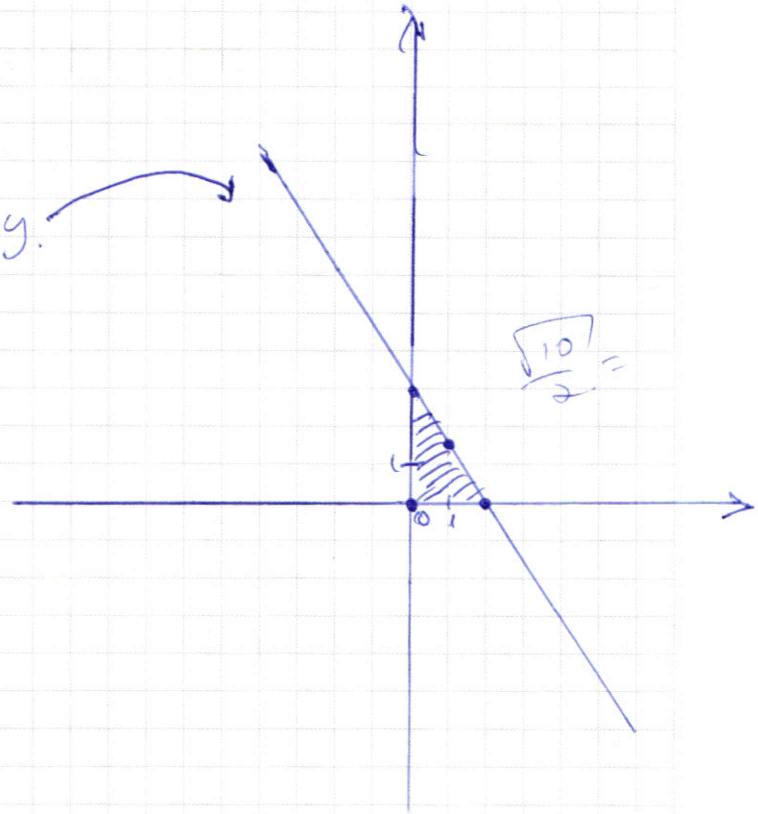
1) $6 - 3x - 2y \geq 0$. $\frac{6-3x}{2} \geq y$.

$3|x| + 2|y| + 6 - 3x - 2y > 6$

$3|x| + 2|y| - 3x - 2y > 0$

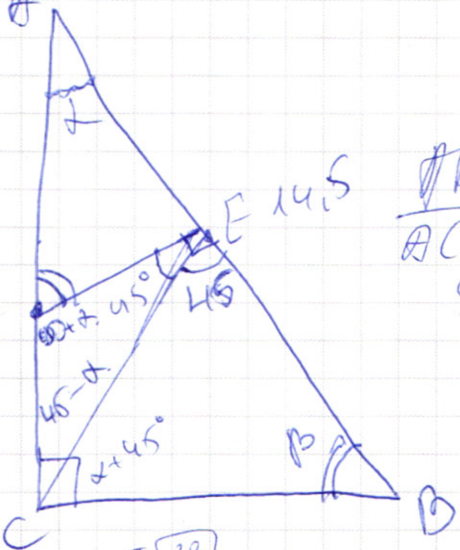
2) $6 - 3x - 2y \leq 0$. $3x + 2y > 6$.

$3|x| + 2|y| + 3x + 2y > 12$.



$\frac{\sqrt{10}}{2} =$

$\sqrt{3{,}78}$



$\sqrt{29}$

$\frac{5\sqrt{29}}{2}$

$\frac{AD}{AC} - ?$

$S_{DED} - ?$

$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$

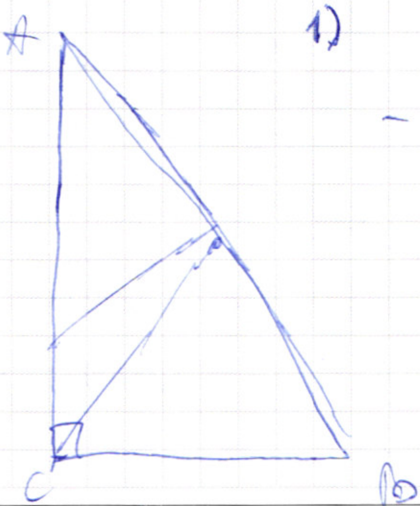
$\angle CED = 45°$

$\sqrt{29 + \frac{25 \cdot 29}{4}}$

$\sqrt{29 \cdot \frac{29}{4}} =$

$= \frac{29}{2} =$

1)



$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 72x + 81 & x - 1 \\
\underline{x^4 - x^3} & x^3 + 7x^2 + 5x \\
\quad 7x^3 - 2x^2 - 72x + 81 & \\
\quad \underline{7x^3 - 7x^2} & \\
\quad\quad 5x^2 - 72x + 81 & \\
\quad\quad \underline{5x^2 - 5x} & \\
\quad\quad\quad -67x + 81 &
\end{array}
$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$ $\quad xy\geq 0 \quad y\geq 2x$

$y=\frac{9-x^2}{2}$

$y^2-4xy+4x^2=xy$

$y^2-5xy+4x^2=0$

$(y-2,5x)^2-6,25x^2+4x^2=0$

$(y-2,5x)^2=(1,5x)^2$

$|y-2,5x|=|1,5x|$

$\left|\frac{9-x^2}{2}-2,5x\right|=|1,5x|$

$\frac{|9-x^2-5x|}{2}=|1,5x|$

$\frac{(9-x^2-5x)^2}{4}=(1,5x)^2$

$9-x^2-5x=$

$=-(x^2+5x-9)=$

$=-((x+2,5)^2-15,25)=$

$=15,25$

$D=25+36=$
$=61$

$x^2+5x-9\geq 0$

$x=-5\pm\sqrt{61}$

$9.\ |x^2+5x-9|=4|1,5x|$

$|3x|+2|y|+|6-3x-2y|>6.$ $\quad 6\geq 3x+2y.$

$3|x|+2|y|+|6-3x-2y|>6$ $\quad y\leq\frac{6-3x}{2}$

$3|x|+2|y|+6-3x-2y>6.$

$3|x|-3x+2|y|-2y>0.$

$x\geq 0$
$y\geq 0.$

$3|x|+2|y|+3x+2y-6>6.$

$3|x|+2|y|+3x+2y>12.$

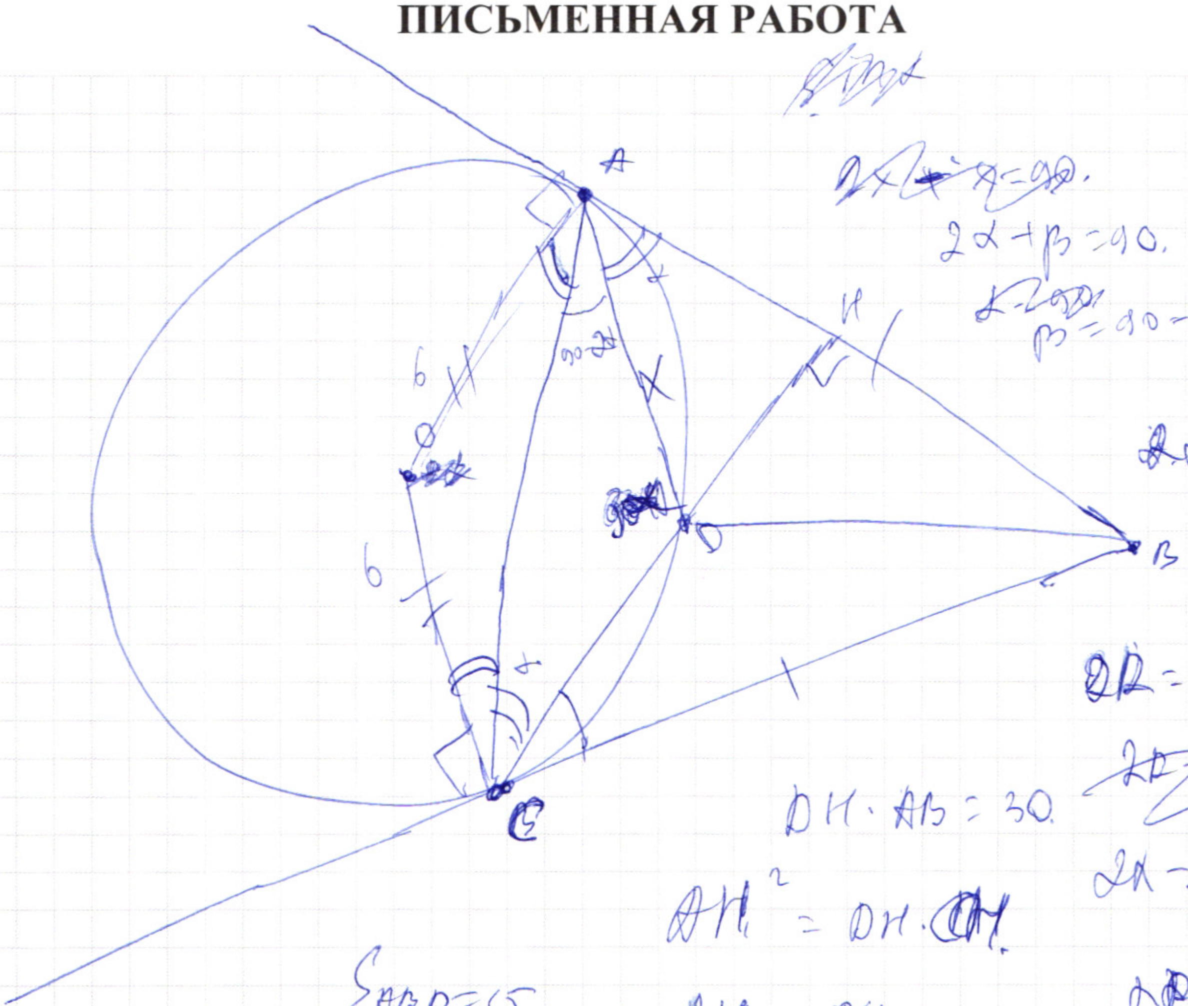
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2\alpha+\beta=90.$

$\beta=90-2\alpha.$

2α

$2R=\frac{x}{\sin\alpha}.$

$2\alpha=\frac{x}{\frac{Dx}{x}}$

$AD=\frac{x^2}{Dx}.$

$DH\cdot AB=30.$

$AH^2=DH\cdot CH.$

$S_{ABD}=15$

$R=6$

$\frac{AH}{CH}=\frac{DH}{AH}=\frac{AD}{AC}.$

$\frac{AB}{CH}-?$

$AH^2=HD^2+AD^2$ $\sin\alpha=\frac{DH}{x}$

A

$AH^2=CH\cdot DH$

$2R=\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{x^2}{DH}=$

$=\frac{DH^2+AH^2}{DH.}$

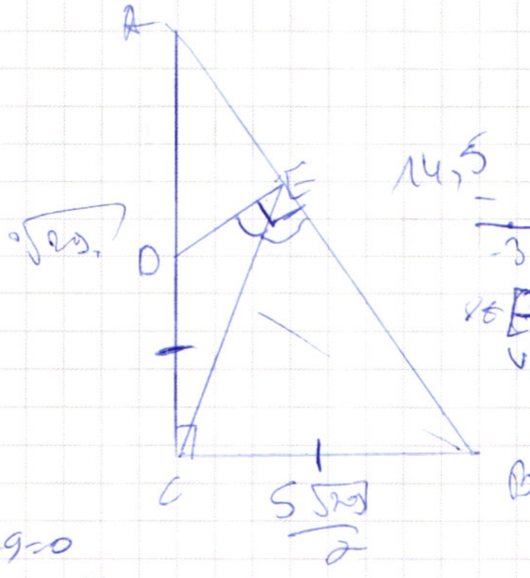
$CH^2+AH^2=AC^2.$

$12=$

$12DH-DH^2=AH^2.$

12

$x^2+4x-9=(x+2)^2-13=$
$=(x+2-\sqrt{13})(x+2+\sqrt{13})$



$9x-x^3\geq 0$

$x(9-x^2)\geq 0$

14,5 $\quad (3-x)(3+x)\geq 0$

$-3 \quad 0 \quad 3$

$x\in[-3;0]\cup$
$\cup[3;+\infty)$

$\frac{AD}{AC}$ – ?

S_{AED} – ?

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

$y=\frac{9-x^2}{2}$

$\frac{9-x^2}{2}-2x=\sqrt{\left(\frac{9-x^2}{2}\right)x}$

$\frac{9-x^2-4x}{2}=\sqrt{\frac{9x-x^3}{2}}$

$9-x^2-4x=\sqrt{2(9x-x^3)}$

$9-x^2-4x\geq 0$

$x^2+4x-9\leq 0$

$x^2+4x-9=0$

$D=16+36=61$

$x=\frac{-4\pm 2\sqrt{13}}{2}$

$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{CB}$

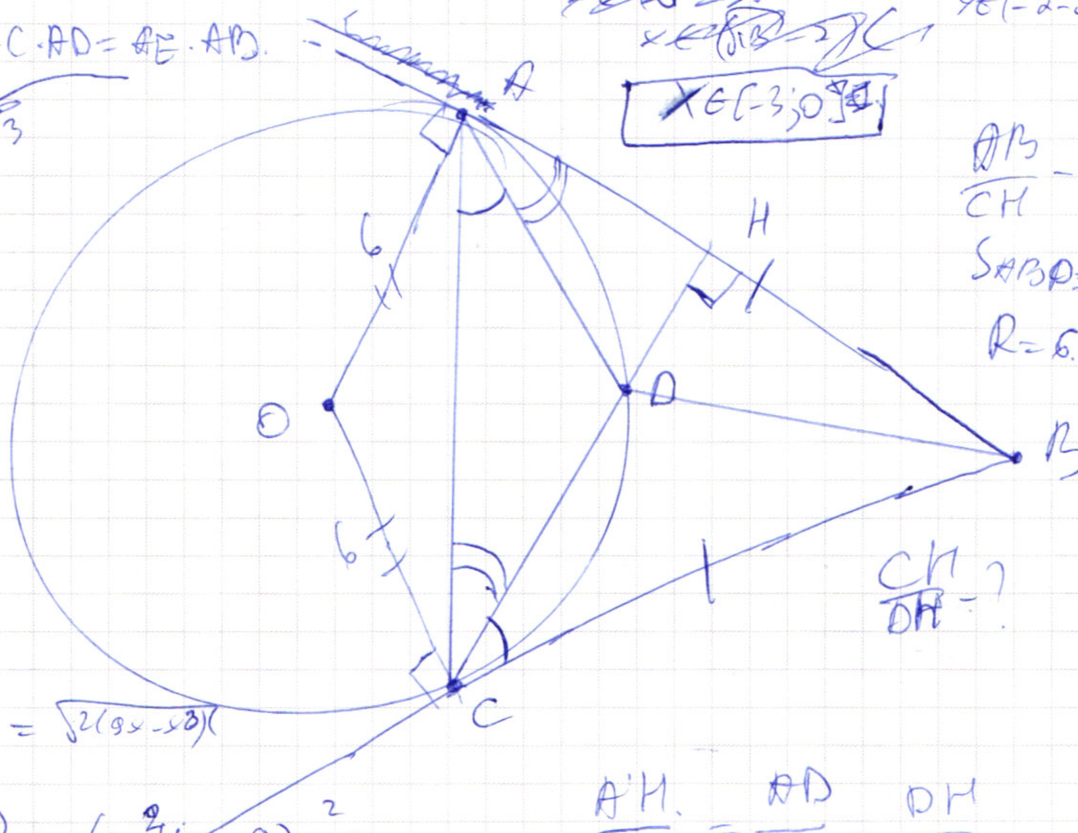
$(x+2-\sqrt{13})(x+2+\sqrt{13})\leq 0$

$x\in(-2-\sqrt{13};-2+\sqrt{13})$

$AC\cdot AD=AE\cdot AB$

$\boxed{x\in[-3;0]}$

$-2-\sqrt{13} \quad -3 \quad 0 \quad \sqrt{13}-2 \quad 3$



$\frac{DB}{CH}$ – ?

$S_{ABD}=15$

$R=6$

$\frac{CH}{DH}$ – ?

$9-x^2-4x=\sqrt{2(9x-x^3)}$

$2(9x-x^3)=(x^2+4x-9)^2=$
$=(x+2-\sqrt{13})^2(x+2+\sqrt{13})^2$

$(x^2+4x-9)(x^2+4x-9)=$
$=x^4+4x^3-9x^2+4x^3+16x^2-36x-$
$-9x^2-36x+81$

$x^4+8x^3-2x^2-72x+81$

$\frac{AH}{CH}=\frac{AD}{AC}=\frac{DH}{AH}$

$AH^2=CH\cdot DH$

$\cancel{AH^2=DH\cdot CD}$

$AH^2+HC^2=AC^2$

$AC^2-HC^2=CH\cdot DH$

$\cancel{x^4+8x^3-2x^3}$

$x^4+8x^3-2x^2-72x+81$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-2x=\sqrt{xy}$

$2y+x^2=9$

$x^2-2x-3y+y^2\le 0$

$(x-1)^2-1+(y-1,5)^2-2,25$

$(x-1)+(y-1,5)^2\le 3,25$

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0.$$

$4x^2-12x\le 0$

$x^2-3x<0$

$x(x-3)<0$

0 3

$x\in(0;3)$

$4x^2-12x+x(3-x)<0$

$4x^2-12x+3x-x^2\le 0$

$3x^2-9x<0$

$x(x-3)<0$

$\begin{cases} x^2-2x+5 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

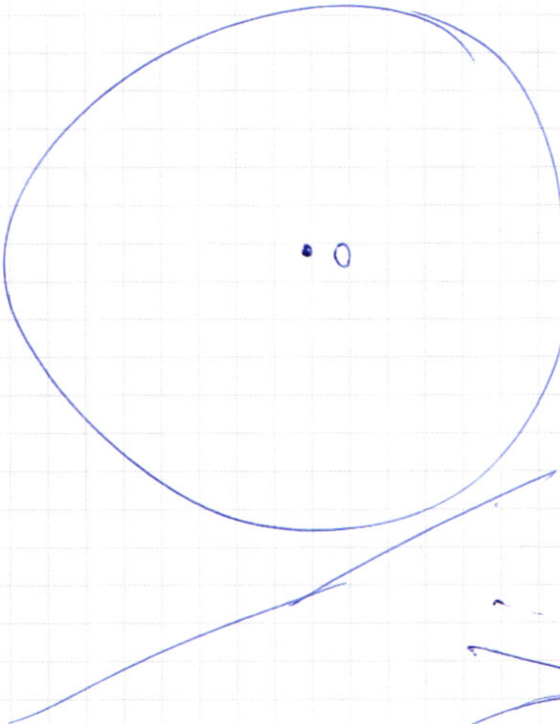
$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=8. \end{cases}$$

$\boxed{xy \geq 0 \quad y \geq 2x}$

$y^2-4xy+4x^2=xy.$

$y^2-5xy+4x^2=0$

$2y+x^2=8$



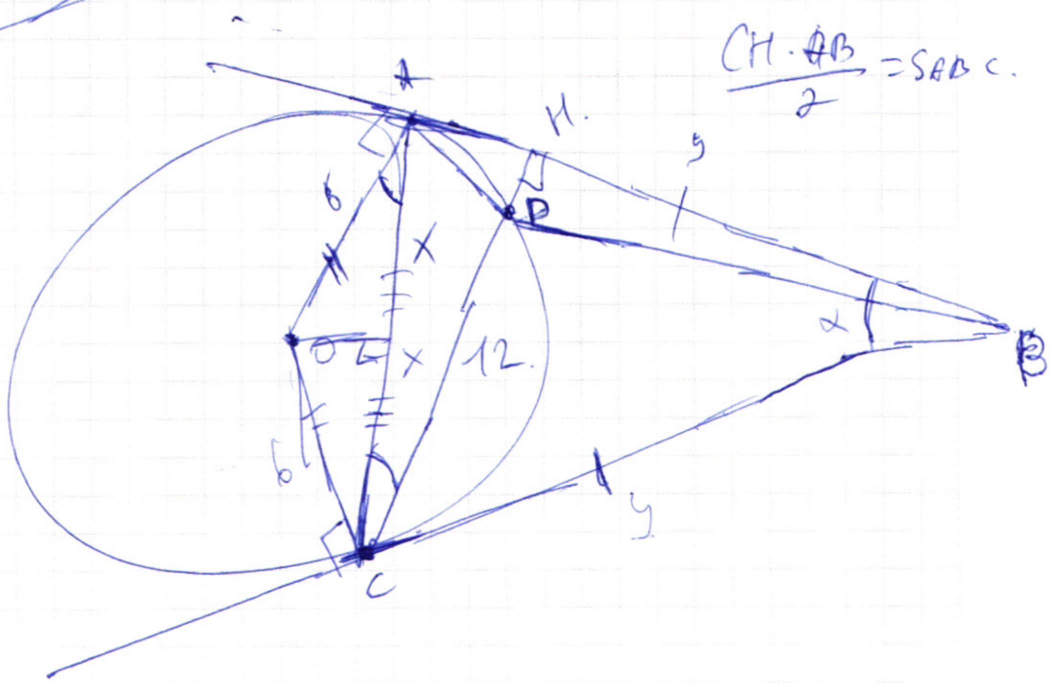
$6y=\frac{y^2\cdot\sin\alpha}{2}+\frac{36\cdot\sin\alpha}{2}.$

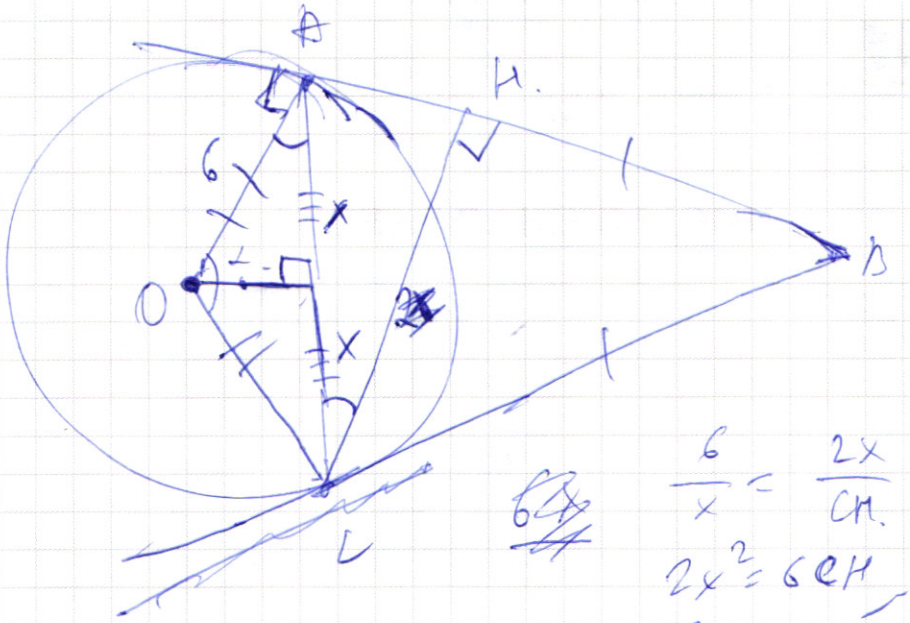
$\frac{AB}{CH}=?$

$\frac{CH\cdot AB}{2}=S_{ABC}.$

$S_{ABD}=15$

$R=6$





$$\frac{6}{x} = \frac{2x}{CH}$$

$$2x^2 = 6CH$$

$$x^2 = 3CH \qquad CH = \frac{x^2}{3}$$

$$4x^2 = 72 - 2\cdot 36\cdot\cos\alpha$$

$$4x^2 = 72 - 72\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{72-4x^2}{72}$$

$$4x^2 = \cancel{\frac{4x^2-72}{72}}$$

$$4x^2 = AB^2 + AB^2 - 2AB^2\cdot\frac{4x^2-72}{72}$$

$$2x^2 = AB^2 - AB^2\cdot\frac{4x^2-72}{72}$$

$AB^2($

$$y - 2x = \sqrt{xy}$$
$$2y^2 + x^2 = 9$$

$y - 2x \geq 0 \qquad xy \geq 0$

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ 2y^2 + x^2 = 9 \end{cases}$$

$y^2 - 5xy + 4x^2 =$
$= (y$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$
$$(y - 2{,}5x)^2 + 4x^2 - 6{,}25x^2 = 0$$
$$(y - 2{,}5x)^2 = 2{,}25x^2$$