

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2 - 3x + 2)$, $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-2}$ и $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-1}$ равно сумме двух остальных.
2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $3(g(x))^2 + 2f(x)$, если наименьшее значение функции $3(f(x))^2 + 2g(x)$ равно $-\frac{19}{6}$.
3. На каждой из прямых $y = 1$ и $y = 6$ отмечено по 200 точек с абсциссами $1, 2, 3, \dots, 200$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?
4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 3$ и $2 \sin(2x + 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$.
5. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC , $KC = 1$, $AL = 4$. Найдите $\angle ACB$, MK , AB и площадь треугольника CMN .
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от семи последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 609, а сумма расстояний от этих же семи чисел до некоторого числа b равна 721. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 192$.
7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1 C_1, C_1 C, CB, CD$, и при этом касается ребра CD в такой точке K , что $CK = 9, KD = 1$.
 - а) Найдите длину ребра A_1A .
 - б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра $A_1 D_1$. Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и радиус сферы Ω .

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2 - 7x + 12)$, $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-3}$ и $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-4}$ равно сумме двух остальных.
2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $2(g(x))^2 - f(x)$, если наименьшее значение функции $2(f(x))^2 - g(x)$ равно $\frac{7}{2}$.
3. На каждой из прямых $x = 2$ и $x = 9$ отмечено по 400 точек с ординатами $1, 2, 3, \dots, 400$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 800 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?
4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 7$ и $2 \sin(2x - 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.
5. Окружность Γ радиуса $2\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC , $CL = 2$, $BK = 3$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK , AB и площадь треугольника BKN .
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от тридцати трёх последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 3168, а сумма расстояний от этих же тридцати трёх чисел до некоторого числа b равна 924. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 120$.
7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, C_1D_1$, и при этом касается ребра C_1D_1 в такой точке K , что $C_1K = 9, KD_1 = 4$.
 - а) Найдите длину ребра A_1A .
 - б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра AD . Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и радиус сферы Ω .

11 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2 - 10x + 21)$, $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-7}$ и $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-3}$ равно сумме двух остальных.
2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + 5f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + 5g(x)$ равно -17 .
3. На каждой из прямых $y = 1$ и $y = 12$ отмечено по 200 точек с абсциссами $1, 2, 3, \dots, 200$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?
4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = 2$ и $5 \sin(2x - 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.
5. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC , $KC = 1$, $AL = 6$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK , AB и площадь треугольника CMN .
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от одиннадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 902, а сумма расстояний от этих же одиннадцати чисел до некоторого числа b равна 374. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 98$.
7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1 C_1, C_1 C, CB, CD$, и при этом касается ребра CD в такой точке K , что $CK = 4, KD = 1$.
 - а) Найдите длину ребра A_1A .
 - б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра $A_1 D_1$. Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и радиус сферы Ω .

11 класс

БИЛЕТ 4

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2 - 7x + 10)$, $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-2}$ и $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-5}$ равно сумме двух остальных.
2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 - 3f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 - 3g(x)$ равно $\frac{11}{2}$.
3. На каждой из прямых $x = 2$ и $x = 15$ отмечено по 400 точек с ординатами $1, 2, 3, \dots, 400$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 800 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?
4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4$ и $3 \sin(2x + 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$.
5. Окружность Γ радиуса $4\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC , $CL = 4$, $BK = 3$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK , AB и площадь треугольника BKN .
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати девяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1624, а сумма расстояний от этих же двадцати девяти чисел до некоторого числа b равна 1305. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 115$.
7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, C_1D_1$, и при этом касается ребра C_1D_1 в такой точке K , что $C_1K = 16$, $KD_1 = 1$.
 - а) Найдите длину ребра A_1A .
 - б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра AD . Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и радиус сферы Ω .

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x \left(x - \frac{3}{2}\right)$, $\log_{x-\frac{3}{2}}(x-3)$ и $\log_{x-3} x$ равно произведению двух остальных.
2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 7g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.
3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 3 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 27^{47} .
4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\cos y + \cos x = \sin 3x$ и $\sin 2y - \sin 2x = \cos 4x - \cos 2x$. Какое *наименьшее* значение может принимать сумма $\sin y + \sin x$?
5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с радиусом 5 описана вокруг треугольника ABM , где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 6. Найдите длины отрезков AD , BK и периметр треугольника EBM .
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от шестнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 636, а сумма расстояний от этих же шестнадцати чисел до числа a^2 равна 591. Найдите все возможные значения a .
7. На ребре BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрана точка M . Сфера, построенная на отрезке $C_1 M$ как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре $B_1 B$. Известно, что $BM = 1$, $CM = 24$. Найдите длину ребра AA_1 , радиус сферы и объём параллелепипеда.

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x \left(x - \frac{5}{2}\right)$, $\log_{x-\frac{5}{2}}(x-4)$ и $\log_{x-4} x$ равно произведению двух остальных.
2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = -12g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.
3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 5 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 125^{85} .
4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\cos y + \sin x + \cos 3x = 0$ и $\sin 2y - \sin 2x = \cos 4x + \cos 2x$. Какое *наибольшее* значение может принимать сумма $\sin y + \cos x$?
5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 17 описана вокруг треугольника ABM , где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 8. Найдите длины отрезков AD , BK и периметр треугольника EBM .
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати семи последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1926, а сумма расстояний от этих же двадцати семи чисел до числа a^2 равна 1932. Найдите все возможные значения a .
7. На ребре BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрана точка M . Сфера, построенная на отрезке $C_1 M$ как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре $B_1 B$. Известно, что $BM = 1$, $CM = 15$. Найдите длину ребра AA_1 , радиус сферы и объём параллелепипеда.

11 класс

БИЛЕТ 11

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x \left(x - \frac{13}{6}\right)$, $\log_{x-\frac{13}{6}}(x-3)$ и $\log_{x-3} x$ равно произведению двух остальных.
2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 4g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.
3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 7 с целыми неотрицательными показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 49^{68} .
4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\sin y + \cos x = \sin 3x$ и $\sin 2y - \sin 2x = \cos 4x - \cos 2x$. Какое наименьшее значение может принимать сумма $\cos y + \sin x$?
5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 5 описана вокруг треугольника ABM , где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 3. Найдите длины отрезков BC , BK и периметр треугольника EBM .
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от восемнадцати последовательных натуральных чисел до некоторого числа a равна 1005, а сумма расстояний от этих же восемнадцати чисел до числа a^2 равна 865. Найдите все возможные значения a .
7. На ребре BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрана точка M . Сфера, построенная на отрезке $C_1 M$ как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре $B_1 B$. Известно, что $BM = 1$, $CM = 8$. Найдите длину ребра AA_1 , радиус сферы и объём параллелепипеда.

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x \left(x - \frac{1}{3}\right)$, $\log_{x-\frac{1}{3}}(x-3)$ и $\log_{x-3} x$ равно произведению двух остальных.
2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = -6g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.
3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 11 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 1331^{38} .
4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\sin y + \sin x + \cos 3x = 0$ и $\sin 2y - \sin 2x = \cos 4x + \cos 2x$. Какое *наибольшее* значение может принимать сумма $\cos y + \cos x$?
5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 13 описана вокруг треугольника ABM , где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 5. Найдите длины отрезков AD , BK и периметр треугольника EBM .
6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати пяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1270, а сумма расстояний от этих же двадцати пяти чисел до числа a^2 равна 1234. Найдите все возможные значения a .
7. На ребре BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрана точка M . Сфера, построенная на отрезке $C_1 M$ как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре $B_1 B$. Известно, что $BM = 1$, $CM = 3$. Найдите длину ребра AA_1 , радиус сферы и объём параллелепипеда.

БИЛЕТ 1

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2 - 3x + 2)$, $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-2}$ и $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-1}$ равно сумме двух остальных.

Ответ: $x = 3$.

Решение. Заметим, что на ОДЗ сумма всех трёх логарифмов равна

$$\log_{x^2} \left(\frac{x^2}{x-2} \cdot \frac{x^2}{x-1} (x^2 - 3x + 2) \right) = \log_{x^2} x^4 = 2.$$

Обозначим то число, которое равно сумме двух других через c , а два оставшихся числа через a и b . Тогда $c = a + b$ и $a + b + c = 2$, откуда следует, что $c = 1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен 1.

Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен 1, то поскольку сумма всех трёх логарифмов равна 2, то два оставшихся в сумме составляют 1, т.е. их сумма равна первому логарифму.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен 1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен 1, когда его основание равно подлогарифмическому выражению. Получаем совокупность

$$\begin{cases} x^2 = \frac{x^2}{x-2}, \\ x^2 = \frac{x^2}{x-1}, \\ x^2 = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3, \\ x = 2, \\ x = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Из найденных значений переменной только $x = 3$ удовлетворяет ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $3(g(x))^2 + 2f(x)$, если наименьшее значение функции $3(f(x))^2 + 2g(x)$ равно $-\frac{19}{6}$.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = 3(f(x))^2 + 2g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x) = 3(ax + b)^2 + 2(ax + c) = 3a^2x^2 + 2a(3b + 1)x + 3b^2 + 2c$. График $y = h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_v = -\frac{3b+1}{3a}$; ордината вершины равна $h(x_v) = -2b - \frac{1}{3} + 2c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $3(g(x))^2 + 2f(x)$ равно $-2c - \frac{1}{3} + 2b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна $-\frac{2}{3}$, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно $-\frac{19}{6}$, то второе равно $-\frac{2}{3} + \frac{19}{6} = \frac{5}{2}$.

3. На каждой из прямых $y = 1$ и $y = 6$ отмечено по 200 точек с абсциссами $1, 2, 3, \dots, 200$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: $C_{200}^2 \cdot 4 + 190 \cdot 2 + 174 \cdot 4 = 80676$.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C , CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 25$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 5$, $AH = 25$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 25$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB , равную 10, можно расположить $190 \cdot 2 = 380$ способами (по 200 – 10 способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 26, и её можно расположить $2(200 - 26) = 348$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины – получаем $2 \cdot 348 = 696$ способов.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 200 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 398 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $200 \cdot 398 = 79600$ способов.

Итого получаем $380 + 696 + 79600 = 80676$ способов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 3$ и $2 \sin(2x + 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Решение. На ОДЗ первое равенство равносильно следующим:

$$\frac{\cos x \sin y + \cos y \sin x}{\sin x \sin y} = 3 \Leftrightarrow \sin(x + y) = 3 \sin x \sin y.$$

Преобразуем второе равенство:

$$4 \sin(x + y) \cos(x + y) = 4 \sin x \sin y \cos x \cos y.$$

Подставляем в левую часть $3 \sin x \sin y$ вместо $\sin(x + y)$ и преобразуем полученное равенство (учитываем, что в силу ОДЗ $\sin x \sin y \neq 0$):

$$\begin{aligned} 12 \sin x \sin y \cos(x + y) &= 4 \sin x \sin y \cos x \cos y \Leftrightarrow 3 \cos(x + y) = \cos x \cos y \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \cos x \cos y - 3 \sin x \sin y &= \cos x \cos y \Leftrightarrow 2 \cos x \cos y = 3 \sin x \sin y \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

5. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC , $KC = 1$, $AL = 4$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK , AB и площадь треугольника CMN .

Ответ: $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, $MK = 3$, $AB = \frac{5\sqrt{7}}{2}$, $S_{\triangle CMN} = \frac{45\sqrt{3}}{28}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O , основание высоты треугольника проведённой из вершины C , через H , а угол BAC через α .

Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\operatorname{tg} \angle OCK = \frac{OK}{CK} = \sqrt{3}$ и $\angle OCK = 60^\circ$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle ACB = 2\angle OCK = 120^\circ$. Но тогда по сумме углов четырёхугольника $OLCK$ находим, что $\angle LOK = 60^\circ$.

Поскольку $OL \perp AC$ и $MK \parallel AC$, то $OL \perp MK$. Треугольник $МОК$ равнобедренный, высота в нём является биссектрисой, значит, $\angle МОК = 2\angle ЛОК = 120^\circ$. Отсюда $MK = 2 \cdot MO \cdot \sin 60^\circ = 3$. $\angle МОЛ = \frac{1}{2}\angle МОК = 60^\circ$, $МО = ЛО$, следовательно, треугольник $МОЛ$ – равносторонний, $\angle МЛО = 60^\circ$, $ML = \sqrt{3}$. Тогда $\angle АЛМ = \angle АЛО - \angle МЛО = 30^\circ$.

Рассмотрим треугольник $АЛМ$. По теореме косинусов получаем, что $AM^2 = AL^2 + LM^2 - 2 \cdot AL \cdot LM \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7$. По теореме синусов $\frac{AM}{\sin 30^\circ} = \frac{LM}{\sin \alpha}$, откуда $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$. Так как угол α лежит напротив меньшей стороны треугольника, то он острый. Из треугольника $АСН$ получаем, что $CH = AC \sin \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

По теореме о касательной и секущей $AL^2 = AM \cdot AN$, откуда $AN = \frac{16}{\sqrt{7}}$, $MN = AN - AM = \frac{9}{\sqrt{7}}$. Тогда площадь треугольника $СМН$ равна $\frac{1}{2} \cdot CH \cdot MN = \frac{45\sqrt{3}}{28}$.

Так как $KM \parallel AC$, треугольники BKM и BCA подобны, при этом коэффициент подобия равен $KM : CA = 3 : 5$. Отсюда следует, что $\frac{BM}{BA} = \frac{3}{5}$, $\frac{BA - \sqrt{7}}{BA} = \frac{3}{5}$, $AB = \frac{5\sqrt{7}}{2}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от семи последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 609, а сумма расстояний от этих же семи чисел до некоторого числа b равна 721. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 192$.

Ответ: $a = 104$, $a = 191$, $a = 1$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \dots, k+6$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k+6]$, то сумма расстояний от него до данных семи чисел не превосходит $\frac{7}{2} \cdot 6 = 21$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 6, сумма расстояний до $k+1$ и $k+5$ не превосходит 6, сумма расстояний до $k+2$ и $k+4$ также не превосходит 6, расстояние до $k+3$ не превосходит половины длины отрезка между крайними числами, т.е. 3). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k; k+6]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|7a - k - (k+1) - \dots - (k+6)| = 7|a - k - 3|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $7|b - k - 3|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 7|a - k - 3| = 609, \\ 7|b - k - 3| = 721, \\ a + b = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a - k - 3| = 87, \\ |b - k - 3| = 103, \\ a + b = 192. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

- 1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k; k+6]$. Тогда

$$\begin{cases} a - k - 3 = 87, \\ b - k - 3 = 103, \\ a + b = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 88, \\ b = 104, \\ k = -2. \end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

- 2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k; k+6]$. Тогда

$$\begin{cases} -a + k + 3 = 87, \\ -b + k + 3 = 103, \\ a + b = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 104, \\ b = 88, \\ k = 188. \end{cases}$$

3) Число a лежит справа, а b – слева от отрезка $[k; k + 6]$. Тогда

$$\begin{cases} a - k - 3 = 87, \\ -b + k + 3 = 103, \\ a + b = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 191, \\ b = 1, \\ k = 101. \end{cases}$$

4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k; k + 6]$. Тогда

$$\begin{cases} -a + k + 3 = 87, \\ b - k - 3 = 103, \\ a + b = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = 191, \\ k = 85. \end{cases}$$

Итак, возможны три случая: $a = 1$, $a = 191$, $a = 104$.

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, CD$, и при этом касается ребра CD в такой точке K , что $CK = 9, KD = 1$.

а) Найдите длину ребра A_1A .

б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра A_1D_1 . Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и радиус сферы Ω .

Ответ: $A_1A = 18, V = 1944, R = 3\sqrt{10}$.

Решение. а) Из условия следует, что $BB_1 \perp ABCD$, поэтому $BB_1 \perp BC$ и грань BCC_1B_1 является прямоугольником. В этот прямоугольник можно вписать окружность (сечение сферы плоскостью BCC_1B_1), значит, эта грань является квадратом. Пусть F – точка касания данной сферы с ребром BC . Отрезки CK и CF равны как касательные к сфере, проведённые из одной точки. Кроме того, окружность, вписанная в квадрат, касается его сторон в их серединах. Следовательно, F – середина BC и $BC = 2 \cdot CF = 2 \cdot CK = 18$. Боковые рёбра параллелепипеда равны между собой, а BCC_1B_1 – квадрат, значит, $AA_1 = CC_1 = BC = 18$.

б) Центр сферы расположен на прямой, перпендикулярной плоскости квадрата BCC_1B_1 и проходящей через его центр, поэтому он равноудалён от прямых AD и A_1D_1 . Значит, если сфера касается одного из этих рёбер, то она касается и второго. Обозначим точку касания сферы с рёбрами AD через M , а окружность, получающуюся в сечении сферы плоскостью $ABCD$, через ω . Пусть O – центр ω .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle OCD + \angle ODC = \frac{1}{2}(\angle FCD + \angle MDC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. Таким образом, треугольник OCD прямоугольный, $OK = \sqrt{CK \cdot DK} = 3$.

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $BC \cdot FM = 2 \cdot CF \cdot 2 \cdot OK = 2 \cdot 9 \cdot 6 = 108$. объём параллелепипеда равен $AA_1 \cdot S_{ABCD} = 18 \cdot 108 = 1944$.

Пусть Q – центр сферы. Тогда QK – её радиус; при этом треугольник OKQ прямоугольный. Отсюда $QK = \sqrt{OK^2 + OQ^2} = \sqrt{OK^2 + \frac{1}{4}AA_1^2} = 3\sqrt{10}$.

БИЛЕТ 2

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2 - 7x + 12)$, $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-3}$ и $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-4}$ равно сумме двух остальных.

Ответ: $x = 5$.

Решение. Заметим, что на ОДЗ сумма всех трёх логарифмов равна

$$\log_{x^2} \left(\frac{x^2}{x-3} \cdot \frac{x^2}{x-4} (x^2 - 7x + 12) \right) = \log_{x^2} x^4 = 2.$$

Обозначим то число, которое равно сумме двух других через c , а два оставшихся числа через a и b . Тогда $c = a + b$ и $a + b + c = 2$, откуда следует, что $c = 1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен 1.

Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен 1, то поскольку сумма всех трёх логарифмов равна 2, то два оставшихся в сумме составляют 1, т.е. их сумма равна первому логарифму.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен 1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен 1, когда его основание равно подлогарифмическому выражению. Получаем совокупность

$$\begin{cases} x^2 = \frac{x^2}{x-3}, \\ x^2 = \frac{x^2}{x-4}, \\ x^2 = x^2 - 7x + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 4, \\ x = 5, \\ x = \frac{12}{7}. \end{cases}$$

Из найденных значений переменной только $x = 5$ удовлетворяет ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $2(g(x))^2 - f(x)$, если наименьшее значение функции $2(f(x))^2 - g(x)$ равно $\frac{7}{2}$.

Ответ: $-\frac{15}{4}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = 2(f(x))^2 - g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x) = 2(ax+b)^2 - (ax+c) = 2a^2x^2 + a(4b-1)x + 2b^2 - c$. График $y = h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_{\text{в}} = -\frac{4b-1}{4a}$; ордината вершины равна $h(x_{\text{в}}) = b - \frac{1}{8} - c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $2(g(x))^2 - f(x)$ равно $c - \frac{1}{8} - b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна $-\frac{1}{4}$, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно $\frac{7}{2}$, то второе равно $-\frac{1}{4} - \frac{7}{2} = -\frac{15}{4}$.

3. На каждой из прямых $x = 2$ и $x = 9$ отмечено по 400 точек с ординатами $1, 2, 3, \dots, 400$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 800 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 321372.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C , CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника

получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 49$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 7$, $AH = 49$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 49$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB , равную 14, можно расположить $386 \cdot 2 = 772$ способами (по 400 – 14 способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 50, и её можно расположить $2(400 - 50) = 700$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины – получаем $2 \cdot 700 = 1400$ способов.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 400 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 798 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $400 \cdot 798 = 319200$ способов.

Итого получаем $772 + 1400 + 319200 = 321372$ способов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 7$ и $2 \sin(2x - 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

Ответ: $-\frac{7}{6}$.

Решение. На ОДЗ первое равенство равносильно следующим:

$$\frac{\sin x \cos y - \sin y \cos x}{\cos x \cos y} = 3 \Leftrightarrow \sin(x - y) = 7 \cos x \cos y.$$

Преобразуем второе равенство:

$$4 \sin(x - y) \cos(x - y) = 4 \sin x \sin y \cos x \cos y.$$

Подставляем в левую часть $7 \cos x \cos y$ вместо $\sin(x - y)$ и преобразуем полученное равенство (учитываем, что в силу ОДЗ $\cos x \cos y \neq 0$):

$$\begin{aligned} 7 \cos x \cos y \cos(x - y) &= \sin x \sin y \cos x \cos y \Leftrightarrow 7 \cos(x - y) = \sin x \sin y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7 \cos x \cos y + 7 \sin x \sin y = \sin x \sin y \Leftrightarrow 7 \cos x \cos y = -6 \sin x \sin y \Leftrightarrow \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -\frac{7}{6}. \end{aligned}$$

5. Окружность Γ радиуса $2\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC , $CL = 2$, $BK = 3$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK , AB и площадь треугольника BKN .

Ответ: $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, $MK = 6$, $AB = 5\sqrt{7}$, $S_{\triangle BKN} = \frac{9\sqrt{3}}{14}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O , а угол CBA через β .

Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\operatorname{tg} \angle OCK = \frac{OK}{CK} = \sqrt{3}$ и $\angle OCK = 60^\circ$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle ACB = 2\angle OCK = 120^\circ$. Но тогда по сумме углов четырёхугольника $OLCK$ находим, что $\angle LOK = 60^\circ$.

Поскольку $OL \perp AC$ и $MK \parallel AC$, то $OL \perp MK$. Треугольник $МОК$ равнобедренный, высота в нём является биссектрисой, значит, $\angle МОК = 2\angle LОК = 120^\circ$. Отсюда $MK = 2 \cdot MO \cdot \sin 60^\circ = 6$.

В силу параллельности прямых MK и AC получаем, что $\angle MKB = 120^\circ$. Рассмотрим треугольник MKB . По теореме косинусов $BM^2 = BK^2 + KM^2 - 2 \cdot BK \cdot KM \cdot \cos 120^\circ = 63$, $BM = 3\sqrt{7}$. По теореме синусов $\frac{MK}{\sin \beta} = \frac{BM}{\sin 120^\circ}$, откуда $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{7}$.

По теореме о касательной и секущей $BK^2 = BM \cdot BN$, откуда $BN = \frac{3}{\sqrt{7}}$. Тогда площадь треугольника BKN равна $\frac{1}{2} \cdot BK \cdot BN \cdot \sin \beta = \frac{9\sqrt{3}}{14}$.

Так как $KM \parallel AC$, треугольники BKM и BCA подобны, при этом коэффициент подобия равен $BK : BC = 3 : 5$. Отсюда следует, что $\frac{BM}{BA} = \frac{3}{5}$, $\frac{3\sqrt{7}}{BA} = \frac{3}{5}$, $AB = 5\sqrt{7}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от тридцати трёх последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 3168, а сумма расстояний от этих же тридцати трёх чисел до некоторого числа b равна 924. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 120$.

Ответ: $a = 26$, $a = -2$, $a = 122$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k + 1, \dots, k + 32$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k + 32]$, то сумма расстояний от него до данных тридцати трёх чисел не превосходит $\frac{33}{2} \cdot 32 = 528$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 32, сумма расстояний до $k + 1$ и $k + 31$ не превосходит 32, сумма расстояний до $k + 2$ и $k + 30$ также не превосходит 32 и т.д.; расстояние до $k + 16$ не превосходит половины длины отрезка между крайними числами, т.е. 16). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k; k + 32]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|33a - k - (k + 1) - \dots - (k + 32)| = 33|a - k - 16|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $33|b - k - 16|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 33|a - k - 16| = 3168, \\ 33|b - k - 16| = 924, \\ a + b = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a - k - 16| = 96, \\ |b - k - 16| = 28, \\ a + b = 120. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

- 1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k; k + 32]$. Тогда

$$\begin{cases} a - k - 16 = 96, \\ b - k - 16 = 28, \\ a + b = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 94, \\ b = 26, \\ k = -18. \end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

- 2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k; k + 32]$. Тогда

$$\begin{cases} -a + k + 16 = 96, \\ -b + k + 16 = 28, \\ a + b = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 26, \\ b = 94, \\ k = 106. \end{cases}$$

- 3) Число a лежит справа, а b – слева от отрезка $[k; k + 32]$. Тогда

$$\begin{cases} a - k - 16 = 96, \\ -b + k + 16 = 28, \\ a + b = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 122, \\ b = -2, \\ k = 10. \end{cases}$$

- 4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k; k + 32]$. Тогда

$$\begin{cases} -a + k + 16 = 96, \\ b - k - 16 = 28, \\ a + b = 120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2, \\ b = 122, \\ k = 78. \end{cases}$$

Итак, возможны три случая: $a = 26$, $a = 122$, $a = -2$.

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, C_1D_1$, и при этом касается ребра C_1D_1 в такой точке K , что $C_1K = 9, KD_1 = 4$.

а) Найдите длину ребра A_1A .

б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра AD . Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и радиус сферы Ω .

Ответ: $A_1A = 18, V = 3888, R = 3\sqrt{13}$.

Решение. а) Из условия следует, что $BB_1 \perp ABCD$, поэтому $BB_1 \perp BC$ и грань BCC_1B_1 является прямоугольником. В этот прямоугольник можно вписать окружность (сечение сферы плоскостью BCC_1B_1), значит, эта грань является квадратом. Пусть F – точка касания данной сферы с ребром B_1C_1 . Отрезки C_1K и C_1F равны как касательные к сфере, проведённые из одной точки. Кроме того, окружность, вписанная в квадрат, касается его сторон в их серединах. Следовательно, F – середина B_1C_1 и $B_1C_1 = 2 \cdot C_1F = 2 \cdot C_1K = 18$. Боковые рёбра параллелепипеда равны между собой, а BCC_1B_1 – квадрат, значит, $AA_1 = CC_1 = B_1C_1 = 18$.

б) Центр сферы расположен на прямой, перпендикулярной плоскости квадрата BCC_1B_1 и проходящей через его центр, поэтому он равноудалён от прямых AD и A_1D_1 . Значит, если сфера касается одного из этих рёбер, то она касается и второго. Обозначим точку касания сферы с рёбрами A_1D_1 через M , а окружность, получающуюся в сечении сферы плоскостью $A_1B_1C_1D_1$, через ω . Пусть O – центр ω .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle OC_1D_1 + \angle OD_1C_1 = \frac{1}{2}(\angle FC_1D_1 + \angle MD_1C_1) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. Таким образом, треугольник OC_1D_1 прямоугольный, $OK = \sqrt{C_1K \cdot D_1K} = 6$.

Площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ равна $B_1C_1 \cdot FM = 2 \cdot C_1F \cdot 2 \cdot OK = 2 \cdot 9 \cdot 12 = 216$. объём параллелепипеда равен $AA_1 \cdot S_{A_1B_1C_1D_1} = 18 \cdot 216 = 3888$.

Пусть Q – центр сферы. Тогда QK – её радиус; при этом треугольник OKQ прямоугольный. Отсюда $QK = \sqrt{OK^2 + OQ^2} = \sqrt{OK^2 + \frac{1}{4}AA_1^2} = 3\sqrt{13}$.

БИЛЕТ 3

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2} (x^2 - 10x + 21)$, $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-7}$ и $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-3}$ равно сумме двух остальных.

Ответ: $x = 8$.

Решение. Заметим, что на ОДЗ сумма всех трёх логарифмов равна

$$\log_{x^2} \left(\frac{x^2}{x-3} \cdot \frac{x^2}{x-7} (x^2 - 10x + 21) \right) = \log_{x^2} x^4 = 2.$$

Обозначим то число, которое равно сумме двух других через c , а два оставшихся числа через a и b . Тогда $c = a + b$ и $a + b + c = 2$, откуда следует, что $c = 1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен 1.

Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен 1, то поскольку сумма всех трёх логарифмов равна 2, то два оставшихся в сумме составляют 1, т.е. их сумма равна первому логарифму.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен 1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен 1, когда его основание равно подлогарифмическому выражению. Получаем совокупность

$$\begin{cases} x^2 = \frac{x^2}{x-7}, \\ x^2 = \frac{x^2}{x-3}, \\ x^2 = x^2 - 10x + 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 8, \\ x = 4, \\ x = \frac{21}{10}. \end{cases}$$

Из найденных значений переменной только $x = 8$ удовлетворяет ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 + 5f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 + 5g(x)$ равно -17 .

Ответ: $\frac{9}{2}$.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = (f(x))^2 + 5g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x) = (ax + b)^2 + 5(ax + c) = a^2x^2 + a(2b + 5)x + b^2 + 5c$. График $y = h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_v = -\frac{2b+5}{2a}$; ордината вершины равна $h(x_v) = -5b - \frac{25}{4} + 5c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $(g(x))^2 + 5f(x)$ равно $-5c - \frac{25}{4} + 5b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна $-\frac{25}{2}$, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно -17 , то второе равно $-\frac{25}{2} + 17 = \frac{9}{2}$.

3. На каждой из прямых $y = 1$ и $y = 12$ отмечено по 200 точек с абсциссами $1, 2, 3, \dots, 200$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 400 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 80268.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C , CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника

получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 121$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 11$, $AH = 121$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 121$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB , равную 22, можно расположить $178 \cdot 2 = 356$ способами (по 200 – 22 способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 122, и её можно расположить $2(200 - 122) = 156$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины – получаем $2 \cdot 156 = 312$ способов.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 200 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 398 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $200 \cdot 398 = 79600$ способов.

Итого получаем $356 + 312 + 79600 = 80268$ способов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = 2$ и $5 \sin(2x - 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

Ответ: $-\frac{6}{5}$.

Решение. На ОДЗ первое равенство равносильно следующим:

$$\frac{\cos x \sin y - \cos y \sin x}{\sin x \sin y} = 3 \Leftrightarrow -\sin(x - y) = 2 \sin x \sin y.$$

Преобразуем второе равенство:

$$10 \sin(x - y) \cos(x - y) = 4 \sin x \sin y \cos x \cos y.$$

Подставляем в левую часть $-2 \sin x \sin y$ вместо $\sin(x - y)$ и преобразуем полученное равенство (учитываем, что в силу ОДЗ $\sin x \sin y \neq 0$):

$$\begin{aligned} -20 \sin x \sin y \cos(x - y) &= 4 \sin x \sin y \cos x \cos y \Leftrightarrow -5 \cos(x - y) = \cos x \cos y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5 \cos x \cos y + 5 \sin x \sin y = -\cos x \cos y \Leftrightarrow 6 \cos x \cos y = -5 \sin x \sin y. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что $\cos x \cos y \neq 0$, поэтому выражение $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ существует и $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -\frac{6}{5}$.

5. Окружность Ω радиуса $\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC , $KC = 1$, $AL = 6$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK , AB и площадь треугольника CMN .

Ответ: $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, $MK = 3$, $AB = \frac{7\sqrt{21}}{4}$, $S_{\triangle CMN} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O , основание высоты треугольника проведённой из вершины C , через H , а угол BAC через α .

Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\operatorname{tg} \angle OCK = \frac{OK}{CK} = \sqrt{3}$ и $\angle OCK = 60^\circ$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle ACB = 2\angle OCK = 120^\circ$. Но тогда по сумме углов четырёхугольника $OLCK$ находим, что $\angle LOK = 60^\circ$.

Поскольку $OL \perp AC$ и $MK \parallel AC$, то $OL \perp MK$. Треугольник $МОК$ равнобедренный, высота в нём является биссектрисой, значит, $\angle МОК = 2\angle LОК = 120^\circ$. Отсюда $MK = 2 \cdot MO \cdot \sin 60^\circ = 3$.

$\angle MOL = \frac{1}{2}\angle MOK = 60^\circ$, $MO = LO$, следовательно, треугольник MOL – равносторонний, $\angle MLO = 60^\circ$, $ML = \sqrt{3}$. Тогда $\angle ALM = \angle ALO - \angle MLO = 30^\circ$.

Рассмотрим треугольник ALM . По теореме косинусов получаем, что $AM^2 = AL^2 + LM^2 - 2 \cdot AL \cdot LM \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 21$. По теореме синусов $\frac{AM}{\sin 30^\circ} = \frac{LM}{\sin \alpha}$, откуда $\sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}}$. Так как угол α лежит напротив меньшей стороны треугольника, то он острый. Из треугольника ACH получаем, что $CH = AC \sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

По теореме о касательной и секущей $AL^2 = AM \cdot AN$, откуда $AN = \frac{36}{\sqrt{21}}$, $MN = AN - AM = \frac{15}{\sqrt{21}}$. Тогда площадь треугольника CMN равна $\frac{1}{2} \cdot CH \cdot MN = \frac{5\sqrt{3}}{4}$.

Так как $KM \parallel AC$, треугольники BKM и BCA подобны, при этом коэффициент подобия равен $KM : CA = 3 : 7$. Отсюда следует, что $\frac{BM}{BA} = \frac{3}{7}$, $\frac{BA - \sqrt{21}}{BA} = \frac{3}{7}$, $AB = \frac{7\sqrt{21}}{4}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от одиннадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 902, а сумма расстояний от этих же одиннадцати чисел до некоторого числа b равна 374. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 98$.

Ответ: $a = 107$, $a = -9$, $a = 25$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \dots, k+10$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k+10]$, то сумма расстояний от него до данных одиннадцати чисел не превосходит $\frac{11}{2} \cdot 10 = 55$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 10, сумма расстояний до $k+1$ и $k+9$ не превосходит 10, сумма расстояний до $k+2$ и $k+8$ также не превосходит 6 и т.д.; расстояние до $k+5$ не превосходит половины длины отрезка между крайними числами, т.е. 5). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k; k+10]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|11a - k - (k+1) - \dots - (k+10)| = 11|a - k - 5|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $11|b - k - 5|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 11|a - k - 5| = 902, \\ 11|b - k - 5| = 374, \\ a + b = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a - k - 5| = 82, \\ |b - k - 5| = 34, \\ a + b = 98. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

- 1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k; k+10]$. Тогда

$$\begin{cases} a - k - 5 = 82, \\ b - k - 5 = 34, \\ a + b = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 73, \\ b = 25, \\ k = -14. \end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

- 2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k; k+10]$. Тогда

$$\begin{cases} -a + k + 5 = 82, \\ -b + k + 5 = 34, \\ a + b = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 25, \\ b = 73, \\ k = 102. \end{cases}$$

- 3) Число a лежит справа, а b – слева от отрезка $[k; k+10]$. Тогда

$$\begin{cases} a - k - 5 = 82, \\ -b + k + 5 = 34, \\ a + b = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 107, \\ b = -9, \\ k = 20. \end{cases}$$

4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k; k + 10]$. Тогда

$$\begin{cases} -a + k + 5 = 82, \\ b - k - 5 = 34, \\ a + b = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -9, \\ b = 107, \\ k = 68. \end{cases}$$

Итак, возможны три случая: $a = 25$, $a = 107$, $a = -9$.

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, CD$, и при этом касается ребра CD в такой точке K , что $CK = 4, KD = 1$.

а) Найдите длину ребра A_1A .

б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра A_1D_1 . Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и радиус сферы Ω .

Ответ: $A_1A = 8, V = 256, R = 2\sqrt{5}$.

Решение. а) Из условия следует, что $BB_1 \perp ABCD$, поэтому $BB_1 \perp BC$ и грань BCC_1B_1 является прямоугольником. В этот прямоугольник можно вписать окружность (сечение сферы плоскостью BCC_1B_1), значит, эта грань является квадратом. Пусть F – точка касания данной сферы с ребром BC . Отрезки CK и CF равны как касательные к сфере, проведённые из одной точки. Кроме того, окружность, вписанная в квадрат, касается его сторон в их серединах. Следовательно, F – середина BC и $BC = 2 \cdot CF = 2 \cdot CK = 4$. Боковые рёбра параллелепипеда равны между собой, а BCC_1B_1 – квадрат, значит, $AA_1 = CC_1 = BC = 4$.

б) Центр сферы расположен на прямой, перпендикулярной плоскости квадрата BCC_1B_1 и проходящей через его центр, поэтому он равноудалён от прямых AD и A_1D_1 . Значит, если сфера касается одного из этих рёбер, то она касается и второго. Обозначим точку касания сферы с рёбрами AD через M , а окружность, получающуюся в сечении сферы плоскостью $ABCD$, через ω . Пусть O – центр ω .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle OCD + \angle ODC = \frac{1}{2}(\angle FCD + \angle MDC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. Таким образом, треугольник OCD прямоугольный, $OK = \sqrt{CK \cdot DK} = 2$.

Площадь параллелограмма $ABCD$ равна $BC \cdot FM = 2 \cdot CF \cdot 2 \cdot OK = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$. объём параллелепипеда равен $AA_1 \cdot S_{ABCD} = 8 \cdot 32 = 256$.

Пусть Q – центр сферы. Тогда QK – её радиус; при этом треугольник OKQ прямоугольный. Отсюда $QK = \sqrt{OK^2 + OQ^2} = \sqrt{OK^2 + \frac{1}{4}AA_1^2} = 2\sqrt{5}$.

БИЛЕТ 4

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_{x^2}(x^2 - 7x + 10)$, $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-2}$ и $\log_{x^2} \frac{x^2}{x-5}$ равно сумме двух остальных.

Ответ: $x = 6$.

Решение. Заметим, что на ОДЗ сумма всех трёх логарифмов равна

$$\log_{x^2} \left(\frac{x^2}{x-2} \cdot \frac{x^2}{x-5} (x^2 - 7x + 10) \right) = \log_{x^2} x^4 = 2.$$

Обозначим то число, которое равно сумме двух других через c , а два оставшихся числа через a и b . Тогда $c = a + b$ и $a + b + c = 2$, откуда следует, что $c = 1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен 1.

Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен 1, то поскольку сумма всех трёх логарифмов равна 2, то два оставшихся в сумме составляют 1, т.е. их сумма равна первому логарифму.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен 1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен 1, когда его основание равно подлогарифмическому выражению. Получаем совокупность

$$\begin{cases} x^2 = \frac{x^2}{x-2}, \\ x^2 = \frac{x^2}{x-5}, \\ x^2 = x^2 - 7x + 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3, \\ x = 6, \\ x = \frac{10}{7}. \end{cases}$$

Из найденных значений переменной только $x = 6$ удовлетворяет ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Найдите наименьшее значение функции $(g(x))^2 - 3f(x)$, если наименьшее значение функции $(f(x))^2 - 3g(x)$ равно $\frac{11}{2}$.

Ответ: -10 .

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Рассмотрим $h(x) = (f(x))^2 - 3g(x)$. Раскрывая скобки, получаем $h(x) = (ax + b)^2 - 3(ax + c) = a^2x^2 + a(2b - 3)x + b^2 - 3c$. График $y = h(x)$ – это парабола с ветвями вверх, минимальное значение принимается в вершине. Абсциссой вершины является $x_v = -\frac{2b-3}{2a}$; ордината вершины равна $h(x_v) = 3b - \frac{9}{4} - 3c$.

Аналогично получаем, что минимальное значение выражения $(g(x))^2 - 3f(x)$ равно $3c - \frac{9}{4} - 3b$. Заметим, что сумма этих двух минимальных значений равна $-\frac{9}{2}$, следовательно, если одно из этих минимальных значений равно $\frac{11}{2}$, то второе равно $-\frac{9}{2} - \frac{11}{2} = -10$.

3. На каждой из прямых $x = 2$ и $x = 15$ отмечено по 400 точек с ординатами $1, 2, 3, \dots, 400$. Сколькими способами можно выбрать три точки из отмеченных 800 так, чтобы они являлись вершинами прямоугольного треугольника?

Ответ: 320868.

Решение. Есть две возможности.

1) Гипотенуза треугольника лежит на одной из прямых, а вершина прямого угла – на второй прямой. Пусть ABC – данный треугольник с прямым углом при вершине C , CH – его высота, опущенная на гипотенузу. Из пропорциональности отрезков прямоугольного треугольника

получаем, что $CH^2 = AH \cdot BH$, т.е. $AH \cdot BH = 169$. Поскольку AH и BH – целые числа, то возможны следующие случаи: $AH = BH = 13$, $AH = 169$ и $BH = 1$, $AH = 1$ и $BH = 169$.

В первом из этих случаев гипотенузу AB , равную 26, можно расположить $374 \cdot 2 = 748$ способами (по $400 - 26$ способов расположения на каждой из двух данных прямых), при этом положение вершины C определяется однозначно.

Во втором и третьем случаях длина гипотенузы равна 170, и её можно расположить $2(400 - 170) = 460$ способами. Для каждого положения гипотенузы существует два способа размещения вершины – получаем $2 \cdot 460 = 920$ способов.

2) Один из катетов треугольника (назовём его BC) перпендикулярен данным прямым, а второй катет (AC) лежит на одной из данных прямых. Тогда положение катета BC можно выбрать 400 способами. Для каждого варианта расположения катета BC вершину A можно расположить 798 способами (подходят все точки кроме уже выбранных B и C) – всего выходит $400 \cdot 798 = 319200$ способов.

Итого получаем $748 + 920 + 319200 = 320868$ способов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4$ и $3 \sin(2x + 2y) = \sin 2x \sin 2y$. Найдите $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$.

Ответ: $\frac{7}{6}$.

Решение. На ОДЗ первое равенство равносильно следующим:

$$\frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y} = 4 \Leftrightarrow \sin(x + y) = 4 \cos x \cos y.$$

Преобразуем второе равенство:

$$6 \sin(x + y) \cos(x + y) = 4 \sin x \sin y \cos x \cos y.$$

Подставляем в левую часть $4 \cos x \cos y$ вместо $\sin(x + y)$ и преобразуем полученное равенство (учитываем, что в силу ОДЗ $\cos x \cos y \neq 0$):

$$\begin{aligned} 24 \cos x \cos y \cos(x + y) &= 4 \sin x \sin y \cos x \cos y \Leftrightarrow 6 \cos(x + y) = \sin x \sin y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 6 \cos x \cos y - 6 \sin x \sin y = \sin x \sin y \Leftrightarrow 6 \cos x \cos y = 7 \sin x \sin y. \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что $\sin x \sin y \neq 0$, поэтому выражение $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y$ существует и $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = \frac{7}{6}$.

5. Окружность Γ радиуса $4\sqrt{3}$ касается сторон BC и AC треугольника ABC в точках K и L соответственно и пересекает сторону AB в точках M и N (M лежит между A и N) так, что отрезок MK параллелен AC , $CL = 4$, $BK = 3$. Найдите $\angle ACB$, длины отрезков MK , AB и площадь треугольника BKN .

Ответ: $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$, $MK = 12$, $AB = 7\sqrt{21}$, $S_{\triangle BKN} = \frac{3\sqrt{3}}{7}$.

Решение. Обозначим центр окружности через O , а угол CBA через β .

Так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\operatorname{tg} \angle OCK = \frac{OK}{CK} = \sqrt{3}$ и $\angle OCK = 60^\circ$. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle ACB = 2\angle OCK = 120^\circ$. Но тогда по сумме углов четырёхугольника $OLCK$ находим, что $\angle LOK = 60^\circ$.

Поскольку $OL \perp AC$ и $MK \parallel AC$, то $OL \perp MK$. Треугольник $МОК$ равнобедренный, высота в нём является биссектрисой, значит, $\angle МОК = 2\angle LОК = 120^\circ$. Отсюда $MK = 2 \cdot MO \cdot \sin 60^\circ = 12$.

В силу параллельности прямых MK и AC получаем, что $\angle MKB = 120^\circ$. Рассмотрим треугольник MKB . По теореме косинусов $BM^2 = BK^2 + KM^2 - 2 \cdot BK \cdot KM \cdot \cos 120^\circ = 189$, $BM = 3\sqrt{21}$. По теореме синусов $\frac{MK}{\sin \beta} = \frac{BM}{\sin 120^\circ}$, откуда $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

По теореме о касательной и секущей $BK^2 = BM \cdot BN$, откуда $BN = \frac{3}{\sqrt{21}}$. Тогда площадь треугольника BKN равна $\frac{1}{2} \cdot BK \cdot BN \cdot \sin \beta = \frac{3\sqrt{3}}{7}$.

Так как $KM \parallel AC$, треугольники BKM и BCA подобны, при этом коэффициент подобия равен $BK : BC = 3 : 7$. Отсюда следует, что $\frac{BM}{BA} = \frac{3}{7}$, $\frac{3\sqrt{21}}{BA} = \frac{3}{7}$, $AB = 7\sqrt{21}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати девяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1624, а сумма расстояний от этих же двадцати девяти чисел до некоторого числа b равна 1305. Найдите все возможные значения a , если известно, что $a + b = 115$.

Ответ: $a = 52$, $a = 108$, $a = 7$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \dots, k+28$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k+28]$, то сумма расстояний от него до данных двадцати девяти чисел не превосходит $\frac{29}{2} \cdot 28 = 406$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 28, сумма расстояний до $k+1$ и $k+27$ не превосходит 28, сумма расстояний до $k+2$ и $k+26$ также не превосходит 28 и т.д.; расстояние до $k+14$ не превосходит половины длины отрезка между крайними числами, т.е. 14). Следовательно, числа a и b лежат вне отрезка $[k; k+28]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|29a - k - (k+1) - \dots - (k+28)| = 29|a - k - 14|$. Аналогично, сумма расстояний от числа b до каждого из данных чисел равна $29|b - k - 14|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 29|a - k - 14| = 1624, \\ 29|b - k - 14| = 1305, \\ a + b = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a - k - 14| = 56, \\ |b - k - 14| = 45, \\ a + b = 115. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

- 1) Оба числа a и b лежат справа от отрезка $[k; k+28]$. Тогда

$$\begin{cases} a - k - 14 = 56, \\ b - k - 14 = 45, \\ a + b = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 63, \\ b = 52, \\ k = -7. \end{cases}$$

Ввиду того, что k должно быть натуральным числом, этот случай не подходит.

- 2) Оба числа a и b лежат слева от отрезка $[k; k+28]$. Тогда

$$\begin{cases} -a + k + 14 = 56, \\ -b + k + 14 = 45, \\ a + b = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 52, \\ b = 63, \\ k = 94. \end{cases}$$

- 3) Число a лежит справа, а b — слева от отрезка $[k; k+28]$. Тогда

$$\begin{cases} a - k - 14 = 56, \\ -b + k + 14 = 45, \\ a + b = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 108, \\ b = 7, \\ k = 38. \end{cases}$$

4) Число b лежит справа, а a – слева от отрезка $[k; k + 28]$. Тогда

$$\begin{cases} -a + k + 14 = 56, \\ b - k - 14 = 45, \\ a + b = 115 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7, \\ b = 108, \\ k = 49. \end{cases}$$

Итак, возможны три случая: $a = 52$, $a = 108$, $a = 7$.

7. Ребро A_1A параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярно его грани $ABCD$. Сфера Ω касается рёбер $BB_1, B_1C_1, C_1C, CB, C_1D_1$, и при этом касается ребра C_1D_1 в такой точке K , что $C_1K = 16, KD_1 = 1$.

а) Найдите длину ребра A_1A .

б) Пусть дополнительно известно, что сфера Ω касается ребра AD . Найдите объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и радиус сферы Ω .

Ответ: $A_1A = 32, V = 8192, R = 4\sqrt{17}$.

Решение. а) Из условия следует, что $BB_1 \perp ABCD$, поэтому $BB_1 \perp BC$ и грань BCC_1B_1 является прямоугольником. В этот прямоугольник можно вписать окружность (сечение сферы плоскостью BCC_1B_1), значит, эта грань является квадратом. Пусть F – точка касания данной сферы с ребром B_1C_1 . Отрезки C_1K и C_1F равны как касательные к сфере, проведённые из одной точки. Кроме того, окружность, вписанная в квадрат, касается его сторон в их серединах. Следовательно, F – середина B_1C_1 и $B_1C_1 = 2 \cdot C_1F = 2 \cdot C_1K = 32$. Боковые рёбра параллелепипеда равны между собой, а BCC_1B_1 – квадрат, значит, $AA_1 = CC_1 = B_1C_1 = 32$.

б) Центр сферы расположен на прямой, перпендикулярной плоскости квадрата BCC_1B_1 и проходящей через его центр, поэтому он равноудалён от прямых AD и A_1D_1 . Значит, если сфера касается одного из этих рёбер, то она касается и второго. Обозначим точку касания сферы с рёбрами A_1D_1 через M , а окружность, получающуюся в сечении сферы плоскостью $A_1B_1C_1D_1$, через ω . Пусть O – центр ω .

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла, поэтому $\angle OC_1D_1 + \angle OD_1C_1 = \frac{1}{2}(\angle FC_1D_1 + \angle MD_1C_1) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$. Таким образом, треугольник OC_1D_1 прямоугольный, $OK = \sqrt{C_1K \cdot D_1K} = 4$.

Площадь параллелограмма $A_1B_1C_1D_1$ равна $B_1C_1 \cdot FM = 2 \cdot C_1F \cdot 2 \cdot OK = 2 \cdot 16 \cdot 8 = 256$. объём параллелепипеда равен $AA_1 \cdot S_{A_1B_1C_1D_1} = 32 \cdot 256 = 8192$.

Пусть Q – центр сферы. Тогда QK – её радиус; при этом треугольник OKQ прямоугольный.

Отсюда $QK = \sqrt{OK^2 + OQ^2} = \sqrt{OK^2 + \frac{1}{4}AA_1^2} = 4\sqrt{17}$.

БИЛЕТ 9

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x(x - \frac{3}{2})$, $\log_{x-\frac{3}{2}}(x - 3)$ и $\log_{x-3} x$ равно произведению двух остальных.

Ответ: $x = \frac{7}{2}$, $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Решение. Заметим, что на ОДЗ произведение всех трёх логарифмов равно

$$\log_x(x - \frac{3}{2}) \cdot \log_{x-\frac{3}{2}}(x - 3) \cdot \log_{x-3} x = 1$$

Обозначим то число, которое равно произведению двух других через c , а два оставшихся числа через a и b . Тогда $c = ab$ и $abc = 1$, откуда следует, что $c^2 = 1$, $c = \pm 1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен ± 1 .

Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен ± 1 , то поскольку произведение всех трёх логарифмов равно 1, то и произведение двух остальных равно ± 1 , т.е. первому логарифму.

Заметим, что у всех трёх данных логарифмов основание и подлогарифмическое выражение не равны ни при каких x , поэтому они отличны от 1.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен -1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен -1 , когда произведение его основания и подлогарифмического выражения равно 1. Получаем совокупность

$$\begin{cases} x(x - \frac{3}{2}) = 1, \\ x(x - 3) = 1, \\ (x - 3)(x - \frac{3}{2}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = -\frac{1}{2}, \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x = \frac{7}{2}, \\ x = 1. \end{cases}$$

Из найденных значений переменной только $x = \frac{7}{2}$ и $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ удовлетворяют ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 7g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

Ответ: $A = -7$, $A = 0$.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Касание графиков $y = (f(x))^2$ и $y = 7g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2 = 7g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax + b)^2 = 7(ax + c)$, $a^2x^2 + a(2b - 7)x + b^2 - 7c = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $a^2(2b - 7)^2 - 4a^2(b^2 - 7c) = 7a^2(7 - 4b + 4c)$, откуда $4b - 4c = 7$.

Аналогично, касание графиков $y = (g(x))^2$ и $y = Af(x)$ означает, что уравнение $(g(x))^2 = Af(x)$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно следующим: $(ax + c)^2 = A(ax + b)$, $a^2x^2 + a(2c - A)x + c^2 - Ab = 0$. Дискриминант равен $D = a^2(2c - A)^2 - 4a^2(c^2 - Ab) = a^2A(A - 4c + 4b)$. Он обращается в ноль при $A = 0$ и $A = 4c - 4b = -7$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 3 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 27^{47} .

Ответ: 5111.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x - 3^a)(x - 3^b)$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$ – целые числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a \geq b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2 - (3^a + 3^b)x + 3^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases} 3^a + 3^b \leq 27^{47}, \\ 3^{a+b} \leq 27^{47} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^a + 3^b \leq 3^{141}, \\ a + b \leq 141. \end{cases}$$

Заметим, что если выполняется второе неравенство, то первое неравенство верно за исключением одного случая $a = 141, b = 0$. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b :

$$\begin{aligned} a = 141 &\Rightarrow 0 \text{ значений } b; \\ a = 140 &\Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1\}); \\ a = 139 &\Rightarrow 3 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1; 2\}); \\ &\dots\dots\dots \\ a = 71 &\Rightarrow 71 \text{ значение } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 70\}); \\ a = 70 &\Rightarrow 71 \text{ значение } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 70\}); \\ a = 69 &\Rightarrow 70 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 69\}); \\ a = 68 &\Rightarrow 69 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 68\}); \\ &\dots\dots\dots \\ a = 1 &\Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1\}); \\ a = 0 &\Rightarrow 1 \text{ значение } b \ (b = 0). \end{aligned}$$

Суммируя, получаем $(2 + 3 + 4 + \dots + 71) + (71 + 70 + 69 + \dots + 1) = 5111$ вариантов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\cos y + \cos x = \sin 3x$ и $\sin 2y - \sin 2x = \cos 4x - \cos 2x$. Какое *наименьшее* значение может принимать сумма $\sin y + \sin x$?

Ответ: $-1 - \sin \frac{3\pi}{8} = -1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Решение. Преобразуем второе равенство:

$$\sin 2y = 2 \sin x \cos x - 2 \sin 3x \sin x \Leftrightarrow \sin 2y = 2 \sin x (\cos x - \sin 3x).$$

Подставляя сюда $-\cos y$ вместо $\cos x - \sin 3x$, получаем $\sin 2y = -2 \sin x \cos y$, $2 \sin y \cos y + 2 \sin x \cos y = 0$, $\cos y (\sin y + \sin x) = 0$, откуда есть две возможности.

1) $\sin x + \sin y = 0$, т.е. искомое выражение обращается в ноль.

2) $\cos y = 0$. Тогда $y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, а из первого уравнения получаем, что

$$\cos x - \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos \left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} - \pi k, \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тогда минимальное значение суммы $\sin y + \sin x$ принимается при $y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $x = -\frac{3\pi}{8} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, и оно равно $-1 - \sin \frac{3\pi}{8}$.

Чтобы вычислить $\sin \frac{3\pi}{8}$, применим формулу косинуса двойного угла: $\cos \frac{3\pi}{4} = 1 - 2\sin^2 \frac{3\pi}{8}$, откуда $\sin \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{3\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Итак, при заданных условиях $\min(\sin x + \sin y) = -1 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с радиусом 5 описана вокруг треугольника ABM , где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 6. Найдите длины отрезков AD , BK и периметр треугольника EBM .

Ответ: $AD = 10, BK = \frac{48}{5}, P_{EBM} = \frac{84}{5}$.

Решение. Обозначим градусные меры дуг BM и AE через 2α и 4α соответственно. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle ABE = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha = 2\alpha$, $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \alpha$.

В треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, поэтому треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, $ABCD$ – ромб. У ромба диагонали взаимно перпендикулярны, значит, угол AMB прямой и AB – диаметр окружности. Значит, $\angle BKA = \angle BEA = 90^\circ$. Так как $BE \parallel AK$, получаем, что $AEBK$ – прямоугольник, а значит, EK – также диаметр. Наконец, из параллельности AD и BC имеем $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Радиус окружности равен 5, значит, $EK = AB = 10$; $AD = AB = 10$ (как стороны ромба). Хорды MK и BM равны (т.к. равны соответствующие им дуги), $BM = 6$. Тогда $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 8$, и из треугольника ABM находим, что $\cos \alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{3}{5}$. Отсюда $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{7}{25}$.

Далее вычисляем: $BK = AB \sin 2\alpha = 10 \cdot \frac{24}{25} = \frac{48}{5}$; $BE = AB \cos 2\alpha = 10 \cdot \frac{7}{25} = \frac{14}{5}$. Так как EK – диаметр, то $\angle EMK = 90^\circ$, $EM = \sqrt{EK^2 - KM^2} = 8$. Следовательно, периметр треугольника EBM равен $6 + 8 + \frac{14}{5} = \frac{84}{5}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от шестнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 636, а сумма расстояний от этих же шестнадцати чисел до числа a^2 равна 591. Найдите все возможные значения a .

Ответ: $a = -\frac{5}{4}$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \dots, k+15$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k+15]$, то сумма расстояний от него до данных шестнадцати чисел не превосходит $8 \cdot 15 = 120$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 15, сумма расстояний до $k+1$ и $k+14$ не превосходит 15, сумма расстояний до $k+2$ и $k+13$ также не превосходит 15 и т.д.). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k; k+15]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|16a - k - (k+1) - \dots - (k+15)| = |16a - 16k - 120|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|16a^2 - 16k - 120|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |16a^2 - 16k - 120| = 591, \\ |16a - 16k - 120| = 636. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k; k + 15]$. Тогда

$$\begin{cases} 16a^2 - 16k - 120 = 591, \\ 16a - 16k - 120 = 636 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a - 16k - 120 = 636, \\ 16a^2 - 16a + 45 = 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, поэтому решений нет.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k; k + 15]$. Тогда

$$\begin{cases} 16k + 120 - 16a^2 = 591, \\ 16k + 120 - 16a = 636 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16k + 120 - 16a = 636, \\ 16a^2 - 16a - 45 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 32,25, \\ a = -1,25, \\ a = 2,25 \end{cases}$$

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то подходит только случай $a = -1,25$ (тогда $k = 31$); в случае $a = 2,25$ оказывается, что $k = 34,5$.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k; k + 15]$. Тогда

$$\begin{cases} 16a^2 - 16k - 120 = 591, \\ 16k + 120 - 16a = 636 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16k + 120 - 16a = 636, \\ 16a^2 - 16a - 1227 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение равносильно следующему: $2a^2 - 2a - \frac{1227}{8} = 0$; $D = 4 + 1227 = 1231$; $a = \frac{2 \pm \sqrt{1231}}{4}$. Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k; k + 15]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a > a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0; 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможно только, что $a = -1,25 = -\frac{5}{4}$.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрана точка M . Сфера, построенная на отрезке $C_1 M$ как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре $B_1 B$. Известно, что $BM = 1$, $CM = 24$. Найдите длину ребра AA_1 , радиус сферы и объём параллелепипеда.

Ответ: $AA_1 = 26$, $R = 5$, $V = 1250$.

Решение. Так как центр сферы – середина отрезка $C_1 M$ – лежит в грани $BCC_1 B_1$, то сфера этой грани не касается. Заметим, что если отрезок $C_1 M$ не перпендикулярен плоскостям $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$, то сфера их не касается, что невозможно, так как по условию сфера касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда. Отметим далее, что сфера не может касаться грани $CC_1 D_1 D$ (касание означало бы, что $MC_1 \perp CC_1 D_1 D$, и отсюда следовало бы, что плоскости $CC_1 D_1 D$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ совпадают). Значит, сфера касается граней $ABCD$, $A_1 B_1 C_1 D_1$, $AA_1 D_1 D$ и $ABB_1 A_1$, притом последней в точке, лежащей на ребре BB_1 (обозначим её T).

Рассмотрим параллелограмм $BB_1 C_1 C$. Противоположные стороны параллелограмма равны, следовательно, $B_1 C_1 = BC = BM + MC = 1 + 24 = 25$. Используя равенство касательных, проведённых к окружности из одной точки, находим, что $B_1 T = B_1 C_1 = 25$, $BT = BM = 1$. Значит, $CC_1 = BB_1 = BT + TB_1 = 26$. По теореме Пифагора для треугольника $CC_1 M$ находим, что $C_1 M = \sqrt{CC_1^2 - CM^2} = 10$, откуда радиус сферы равен 5.

Объём параллелепипеда V равен произведению площади его основания на высоту. В качестве основания выберем $BCC_1 B_1$; тогда высота равна радиусу сферы (т.к. центр сферы лежит в грани $BCC_1 B_1$ и она касается грани $AA_1 D_1 D$). Площадь основания равна $C_1 M \cdot BC = 10 \cdot 25 = 250$. Следовательно, $V = 5 \cdot 250 = 1250$.

БИЛЕТ 10

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x(x - \frac{5}{2})$, $\log_{x-\frac{5}{2}}(x - 4)$ и $\log_{x-4}x$ равно произведению двух остальных.

Ответ: $x = \frac{9}{2}$, $x = 2 + \sqrt{5}$.

Решение. Заметим, что на ОДЗ произведение всех трёх логарифмов равно

$$\log_x(x - \frac{3}{2}) \cdot \log_{x-\frac{3}{2}}(x - 3) \cdot \log_{x-3}x = 1$$

Обозначим то число, которое равно произведению двух других через c , а два оставшихся числа через a и b . Тогда $c = ab$ и $abc = 1$, откуда следует, что $c^2 = 1$, $c = \pm 1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен ± 1 .

Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен ± 1 , то поскольку произведение всех трёх логарифмов равно 1, то и произведение двух остальных равно ± 1 , т.е. первому логарифму.

Заметим, что у всех трёх данных логарифмов основание и подлогарифмическое выражение не равны ни при каких x , поэтому они отличны от 1.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен -1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен -1 , когда произведение его основания и подлогарифмического выражения равно 1. Получаем совокупность

$$\begin{cases} x(x - \frac{5}{2}) = 1, \\ x(x - 4) = 1, \\ (x - 4)(x - \frac{5}{2}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}, \\ x = 2 \pm \sqrt{5}, \\ x = \frac{9}{2}, \\ x = 2. \end{cases}$$

Из найденных значений переменной только $x = \frac{9}{2}$ и $x = 2 + \sqrt{5}$ удовлетворяют ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = -12g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

Ответ: $A = 12$, $A = 0$.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Касание графиков $y = (f(x))^2$ и $y = -12g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2 = -12g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax + b)^2 = -12(ax + c)$, $a^2x^2 + 2a(b + 6)x + b^2 + 12c = 0$. Четверть дискриминанта этого уравнения равна $a^2(b + 6)^2 - a^2(b^2 + 12c) = 12a^2(3 + b - c)$, откуда $b - c = -3$.

Аналогично, касание графиков $y = (g(x))^2$ и $y = Af(x)$ означает, что уравнение $(g(x))^2 = Af(x)$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно следующим: $(ax + c)^2 = A(ax + b)$, $a^2x^2 + a(2c - A)x + c^2 - Ab = 0$. Дискриминант равен $D = a^2(2c - A)^2 - 4a^2(c^2 - Ab) = a^2A(A - 4c + 4b)$. Он обращается в ноль при $A = 0$ и $A = 4c - 4b = 12$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 5 с целыми неотрицательными показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 125^{85} .

Ответ: 16511.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x - 5^a)(x - 5^b)$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$ – целые числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a \geq b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2 - (5^a + 5^b)x + 5^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases} 5^a + 5^b \leq 125^{85}, \\ 5^{a+b} \leq 125^{85} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^a + 5^b \leq 5^{255}, \\ a + b \leq 255. \end{cases}$$

Заметим, что если выполняется второе неравенство, то первое неравенство верно за исключением одного случая $a = 255, b = 0$. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b :

$$\begin{aligned} a = 255 &\Rightarrow 0 \text{ значений } b; \\ a = 254 &\Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1\}); \\ a = 253 &\Rightarrow 3 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1; 2\}); \\ &\dots\dots\dots \\ a = 128 &\Rightarrow 128 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 127\}); \\ a = 127 &\Rightarrow 128 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 127\}); \\ a = 126 &\Rightarrow 127 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 126\}); \\ a = 125 &\Rightarrow 126 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 125\}); \\ &\dots\dots\dots \\ a = 1 &\Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1\}); \\ a = 0 &\Rightarrow 1 \text{ значение } b \ (b = 0). \end{aligned}$$

Суммируя, получаем $(2 + 3 + 4 + \dots + 128) + (128 + 127 + 126 + \dots + 1) = 16511$ вариантов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\cos y + \sin x + \cos 3x = 0$ и $\sin 2y - \sin 2x = \cos 4x + \cos 2x$. Какое *наибольшее* значение может принимать сумма $\sin y + \cos x$?

Ответ: $1 + \sin \frac{3\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Решение. Преобразуем второе равенство:

$$\sin 2y = 2 \sin x \cos x + 2 \cos 3x \cos x \Leftrightarrow \sin 2y = 2 \cos x (\sin x + \cos 3x).$$

Подставляя сюда $-\cos y$ вместо $\sin x + \cos 3x$, получаем $\sin 2y = -2 \cos x \cos y$, $2 \sin y \cos y + 2 \cos x \cos y = 0$, $\cos y (\sin y + \cos x) = 0$, откуда есть две возможности.

1) $\cos x + \sin y = 0$, т.е. искомое выражение обращается в ноль.

2) $\cos y = 0$. Тогда $y = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, а из первого уравнения получаем, что

$$\sin x + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 3x = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тогда максимальное значение суммы $\sin y + \cos x$ принимается при $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{3\pi}{8} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, и оно равно $1 + \sin \frac{3\pi}{8}$.

Чтобы вычислить $\sin \frac{3\pi}{8}$, применим формулу косинуса двойного угла: $\cos \frac{3\pi}{4} = 1 - 2 \sin^2 \frac{3\pi}{8}$, откуда $\sin \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{3\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Итак, при заданных условиях $\max(\cos x + \sin y) = 1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 17 описана вокруг треугольника ABM , где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 8. Найдите длины отрезков AD , BK и периметр треугольника EVM .

Ответ: $AD = 17, BK = \frac{240}{17}, P_{EVM} = \frac{552}{17}$.

Решение. Обозначим градусные меры дуг BM и AE через 2α и 4α соответственно. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle ABE = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha = 2\alpha$, $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \alpha$.

В треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, поэтому треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, $ABCD$ – ромб. У ромба диагонали взаимно перпендикулярны, значит, угол AMB прямой и AB – диаметр окружности. Значит, $\angle BKA = \angle BEA = 90^\circ$. Так как $BE \parallel AK$, получаем, что $AEBK$ – прямоугольник, а значит, EK – также диаметр. Наконец, из параллельности AD и BC имеем $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Диаметр окружности равен 17, значит, $EK = AB = 17$; $AD = AB = 17$ (как стороны ромба). Хорды MK и BM равны (т.к. равны соответствующие им дуги), $BM = 8$. Тогда $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 15$, и из треугольника ABM находим, что $\cos \alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{15}{17}$, $\sin \alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{8}{17}$. Отсюда $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{240}{289}$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{161}{289}$.

Далее вычисляем: $BK = AB \sin 2\alpha = 17 \cdot \frac{240}{289} = \frac{240}{17}$; $BE = AB \cos 2\alpha = 17 \cdot \frac{161}{289} = \frac{161}{17}$. Так как EK – диаметр, то $\angle EMK = 90^\circ$, $EM = \sqrt{EK^2 - KM^2} = 15$. Следовательно, периметр треугольника EVM равен $15 + 8 + \frac{161}{17} = \frac{552}{17}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати семи последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1926, а сумма расстояний от этих же двадцати семи чисел до числа a^2 равна 1932. Найдите все возможные значения a .

Ответ: $a = \frac{2}{3}$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \dots, k+26$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k+26]$, то сумма расстояний от него до данных двадцати семи чисел не превосходит $\frac{27}{2} \cdot 26 = 351$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 26, сумма расстояний до $k+1$ и $k+25$ не превосходит 26, сумма расстояний до $k+2$ и $k+24$ также не превосходит 26 и т.д.; расстояние до $k+13$ не превосходит половины длины отрезка, т.е. 13). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k; k+26]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|27a - k - (k+1) - \dots - (k+26)| = |27a - 27k - 351|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|27a^2 - 27k - 351|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |27a^2 - 27k - 351| = 1932, \\ |27a - 27k - 351| = 1926. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

- 1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k; k+26]$. Тогда

$$\begin{cases} 27a^2 - 27k - 351 = 1932, \\ 27a - 27k - 351 = 1926 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27a^2 - 27k - 351 = 1932, \\ 27a^2 - 27a - 6 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение равносильно следующему: $3a^2 - 3a - \frac{2}{3} = 0$; $D = 9 + 8 = 17$; $a = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{6}$. Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k; k + 26]$. Тогда

$$\begin{cases} 27k + 351 - 27a^2 = 1932, \\ 27k + 351 - 27a = 1926 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27k + 351 - 27a = 1926, \\ 9a^2 - 9a + 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 58\frac{1}{3}, \\ a = \frac{2}{3}, \\ a = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то подходит только случай $a = \frac{2}{3}$ (тогда $k = 59$); в случае $a = \frac{1}{3}$ оказывается, что $k = 58\frac{2}{3}$.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k; k + 26]$. Тогда

$$\begin{cases} 27a^2 - 27k - 351 = 1932, \\ 27k + 351 - 27a = 1926 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27k + 351 - 27a = 1926, \\ 9a^2 - 9a - 1286 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение равносильно следующему: $3a^2 - 3a - \frac{1286}{3} = 0$; $D = 9 + 4 \cdot 1286 = 5153$; $a = \frac{3 \pm \sqrt{5153}}{6}$. Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k; k + 15]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a > a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0; 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможно только, что $a = \frac{2}{3}$.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрана точка M . Сфера, построенная на отрезке $C_1 M$ как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре $B_1 B$. Известно, что $BM = 1$, $CM = 15$. Найдите длину ребра AA_1 , радиус сферы и объём параллелепипеда.

Ответ: $AA_1 = 17$, $R = 4$, $V = 512$.

Решение. Так как центр сферы – середина отрезка $C_1 M$ – лежит в грани $BCC_1 B_1$, то сфера этой грани не касается. Заметим, что если отрезок $C_1 M$ не перпендикулярен плоскостям $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$, то сфера их не касается, что невозможно, так как по условию сфера касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда. Отметим далее, что сфера не может касаться грани $CC_1 D_1 D$ (касание означало бы, что $MC_1 \perp CC_1 D_1 D$, и отсюда следовало бы, что плоскости $CC_1 D_1 D$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ совпадают). Значит, сфера касается граней $ABCD$, $A_1 B_1 C_1 D_1$, $AA_1 D_1 D$ и $ABB_1 A_1$, притом последней в точке, лежащей на ребре BB_1 (обозначим её T).

Рассмотрим параллелограмм $BB_1 C_1 C$. Противоположные стороны параллелограмма равны, следовательно, $B_1 C_1 = BC = BM + MC = 1 + 15 = 16$. Используя равенство касательных, проведённых к окружности из одной точки, находим, что $B_1 T = B_1 C_1 = 16$, $BT = BM = 1$. Значит, $CC_1 = BB_1 = BT + TB_1 = 17$. По теореме Пифагора для треугольника $CC_1 M$ находим, что $C_1 M = \sqrt{CC_1^2 - CM^2} = 8$, откуда радиус сферы равен 4.

Объём параллелепипеда V равен произведению площади его основания на высоту. В качестве основания выберем $BCC_1 B_1$; тогда высота равна радиусу сферы (т.к. центр сферы лежит в грани $BCC_1 B_1$ и она касается грани $AA_1 D_1 D$). Площадь основания равна $C_1 M \cdot BC = 8 \cdot 16 = 128$. Следовательно, $V = 4 \cdot 128 = 512$.

БИЛЕТ 11

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x \left(x - \frac{13}{6}\right)$, $\log_{x-\frac{13}{6}}(x-3)$ и $\log_{x-3} x$ равно произведению двух остальных.

Ответ: $x = \frac{11}{3}$, $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Решение. Заметим, что на ОДЗ произведение всех трёх логарифмов равно

$$\log_x \left(x - \frac{13}{6}\right) \cdot \log_{x-\frac{13}{6}}(x-3) \cdot \log_{x-3} x = 1$$

Обозначим то число, которое равно произведению двух других через c , а два оставшихся числа через a и b . Тогда $c = ab$ и $abc = 1$, откуда следует, что $c^2 = 1$, $c = \pm 1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен ± 1 .

Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен ± 1 , то поскольку произведение всех трёх логарифмов равно 1, то и произведение двух остальных равно ± 1 , т.е. первому логарифму.

Заметим, что у всех трёх данных логарифмов основание и подлогарифмическое выражение не равны ни при каких x , поэтому они отличны от 1.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен -1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен -1 , когда произведение его основания и подлогарифмического выражения равно 1. Получаем совокупность

$$\begin{cases} x \left(x - \frac{13}{6}\right) = 1, \\ x(x-3) = 1, \\ (x-3) \left(x - \frac{13}{6}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13 \pm \sqrt{313}}{12}, \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x = \frac{11}{3}, \\ x = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Из найденных значений переменной только $x = \frac{11}{3}$ и $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ удовлетворяют ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = 4g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

Ответ: $A = -4$, $A = 0$.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Касание графиков $y = (f(x))^2$ и $y = 4g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2 = 4g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax + b)^2 = 4(ax + c)$, $a^2x^2 + 2a(b-2)x + b^2 - 4c = 0$. Четверть дискриминанта этого уравнения равна $a^2(b-2)^2 - a^2(b^2 - 4c) = 4a^2(c - b + 1)$, откуда $b - c = 1$.

Аналогично, касание графиков $y = (g(x))^2$ и $y = Af(x)$ означает, что уравнение $(g(x))^2 = Af(x)$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно следующим: $(ax + c)^2 = A(ax + b)$, $a^2x^2 + a(2c - A)x + c^2 - Ab = 0$. Дискриминант равен $D = a^2(2c - A)^2 - 4a^2(c^2 - Ab) = a^2A(A - 4c + 4b)$. Он обращается в ноль при $A = 0$ и $A = 4c - 4b = -4$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень, все их корни являются степенями числа 7 с *целыми неотрицательными* показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 49^{68} .

Ответ: 4760.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x - 7^a)(x - 7^b)$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$ – целые числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a \geq b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2 - (7^a + 7^b)x + 7^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases} 7^a + 7^b \leq 49^{68}, \\ 7^{a+b} \leq 49^{68} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^a + 7^b \leq 7^{136}, \\ a + b \leq 136. \end{cases}$$

Заметим, что если выполняется второе неравенство, то первое неравенство верно за исключением одного случая $a = 136, b = 0$. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b :

$$\begin{aligned} a = 136 &\Rightarrow 0 \text{ значений } b; \\ a = 135 &\Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1\}); \\ a = 134 &\Rightarrow 3 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1; 2\}); \\ &\dots\dots\dots \\ a = 69 &\Rightarrow 68 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 67\}); \\ a = 68 &\Rightarrow 69 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 68\}); \\ a = 67 &\Rightarrow 68 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 67\}); \\ a = 66 &\Rightarrow 67 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 66\}); \\ &\dots\dots\dots \\ a = 1 &\Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1\}); \\ a = 0 &\Rightarrow 1 \text{ значение } b \ (b = 0). \end{aligned}$$

Суммируя, получаем $(2 + 3 + 4 + \dots + 69) + (68 + 67 + 66 + \dots + 1) = 4760$ вариантов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\sin y + \cos x = \sin 3x$ и $\sin 2y - \sin 2x = \cos 4x - \cos 2x$. Какое *наименьшее* значение может принимать сумма $\cos y + \sin x$?

Ответ: $-1 - \sin \frac{3\pi}{8} = -1 - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Решение. Преобразуем второе равенство:

$$\sin 2y = 2 \sin x \cos x - 2 \sin 3x \sin x \Leftrightarrow \sin 2y = 2 \sin x (\cos x - \sin 3x).$$

Подставляя сюда $-\sin y$ вместо $\cos x - \sin 3x$, получаем $\sin 2y = -2 \sin x \sin y$, $2 \sin y \cos y + 2 \sin x \sin y = 0$, $\sin y (\cos y + \sin x) = 0$, откуда есть две возможности.

1) $\sin x + \cos y = 0$, т.е. искомое выражение обращается в ноль.

2) $\sin y = 0$. Тогда $y = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, а из первого уравнения получаем, что

$$\cos x - \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos \left(3x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \frac{\pi}{2} - 3x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} - \pi k, \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тогда минимальное значение суммы $\cos y + \sin x$ принимается при $y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $x = -\frac{3\pi}{8} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, и оно равно $-1 - \sin \frac{3\pi}{8}$.

Чтобы вычислить $\sin \frac{3\pi}{8}$, применим формулу косинуса двойного угла: $\cos \frac{3\pi}{4} = 1 - 2\sin^2 \frac{3\pi}{8}$, откуда $\sin \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{3\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Итак, при заданных условиях $\min(\sin x + \sin y) = -1 - \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 5 описана вокруг треугольника ABM , где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 3. Найдите длины отрезков BC , BK и периметр треугольника EBM .

Ответ: $BC = 5, BK = \frac{24}{5}, P_{EBM} = \frac{42}{5}$.

Решение. Обозначим градусные меры дуг BM и AE через 2α и 4α соответственно. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle ABE = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha = 2\alpha$, $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \alpha$.

В треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, поэтому треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, $ABCD$ – ромб. У ромба диагонали взаимно перпендикулярны, значит, угол AMB прямой и AB – диаметр окружности. Значит, $\angle BKA = \angle BEA = 90^\circ$. Так как $BE \parallel AK$, получаем, что $AEBK$ – прямоугольник, а значит, EK – также диаметр. Наконец, из параллельности AD и BC имеем $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Диаметр окружности равен 5, значит, $EK = AB = 5$; $BC = AB = 5$ (как стороны ромба). Хорды MK и BM равны (т.к. равны соответствующие им дуги), $BM = 3$. Тогда $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 4$, и из треугольника ABM находим, что $\cos \alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{3}{5}$. Отсюда $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{7}{25}$.

Далее вычисляем: $BK = AB \sin 2\alpha = 5 \cdot \frac{24}{25} = \frac{24}{5}$; $BE = AB \cos 2\alpha = 5 \cdot \frac{7}{25} = \frac{7}{5}$. Так как EK – диаметр, то $\angle EMK = 90^\circ$, $EM = \sqrt{EK^2 - KM^2} = 4$. Следовательно, периметр треугольника EBM равен $3 + 4 + \frac{7}{5} = \frac{42}{5}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от восемнадцати последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1005, а сумма расстояний от этих же восемнадцати чисел до числа a^2 равна 865. Найдите все возможные значения a .

Ответ: $a = -\frac{7}{3}$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k+1, \dots, k+17$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k+17]$, то сумма расстояний от него до данных восемнадцати чисел не превосходит $9 \cdot 17 = 153$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 17, сумма расстояний до $k+1$ и $k+16$ не превосходит 17, сумма расстояний до $k+2$ и $k+15$ также не превосходит 17 и т.д.). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k; k+17]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|18a - k - (k+1) - \dots - (k+17)| = |18a - 18k - 153|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|18a^2 - 18k - 153|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |18a^2 - 18k - 153| = 865, \\ |18a - 18k - 153| = 1005. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k; k + 17]$. Тогда

$$\begin{cases} 18a^2 - 18k - 153 = 865, \\ 18a - 18k - 153 = 1005 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18a - 18k - 153 = 1005, \\ 9a^2 - 9a + 70 = 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, поэтому решений нет.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k; k + 17]$. Тогда

$$\begin{cases} 18k + 153 - 18a^2 = 865, \\ 18k + 153 - 18a = 1005 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18k + 153 - 18a = 1005, \\ 9a^2 - 9a - 70 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 47\frac{1}{3}, \\ a = -\frac{7}{3}, \\ a = \frac{10}{3} \end{cases}$$

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то подходит только случай $a = -\frac{7}{3}$ (тогда $k = 45$); в случае $a = \frac{10}{3}$ оказывается, что $k = 50\frac{2}{3}$.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k; k + 17]$. Тогда

$$\begin{cases} 18a^2 - 18k - 153 = 865, \\ 18k + 153 - 18a = 1005 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18k + 153 - 18a = 1005, \\ 9a^2 - 9a - 935 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение равносильно следующему: $3a^2 - 3a - \frac{935}{3} = 0$; $D = 9 + 4 \cdot 935 = 3749$; $a = \frac{3 \pm \sqrt{3749}}{6}$. Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k; k + 17]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a > a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0; 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможно только, что $a = -\frac{7}{3}$.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрана точка M . Сфера, построенная на отрезке $C_1 M$ как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре $B_1 B$. Известно, что $BM = 1$, $CM = 8$. Найдите длину ребра AA_1 , радиус сферы и объём параллелепипеда.

Ответ: $R = 3$, $AA_1 = 10$, $V = 162$.

Решение. Так как центр сферы – середина отрезка $C_1 M$ – лежит в грани $BCC_1 B_1$, то сфера этой грани не касается. Заметим, что если отрезок $C_1 M$ не перпендикулярен плоскостям $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$, то сфера их не касается, что невозможно, так как по условию сфера касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда. Отметим далее, что сфера не может касаться грани $CC_1 D_1 D$ (касание означало бы, что $MC_1 \perp CC_1 D_1 D$, и отсюда следовало бы, что плоскости $CC_1 D_1 D$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ совпадают). Значит, сфера касается граней $ABCD$, $A_1 B_1 C_1 D_1$, $AA_1 D_1 D$ и $ABB_1 A_1$, притом последней в точке, лежащей на ребре BB_1 (обозначим её T).

Рассмотрим параллелограмм $BB_1 C_1 C$. Противоположные стороны параллелограмма равны, следовательно, $B_1 C_1 = BC = BM + MC = 1 + 8 = 9$. Используя равенство касательных, проведённых к окружности из одной точки, находим, что $B_1 T = B_1 C_1 = 9$, $BT = BM = 1$. Значит, $CC_1 = BB_1 = BT + TB_1 = 10$. По теореме Пифагора для треугольника $CC_1 M$ находим, что $C_1 M = \sqrt{CC_1^2 - CM^2} = 6$, откуда радиус сферы равен 3.

Объём параллелепипеда V равен произведению площади его основания на высоту. В качестве основания выберем $BCC_1 B_1$; тогда высота равна радиусу сферы (т.к. центр сферы лежит в грани $BCC_1 B_1$ и она касается грани $AA_1 D_1 D$). Площадь основания равна $C_1 M \cdot BC = 6 \cdot 9 = 54$. Следовательно, $V = 3 \cdot 54 = 162$.

БИЛЕТ 12

1. Найдите все значения x , при каждом из которых одно из трёх данных чисел $\log_x(x - \frac{1}{3})$, $\log_{x-\frac{1}{3}}(x - 3)$ и $\log_{x-3}x$ равно произведению двух остальных.

Ответ: $x = \frac{10}{3}$, $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Решение. Заметим, что на ОДЗ произведение всех трёх логарифмов равно

$$\log_x(x - \frac{1}{3}) \cdot \log_{x-\frac{1}{3}}(x - 3) \cdot \log_{x-3}x = 1$$

Обозначим то число, которое равно произведению двух других через c , а два оставшихся числа через a и b . Тогда $c = ab$ и $abc = 1$, откуда следует, что $c^2 = 1$, $c = \pm 1$, т.е. один из трёх данных логарифмов равен ± 1 .

Верно и обратное, а именно, если один из трёх данных логарифмов равен ± 1 , то поскольку произведение всех трёх логарифмов равно 1, то и произведение двух остальных равно ± 1 , т.е. первому логарифму.

Заметим, что у всех трёх данных логарифмов основание и подлогарифмическое выражение не равны ни при каких x , поэтому они отличны от 1.

Итак, требование задачи выполняется тогда и только тогда, когда один из логарифмов равен -1 (и все логарифмы существуют). Логарифм равен -1 , когда произведение его основания и подлогарифмического выражения равно 1. Получаем совокупность

$$\begin{cases} x(x - \frac{1}{3}) = 1, \\ x(x - 3) = 1, \\ (x - 3)(x - \frac{1}{3}) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{6}, \\ x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x = \frac{10}{3}, \\ x = 0. \end{cases}$$

Из найденных значений переменной только $x = \frac{10}{3}$ и $x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ удовлетворяют ОДЗ.

2. Даны две линейные функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – параллельные прямые, не параллельные осям координат. Известно, что график функции $y = (f(x))^2$ касается графика функции $y = -6g(x)$. Найдите все значения A такие, что график функции $y = (g(x))^2$ касается графика функции $y = Af(x)$.

Ответ: $A = 6$, $A = 0$.

Решение. Пусть $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$, где $a \neq 0$. Касание графиков $y = (f(x))^2$ и $y = -6g(x)$ эквивалентно тому, что уравнение $(f(x))^2 = -6g(x)$ имеет ровно одно решение. Получаем $(ax + b)^2 = -6(ax + c)$, $a^2x^2 + 2a(b + 3)x + b^2 - 7c = 0$. Четверть дискриминанта этого уравнения равна $a^2(b + 3)^2 - a^2(b^2 + 6c) = a^2(6b - 6c + 9)$, откуда $2b - 2c = -3$.

Аналогично, касание графиков $y = (g(x))^2$ и $y = Af(x)$ означает, что уравнение $(g(x))^2 = Af(x)$ имеет единственное решение. Это уравнение равносильно следующим: $(ax + c)^2 = A(ax + b)$, $a^2x^2 + a(2c - A)x + c^2 - Ab = 0$. Дискриминант равен $D = a^2(2c - A)^2 - 4a^2(c^2 - Ab) = a^2A(A - 4c + 4b)$. Он обращается в ноль при $A = 0$ и $A = 4c - 4b = 6$.

3. Найдите количество различных приведённых квадратных трёхчленов (т.е. со старшим коэффициентом, равным 1) с целыми коэффициентами таких, что они имеют хотя бы один корень,

все их корни являются степенями числа 11 с целыми неотрицательными показателями, и при этом их коэффициенты по модулю не превосходят 1331^{38} .

Ответ: 3363.

Решение. Такие квадратные трёхчлены можно представить в виде $(x - 11^a)(x - 11^b)$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$ – целые числа. Чтобы исключить повторения, считаем, что $a \geq b$. Раскрывая скобки, получаем $x^2 - (11^a + 11^b)x + 11^{a+b}$. По условию

$$\begin{cases} 11^a + 11^b \leq 1331^{38}, \\ 11^{a+b} \leq 1331^{38} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11^a + 11^b \leq 11^{114}, \\ a + b \leq 114. \end{cases}$$

Заметим, что если выполняется второе неравенство, то первое неравенство верно за исключением одного случая $a = 114$, $b = 0$. Для каждого значения a выпишем количество подходящих значений b :

$$\begin{aligned} a = 114 &\Rightarrow 0 \text{ значений } b; \\ a = 113 &\Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1\}); \\ a = 112 &\Rightarrow 3 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1; 2\}); \\ &\dots\dots\dots \\ a = 58 &\Rightarrow 57 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 56\}); \\ a = 57 &\Rightarrow 58 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 57\}); \\ a = 56 &\Rightarrow 57 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 56\}); \\ a = 55 &\Rightarrow 56 \text{ значений } b \ (b \in \{0; 1; \dots; 55\}); \\ &\dots\dots\dots \\ a = 1 &\Rightarrow 2 \text{ значения } b \ (b \in \{0; 1\}); \\ a = 0 &\Rightarrow 1 \text{ значение } b \ (b = 0). \end{aligned}$$

Суммируя, получаем $(2 + 3 + 4 + \dots + 58) + (57 + 56 + 55 + \dots + 1) = 3363$ вариантов.

4. Числа x и y таковы, что выполняются равенства $\sin y + \sin x + \cos 3x = 0$ и $\sin 2y - \sin 2x = \cos 4x + \cos 2x$. Какое наибольшее значение может принимать сумма $\cos y + \cos x$?

Ответ: $1 + \sin \frac{3\pi}{8} = 1 + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Решение. Преобразуем второе равенство:

$$\sin 2y = 2 \sin x \cos x + 2 \cos 3x \cos x \Leftrightarrow \sin 2y = 2 \cos x (\sin x + \cos 3x).$$

Подставляя сюда $-\sin y$ вместо $\sin x + \cos 3x$, получаем $\sin 2y = -2 \cos x \sin y$, $2 \sin y \cos y + 2 \cos x \sin y = 0$, $\sin y (\cos y + \cos x) = 0$, откуда есть две возможности.

1) $\cos x + \cos y = 0$, т.е. искомое выражение обращается в ноль.

2) $\sin y = 0$. Тогда $y = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а из первого уравнения получаем, что

$$\sin x + \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ 3x = -x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Тогда максимальное значение суммы $\cos y + \cos x$ принимается при $y = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{3\pi}{8} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и оно равно $1 + \sin \frac{3\pi}{8}$.

Чтобы вычислить $\sin \frac{3\pi}{8}$, применим формулу косинуса двойного угла: $\cos \frac{3\pi}{4} = 1 - 2\sin^2 \frac{3\pi}{8}$, откуда $\sin \frac{3\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{3\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

Итак, при заданных условиях $\max(\cos x + \sin y) = 1 + \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность Ω с диаметром 13 описана вокруг треугольника ABM , где M – точка пересечения диагоналей данного параллелограмма. Ω вторично пересекает луч CB и отрезок AD в точках E и K соответственно. Длина дуги AE в два раза больше длины дуги BM (дуги AE и BM не имеют общих точек). Длина отрезка MK равна 5. Найдите длины отрезков AD , BK и периметр треугольника EBM .

Ответ: $AD = 13, BK = \frac{120}{13}, P_{EBM} = \frac{340}{13}$.

Решение. Обозначим градусные меры дуг BM и AE через 2α и 4α соответственно. Тогда по теореме о вписанном угле $\angle ABE = \frac{1}{2} \cdot 4\alpha = 2\alpha$, $\angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 2\alpha = \alpha$. Значит, $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - 2\alpha$; $\angle ACB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \alpha$.

В треугольнике ABC углы при вершинах A и C равны, поэтому треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$. Следовательно, $ABCD$ – ромб. У ромба диагонали взаимно перпендикулярны, значит, угол AMB прямой и AB – диаметр окружности. Значит, $\angle BKA = \angle BEA = 90^\circ$. Так как $BE \parallel AK$, получаем, что $AEBK$ – прямоугольник, а значит, EK – также диаметр. Наконец, из параллельности AD и BC имеем $\angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Диаметр окружности равен 13, значит, $EK = AB = 13$; $AD = AB = 13$ (как стороны ромба). Хорды MK и BM равны (т.к. равны соответствующие им дуги), $BM = 5$. Тогда $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 12$, и из треугольника ABM находим, что $\cos \alpha = \frac{AM}{AB} = \frac{12}{13}$, $\sin \alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{5}{13}$. Отсюда $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{120}{169}$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{119}{169}$.

Далее вычисляем: $BK = AB \sin 2\alpha = 13 \cdot \frac{120}{169} = \frac{120}{13}$; $BE = AB \cos 2\alpha = 13 \cdot \frac{119}{169} = \frac{119}{13}$. Так как EK – диаметр, то $\angle EMK = 90^\circ$, $EM = \sqrt{EK^2 - KM^2} = 12$. Следовательно, периметр треугольника EBM равен $5 + 12 + \frac{119}{13} = \frac{340}{13}$.

6. Назовём *расстоянием* между числами модуль их разности. Известно, что сумма расстояний от двадцати пяти последовательных *натуральных* чисел до некоторого числа a равна 1270, а сумма расстояний от этих же двадцати пяти чисел до числа a^2 равна 1234. Найдите все возможные значения a .

Ответ: $a = -\frac{4}{5}$.

Решение. Обозначим данные последовательные натуральные числа через $k, k + 1, \dots, k + 24$. Заметим, что если некоторое число лежит на отрезке $[k; k + 24]$, то сумма расстояний от него до данных двадцати пяти чисел не превосходит $\frac{25}{2} \cdot 24 = 300$ (сумма расстояний до двух крайних чисел в точности равна 24, сумма расстояний до $k + 1$ и $k + 23$ не превосходит 24, сумма расстояний до $k + 2$ и $k + 22$ также не превосходит 24 и т.д.; расстояние до $k + 12$ не превосходит половины длины отрезка, т.е. 12). Следовательно, числа a и a^2 лежат вне отрезка $[k; k + 24]$. Тогда сумма расстояний от числа a до каждого из данных последовательных чисел выражается формулой $|25a - k - (k + 1) - \dots - (k + 24)| = |25a - 25k - 300|$. Аналогично, сумма расстояний от числа a^2 до каждого из данных чисел равна $|25a^2 - 25k - 300|$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |25a^2 - 25k - 300| = 1234, \\ |25a - 25k - 300| = 1270. \end{cases}$$

Рассмотрим четыре случая раскрытия модуля.

- 1) Оба числа a и a^2 лежат справа от отрезка $[k; k + 24]$. Тогда

$$\begin{cases} 25a^2 - 25k - 300 = 1234, \\ 25a - 25k - 300 = 1270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25a^2 - 25k - 300 = 1270, \\ 25a^2 - 25a + 36 = 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного уравнения отрицателен, поэтому решений нет.

2) Оба числа a и a^2 лежат слева от отрезка $[k; k + 24]$. Тогда

$$\begin{cases} 25k + 300 - 25a^2 = 1234, \\ 25k + 300 - 25a = 1270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25k + 300 - 25a = 1270, \\ 25a^2 - 25a - 36 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = a + 38,8, \\ \begin{cases} a = -0,8, \\ a = 1,8 \end{cases} \end{cases}$$

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то подходит только случай $a = -0,8$ (тогда $k = 38$); в случае $a = 1,8$ оказывается, что $k = 40,6$.

3) Число a лежит слева, а a^2 – справа от отрезка $[k; k + 24]$. Тогда

$$\begin{cases} 25a^2 - 25k - 300 = 1234, \\ 25k + 300 - 25a = 1270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25k + 300 - 25a = 1270, \\ 25a^2 - 25a - 2504 = 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение равносильно следующему: $5a^2 - 5a - \frac{2504}{5} = 0$; $D = 25 + 4 \cdot 2504 = 10041$; $a = \frac{5 \pm \sqrt{10041}}{10}$. Тогда из первого уравнения системы следует, что k – иррациональное число, что не удовлетворяет условию.

4) Число a лежит справа, а a^2 – слева от отрезка $[k; k + 24]$. Очевидно, этот случай не подходит, так как если $a > a^2$, то оба числа a и a^2 лежат на отрезке $[0; 1]$, но тогда между ними не может поместиться ни одно целое число.

Итак, возможно только, что $a = -0,8 = -\frac{4}{5}$.

7. На ребре BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ выбрана точка M . Сфера, построенная на отрезке $C_1 M$ как на диаметре, касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда, причём одной из них в точке, лежащей на ребре $B_1 B$. Известно, что $BM = 1$, $CM = 3$. Найдите длину ребра AA_1 , радиус сферы и объём параллелепипеда.

Ответ: $AA_1 = 5$, $R = 2$, $V = 32$.

Решение. Так как центр сферы – середина отрезка $C_1 M$ – лежит в грани $BCC_1 B_1$, то сфера этой грани не касается. Заметим, что если отрезок $C_1 M$ не перпендикулярен плоскостям $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$, то сфера их не касается, что невозможно, так как по условию сфера касается плоскостей четырёх граней параллелепипеда. Отметим далее, что сфера не может касаться грани $CC_1 D_1 D$ (касание означало бы, что $MC_1 \perp CC_1 D_1 D$, и отсюда следовало бы, что плоскости $CC_1 D_1 D$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ совпадают). Значит, сфера касается граней $ABCD$, $A_1 B_1 C_1 D_1$, $AA_1 D_1 D$ и $ABB_1 A_1$, притом последней в точке, лежащей на ребре BB_1 (обозначим её T).

Рассмотрим параллелограмм $BB_1 C_1 C$. Противоположные стороны параллелограмма равны, следовательно, $B_1 C_1 = BC = BM + MC = 1 + 3 = 4$. Используя равенство касательных, проведённых к окружности из одной точки, находим, что $B_1 T = B_1 C_1 = 4$, $BT = BM = 1$. Значит, $CC_1 = BB_1 = BT + TB_1 = 5$. По теореме Пифагора для треугольника $CC_1 M$ находим, что $C_1 M = \sqrt{CC_1^2 - CM^2} = 4$, откуда радиус сферы равен 2.

Объём параллелепипеда V равен произведению площади его основания на высоту. В качестве основания выберем $BCC_1 B_1$; тогда высота равна радиусу сферы (т.к. центр сферы лежит в грани $BCC_1 B_1$ и она касается грани $AA_1 D_1 D$). Площадь основания равна $C_1 M \cdot BC = 4 \cdot 4 = 16$. Следовательно, $V = 2 \cdot 16 = 32$.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. (4 балла) Случай считается *разобраннным*, если верно составлено и решено уравнение, а затем сделан отбор корней для этого случая.

Разобран один случай – 1 балл;

разобраны два случая – 2 балла;

разобраны три случая – 4 балла.

Если для отбора корней в задаче найдено ОДЗ, и при этом ОДЗ найдено неверно, то задача оценивается следующим образом. Случай считается *разобраннным*, если верно составлено и решено уравнение. Разобран 1 случай – 0 баллов; разобраны 2 случая – 1 балл; разобраны 3 случая – 2 балла.

2. (5 баллов) Неверная формула для вершины параболы (или для нахождения минимального значения квадратичной функции) – 0 баллов за задачу.

Найдена лишь вершина параболы, заданной первой функцией – баллы не добавляются.

Найдена константа $f(x) - g(x)$ – 3 балла.

3. (6 баллов) Доказано, какие три вида прямоугольных треугольников возможны – 2 балла. Если получено не более двух видов треугольников или разобраны все три случая, но не обосновано отсутствие других возможностей, то этот пункт оценивается в 0 баллов.

Произведён подсчёт количества треугольников одного вида – 1 балл;

произведён подсчёт количества треугольников двух видов – 2 балла;

произведён подсчёт количества треугольников трёх видов – 4 балла.

Ошибка в ± 1 при подсчёте количества треугольников – снять 1 балл от общей суммы.

Отсутствует умножение на два (т.е. считается, что гипотенуза и/или катет треугольника может лежать только на одной из двух данных прямых) – снять 2 балла от общей суммы.

Верный ответ в развёрнутой форме – баллы не снимаются.

4. (5 баллов) Ошибка в тригонометрической формуле – 0 баллов за задачу.

5. (7 баллов) Найден угол ACB – 1 балл;

найден отрезок MK – 2 балла;

найден отрезок AB – 2 балла;

найдена площадь треугольника – 2 балла.

Внимание! Если при решении существенно используется, лежит ли центр данной окружности внутри треугольника ABC или вне него, то возможно получение неверных результатов в случае неверного расположения центра окружности.

Не исследовано, лежит ли центр окружности внутри треугольника ABC , и при этом расположение центра окружности используется в ходе решения – не более 5 баллов за задачу.

6. (6 баллов) Указано, что числа a и b лежат вне отрезка между данными последовательными числами – 1 балл;

получена формула суммы расстояний от чисел a и b до данных последовательных натуральных чисел – 1 балл **ИЛИ** найдены расстояния от a и b до ближайших последовательных чисел – 1 балл. (Этот балл ставится при условии, что выполнен предыдущий пункт.)

За рассмотрение каждого из четырёх возможных случаев расположения чисел a и b (оба числа слева от отрезка, содержащего данные последовательные натуральные числа; оба числа справа и т.д.) – по 1 баллу за случай при условии, что выполнена проверка возможности случая.

Если при рассмотрении случаев не выполнена проверка, то 0 баллов за рассмотрение одного случая, 1 балл за рассмотрение двух или трёх случаев, 2 балла за рассмотрение четырёх случаев.

Количество слагаемых в формуле суммы расстояний отличается от верного на 1 – снять 2 балла с общей суммы.

7. (6 баллов) а) Доказано, что одна из боковых граней призмы – квадрат – 1 балл; найдено ребро AA_1 – 1 балл.

б) Задача решается для прямоугольного параллелепипеда – 0 баллов за пункт б);

найден радиус сферы – 2 балла;

найден объём призмы – 2 балла.

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. (4 балла) Случай считается *разобраннным*, если верно составлено и решено уравнение, а затем сделан отбор корней для этого случая.

Разобран один случай – 1 балл;

разобраны два случая – 2 балла;

разобраны три случая – 4 балла.

Если для отбора корней в задаче найдено ОДЗ, и при этом ОДЗ найдено неверно, то задача оценивается следующим образом. Случай считается *разобраннным*, если верно составлено и решено уравнение. Разобран 1 случай – 0 баллов; разобраны 2 случая – 1 балл; разобраны 3 случая – 2 балла.

2. (5 баллов) Найдено значение $A = 0$ – 1 балл;

найден значение A , отличное от нуля – 4 балла.

При исследовании случая $A \neq 0$ найдена константа $f(x) - g(x)$, и других продвижений в этом случае нет – 3 балла за этот случай.

3. (5 баллов) Описаны наборы степеней, которые могут встретиться – 1 балл.

При подсчёте включён случай, когда один из корней равен 1, а второй равен N ($N = 3^{141}$ для билета 9, $N = 5^{255}$ для билета 10, $N = 7^{136}$ для билета 11, 11^{114} для билета 12) – снять 1 балл.

Некоторые трёхчлены посчитаны дважды – не более 3 баллов за задачу.

4. (6 баллов) Задача сведена к исследованию двух случаев (как в решении) – 3 балла;

показано, что в одном из случаев искомая величина равна 0 – 1 балл;

разобран случай, дающий ответ в задаче – 2 балла.

Не вычислен $\sin \frac{3\pi}{8}$, $\cos \frac{3\pi}{8}$ и пр. – баллы не снимаются.

Ошибка в тригонометрической формуле – 0 баллов за задачу.

Неверно решено элементарное тригонометрическое уравнение – не более 2 баллов за задачу.

5. (7 баллов) Доказано, что $ABCD$ ромб – 2 балла;

без доказательства использовано, что $EAKB$ прямоугольник (и при этом не доказано, что $ABCD$ ромб) – снять 2 балла;

найден отрезок AD (BC) – 1 балл;

найден отрезок BK – 2 балла;

найден периметр треугольника EVM – 2 балла.

6. (6 баллов) Указано, что числа a и a^2 лежат вне отрезка между данными последовательными числами – 1 балл;

получена формула суммы расстояний от чисел a и a^2 до данных последовательных натуральных чисел – 1 балл **ИЛИ** найдены расстояния от a и a^2 до ближайших последовательных чисел – 1 балл. (Этот балл ставится при условии, что выполнен предыдущий пункт.)

Случай $a^2 < k < \dots < k + p < a$ не разобран – баллы не снимаются.

При наличии отбора:

рассмотрен 1 случай расположения чисел a и a^2 (оба числа справа от отрезка; оба слева от отрезка; a^2 справа от отрезка, a слева от отрезка) – 1 балл;

рассмотрены 2 случая расположения чисел a и a^2 – 2 балла;

рассмотрены 3 случая расположения чисел a и a^2 – 4 балла.

При отсутствии отбора:

рассмотрен 1 случай расположения чисел a и a^2 – 0 баллов;

рассмотрены 2 случая расположения чисел a и a^2 – 1 балл;

рассмотрены 3 случая расположения чисел a и a^2 – 2 балла.

Количество слагаемых в формуле суммы расстояний отличается от верного на 1 – снять 2 балла с общей суммы.

7. (6 баллов) Предполагается, что параллелепипед прямоугольный – 0 баллов за задачу.

Показано, каких именно граней параллелепипеда касается сфера – 2 балла.

Если грани параллелепипеда, которых касается сфера, указаны верно, но при этом без доказательства, то эти 2 балла не ставятся, но все дальнейшие рассуждения оцениваются.

Если грани параллелепипеда, которых касается сфера, указаны неверно, то 0 баллов за задачу.

Найдена одна из трёх искомых величин – 2 балла;

найжены две из трёх искомых величин – 3 балла;

найжены все три искомые величины – 4 балла.