

## 10 класс

ВАРИАНТ 11

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа  $a, b, c$  – соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом  $a, b, c$  не заданы, но известно, что  $c < 0 < a$ ). Большой корень уравнения  $ax^2 - 2bx + c = 0$  является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.
2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = 17, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - x^2} = -10. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.
4. [5 баллов] Четырёхугольник  $ABCD$  – параллелограмм с тупым углом  $C$ . Пусть  $E$  – точка пересечения прямой  $AB$  с перпендикуляром к  $AC$ , проходящим через  $C$ , а прямая  $ED$  пересекает диагональ  $AC$  в точке  $N$ . Известно, что  $CN = 6$ ,  $AN = 12$ , а  $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\angle ADC) = \frac{4}{5}$ .
- а) Найдите  $\operatorname{tg} \angle BAC$ .
- б) Найдите площадь треугольника  $ENA$ .
5. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла  $A$  треугольника  $ABC$  пересекают прямую  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника  $AMN$ , касается стороны  $AB$  в точке  $A$ . Прямая  $AC$  повторно пересекает окружность в точке  $K$ . Найдите радиус окружности, угол  $ACB$  и площадь четырехугольника  $ANKM$ , если известно, что  $AB = 3\sqrt{3}$ ,  $BM = \sqrt{6}$ .
6. [5 баллов] На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них чётны, но не делятся на 3, остальные же делятся на 3 и при этом нечётны. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно чётное и хотя бы одно кратное 3, можно 25 способами. Сколько было выписано чисел?
7. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$-\frac{10x + 10}{5x + 6} \leq ax + b \leq 5x + 2 + |10x + 6|$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-1; -\frac{2}{5}]$ .

## 10 класс

ВАРИАНТ 12

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа  $a, b, c$  – соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом  $a, b, c$  не заданы, но известно, что  $c < 0 < a$ ). Меньший корень уравнения  $ax^2 + 2bx + c = 0$  является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.
2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = 57, \\ y + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = -68. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12468.
4. [5 баллов] Четырёхугольник  $ABCD$  – параллелограмм с тупым углом  $C$ . Пусть  $E$  – точка пересечения прямой  $AB$  с перпендикуляром к  $AC$ , проходящим через  $C$ , а прямая  $ED$  пересекает диагональ  $AC$  в точке  $N$ . Известно, что  $CN = 4$ ,  $AN = 8$ ,  $\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\angle ADC) = \frac{2}{5}$ .
- а) Найдите  $\operatorname{tg} \angle BAC$ .
- б) Найдите площадь треугольника  $ENA$ .
5. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла  $A$  треугольника  $ABC$  пересекают прямую  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника  $AMN$ , касается стороны  $AB$  в точке  $A$ . Прямая  $AC$  повторно пересекает окружность в точке  $K$ . Найдите радиус окружности, угол  $ACB$  и площадь четырехугольника  $ANKM$ , если известно, что  $AB = \sqrt{10}$ ,  $BM = \sqrt{2}$ .
6. [5 баллов] На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них делятся на 5, но не делятся на 7, остальные же наоборот делятся на 7 и при этом не делятся на 5. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно кратное 5 и хотя бы одно кратное 7, можно 49 способами. Сколько было выписано чисел?
7. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$4 - 3x - |6x - 2| \leq ax + b \leq \frac{17 + 15x}{5 + 3x}$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-1; 1]$ .