

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leq \log_{9x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.
4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C , касающаяся стороны AD . Касательные к ω , проведённые из точки B , пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC , NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \arctg \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.
5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 9 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x + 2y) - \sqrt{3} \sin(x + 2y) = -16 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел
- $(a; b)$
- такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leq ax + b \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед
- $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$
- , грани
- $ABCD$
- и
- $CDD_1 C_1$
- которого являются прямоугольниками. Сфера
- S
- касается прямых
- $B_1 C_1$
- и
- $C_1 D_1$
- , плоскости
- CDD_1
- , а также плоскости
- ABC
- в точке
- A
- . Эта сфера повторно пересекает отрезок
- AC_1
- в точке
- M
- . Найдите
- $\angle BB_1 C_1$
- и объём параллелепипеда
- $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$
- , если известно, что
- $AM = 5$
- ,
- $C_1 M = 3$
- .

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124, \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leq \log_{2x} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12414.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция
- $ABCD$
- (
- AD
- и
- BC
- основания,
- $AD > BC$
-) и окружность
- ω
- с центром
- C
- , касающаяся стороны
- AD
- . Касательные к
- ω
- , проведённые из точки
- B
- , пересекают прямую
- AD
- в точках
- P
- и
- Q
- (точка
- P
- лежит между
- Q
- и
- D
-). На продолжении стороны
- CB
- за точку
- B
- выбрана точка
- N
- так, что
- $\angle CPN$
- прямой. Найдите углы
- ADC
- ,
- NQC
- и площадь четырёхугольника
- $NCDQ$
- , если известно, что
- $\angle NCP = \arctg \frac{8}{15}$
- ,
- $AP = \frac{17}{2}$
- ,
- $NC = 17$
- .

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos(x + y) = 5 \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \sin(x + 2y) + \sqrt{3} \cos(x + 2y) = 8 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел
- $(a; b)$
- такие, что неравенство

$$\frac{12x - 14}{2x - 3} \leq ax + b \leq 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед
- $KLMNK_1L_1M_1N_1$
- , грани
- $KLMN$
- и
- LMM_1L_1
- которого являются прямоугольниками. Сфера
- S
- касается прямых
- L_1M_1
- и
- M_1N_1
- , плоскости
- LMM_1
- , а также плоскости
- KLM
- в точке
- K
- . Эта сфера повторно пересекает отрезок
- KM_1
- в точке
- A
- . Найдите
- $\angle NN_1M_1$
- и объём параллелепипеда
- $KLMNK_1L_1M_1N_1$
- , если известно, что
- $AK = 5$
- ,
- $AM_1 = 2$
- .

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20, \\ y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12531.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция
- $ABCD$
- (
- AD
- и
- BC
- основания,
- $AD > BC$
-) и окружность
- ω
- с центром
- C
- , касающаяся стороны
- AD
- . Касательные к
- ω
- , проведённые из точки
- B
- , пересекают прямую
- AD
- в точках
- P
- и
- Q
- (точка
- P
- лежит между
- Q
- и
- D
-). На продолжении стороны
- CB
- за точку
- B
- выбрана точка
- N
- так, что
- $\angle CPN$
- прямой. Найдите углы
- ADC
- ,
- NQC
- и площадь четырёхугольника
- $NCDQ$
- , если известно, что
- $\angle NCP = \arctg \frac{5}{12}$
- ,
- $AP = 13$
- ,
- $NC = 26$
- .

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x - y) = -9 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ \cos(x - 2y) - \sqrt{3} \sin(x - 2y) = 20 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел
- $(a; b)$
- такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \leq ax + b \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед
- $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$
- , грани
- $ABB_1 A_1$
- и
- $BB_1 C_1 C$
- которого являются прямоугольниками. Сфера
- S
- касается прямых
- $C_1 D_1$
- и
- CC_1
- , плоскости
- $BB_1 C_1 C$
- , а также плоскости
- ABB_1
- в точке
- A
- . Эта сфера повторно пересекает отрезок
- AC_1
- в точке
- M
- . Найдите
- $\angle ABC$
- и объём параллелепипеда
- $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$
- , если известно, что
- $AM = 3$
- ,
- $C_1 M = 2$
- .

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92, \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leq \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12828.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция
- $ABCD$
- (
- AD
- и
- BC
- основания,
- $AD > BC$
-) и окружность
- ω
- с центром
- C
- , касающаяся стороны
- AD
- . Касательные к
- ω
- , проведённые из точки
- B
- , пересекают прямую
- AD
- в точках
- P
- и
- Q
- (точка
- P
- лежит между
- Q
- и
- D
-). На продолжении стороны
- CB
- за точку
- B
- выбрана точка
- N
- так, что
- $\angle CPN$
- прямой. Найдите углы
- ADC
- ,
- NQC
- и площадь четырёхугольника
- $NCDQ$
- , если известно, что
- $\angle NCP = \arctg \frac{15}{8}$
- ,
- $AP = 17$
- ,
- $NC = 34$
- .

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos(x - y) = 7 \cos\left(\frac{2\pi}{3} + y\right), \\ \cos(2x - y) + \sqrt{3} \sin(2x - y) = 12 \sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел
- $(a; b)$
- такие, что неравенство

$$\frac{12x + 26}{2x + 3} \leq ax + b \leq 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед
- $KLMNK_1L_1M_1N_1$
- , грани
- KLL_1K_1
- и
- $K_1L_1M_1N_1$
- которого являются прямоугольниками. Сфера
- S
- касается прямых
- MM_1
- и
- M_1N_1
- , плоскости
- $K_1L_1M_1$
- , а также плоскости
- KLL_1
- в точке
- K
- . Эта сфера повторно пересекает отрезок
- KM_1
- в точке
- A
- . Найдите
- $\angle KK_1N_1$
- и объём параллелепипеда
- $KLMNK_1L_1M_1N_1$
- , если известно, что
- $AK = 3$
- ,
- $AM_1 = 1$
- .