ВАРИАНТ 17

1. **[5 баллов]** S – сумма первых 10 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_6 a_{12} > S+1$, $a_7 a_{11} < S+17$. Укажите все возможные значения a_1.

Ответ: $-6;\ -5;\ -4;\ -2;\ -1;\ 0$.

Решение. Обозначим разность прогрессии через d. Данные в условии неравенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases}(a_1+5d)(a_1+11d) > S+1,\\ (a_1+6d)(a_1+10d) < S+17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+16a_1d+55d^2 > S+1,\\ a_1^2+16a_1d+60d^2 < S+17.\end{cases}$$

Вычитая из второго неравенства первое (а это можно сделать, так как они разного знака), получаем $5d^2 < 16$. Из условия следует, что $d \in \mathbb{N}$, поэтому $d=1$. Тогда $a_{10}=a_1+9$ и $S=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10 = 5(a_1+a_1+9)=10a_1+45$, и система неравенств принимает вид

$$\begin{cases}a_1^2+16a_1+55 > 10a_1+45+1,\\ a_1^2+16a_1+60 < 10a_1+45+17\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+6a_1+9>0,\\ a_1^2+6a_1-2<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1 \neq -3,\\ a_1 \in \left(-3-\sqrt{11}; -3+\sqrt{11}\right).\end{cases}$$

Так как $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 \in \{-6; -5; -4; -2; -1; 0\}$.

2. **[5 баллов]** Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB=2$, $AC=CB=5$, $AD=DB=6$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

Ответ: $\sqrt{34} \pm \sqrt{23}$.

Решение. Пусть E – середина AB. CE и DE – медианы равнобедренных треугольников ABC и ABD, а значит, биссектрисы и высоты. То есть $AB \perp CE$, $AB \perp DE$. Значит, отрезок AB перпендикулярен плоскости CDE, следовательно, $AB \perp CD$. Таким образом, AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (обозначим эту плоскость через α). Сечение цилиндра этой плоскостью – окружность, а AB является хордой этой окружности. Тогда радиус цилиндра минимален, если AB – диаметр. Отметим, что это возможно в силу того, что отрезки DE и CE длиннее, чем $\frac{1}{2}AB=1$. Действительно, из треугольников ACE и ADE следует, что $CE=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$, $DE=\sqrt{6^2-1^2}=\sqrt{35}$.

Рассмотрим тетраэдр, в котором AB является диаметром цилиндра. Возможны 2 случая: точки C и D лежат по одну или по разные стороны плоскости α.

Пусть H – проекция точек C и D на плоскость α. Угол $\angle AHB = 90^\circ$, так как он вписан в окружность и опирается на её диаметр. $AH=BH$ в силу равенства треугольников ACH и BCH. Тогда $AH=BH=\sqrt{2}$. По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках AHC и DHC соответственно: $CH=\sqrt{25-2}=\sqrt{23}$, $DH=\sqrt{36-2}=\sqrt{34}$.

Тогда, если точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α, то $CD=DH-CH=\sqrt{34}-\sqrt{23}$. Если точки C и D лежат по разные стороны от плоскости α, то $CD=DH+CH=\sqrt{34}+\sqrt{23}$.

3. **[7 баллов]** Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек $(x;y)$ таких, что существует пара вещественных чисел a, b, при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 2,\\ a^2+b^2 \leqslant \min(2a+2b; 2).\end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M.

Ответ: $6\pi - \sqrt{3}$.

Решение. Второе неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leqslant 2a+2b \\ a^2+b^2 \leqslant 2. \end{cases}$$

Значит, исходная система равносильна следующим:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 2, \\ a^2+b^2 \leqslant 2a+2b, \\ a^2+b^2 \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \leqslant 2, \\ (a-1)^2+(b-1)^2 \leqslant 2, \\ a^2+b^2 \leqslant 2. \end{cases} \quad (1)$$

Множества точек, задаваемых этими неравенствами на плоскости $(a;b)$ (x и y при этом выступают в роли параметров), – это круги ω_1, ω_2, ω_3 радиуса $\sqrt{2}$ с центрами $P(x;y)$, $B(1;1)$, $A(0;0)$ соответственно. Условие задачи означает, что система (1) должна иметь решение относительно $(a;b)$, то есть все три круга должны иметь по крайней мере одну общую точку.

Пусть окружности, ограничивающие ω_2 и ω_3, пересекаются в точках C и D (тогда треугольники ABC и ABD – равносторонние). Пересечение кругов ω_2 и ω_3 есть фигура F, представляющая собой совокупность двух меньших сегментов этих кругов, ограниченных хордой CD. Тогда фигура M состоит из всевозможных точек $(x;y)$, находящихся на расстоянии не более $\sqrt{2}$ от фигуры F. (Это совокупность всех кругов радиуса $\sqrt{2}$, центры которых принадлежат фигуре F.)

Пусть точки P и Q симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки C; точки T и R симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки D. Нетрудно понять, что M есть объединение четырёх секторов (центральный угол всех секторов меньше 180°):

- сектор PAT круга с центром в точке A и радиуса AP,
- сектор QBR круга с центром в точке B и радиуса BQ,
- сектор PCQ круга с центром в точке C и радиуса CP,
- сектор RDT круга с центром в точке D и радиуса DT.

Заметим, что первые два сектора пересекаются по ромбу $ACBD$, и никаких других пересечений между секторами нет. При этом первые два сектора равны между собой, и последние два сектора также равны между собой. Таким образом, площадь фигуры M равна

$$S_M = S_{PAT}+S_{QBR}+S_{PCQ}+S_{RDT}-S_{ACBD} = 2\cdot\frac{\pi\left(2\sqrt{2}\right)^2}{3}+2\cdot\frac{\pi\left(\sqrt{2}\right)^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 = 6\pi-\sqrt{3}.$$

4. **[5 баллов]** Найдите количество троек натуральных чисел $(a;b;c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=6, \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{15}\cdot 3^{16}. \end{cases}$$

Ответ: 7 560.

Решение. Пусть $a=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}$, $b=2^{\beta_1}\cdot 3^{\beta_2}$, $c=2^{\gamma_1}\cdot 3^{\gamma_2}$ (никаких других простых множителей числа a, b, c содержать не могут – иначе нарушается второе условие системы). Отсюда

$$\text{НОК}(a;b;c)=2^{\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 3^{\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}, \quad \text{НОД}(a;b;c)=2^{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 3^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}.$$

Учитывая данную в условии систему, получаем соотношения

$$\begin{cases} \max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=15, \\ \min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=16, \\ \min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=1. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим первую систему (2). Возможны следующие наборы чисел $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$:

$(1; 1; 15)$ – 3 набора (за счёт различных перестановок этих чисел);
$(1; 15; 15)$ – также три набора;
$(1; k; 15)$, где $2 \leqslant k \leqslant 14$ – есть 13 различных значений k,
и для каждого из них 6 перестановок – всего 78 вариантов.

Итак, есть $3+3+6\cdot 13 = 84$ способа выбрать тройку чисел $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$. Аналогично устанавливаем, что для выбора $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ есть $3+3+6\cdot 14 = 90$ способов, а так как один выбор осуществляется независимо от другого, общее количество способов равно $84 \cdot 90 = 7\,560$.

5. **[5 баллов]** Даны числа $\log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $\log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

Ответ: $x = 2$.

Решение. Из условия следует, что функции $4x+1$, $\frac{x}{2}+2$, $5x-1$ положительны и не принимают значения 1 при всех x из области допустимых значений. Пусть $a = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1)$, $b = \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2$, $c = \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1)$. Тогда

$$abc = \log_{\sqrt{5x-1}}(4x+1) \cdot \log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 \cdot \log_{\frac{x}{2}+2}(5x-1) =$$
$$= 2\log_{5x-1}(4x+1) \cdot 2\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right) \cdot \frac{\log_{4x+1}(5x-1)}{\log_{4x+1}\left(\frac{x}{2}+2\right)} = 4.$$

По условию числа $(a; b; c)$ удовлетворяют одному из трёх условий:

$$a = b \ \text{ и } \ a = c+1; \qquad (3)$$
$$b = c \ \text{ и } \ c = a+1; \qquad (4)$$
$$c = a \ \text{ и } \ a = b+1. \qquad (5)$$

Рассмотрим случай (3). Подставляя $b = a$ и $c = a-1$ в полученное выше уравнение $abc = 4$, имеем $a \cdot a \cdot (a-1) = 4$, откуда $a^3 - a^2 - 4 = 0$, $(a-2)\left(a^2+a+2\right) = 0$. Так как многочлен a^2+a+2 не имеет корней, то единственным решением уравнения является $a = 2$, поэтому системе удовлетворяет тройка чисел $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$. Случаи (4) и (5) рассматриваются аналогично; из них получаем, что либо $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, либо $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$. Теперь для каждой из полученных троек чисел $(a; b; c)$ найдём x.

Если $c = 1$, то $5x - 1 = \frac{x}{2}+2$, то есть $x = \frac{2}{3}$. Поэтому $a = 2\log_{\frac{7}{3}}\frac{11}{3} \neq 2$, то есть значений x, при которых $a = b = 2$, $c = 1$, не существует.

Если $a = 1$, то $4x+1 = \sqrt{5x-1}$. Возводя обе части последнего уравнения в квадрат, получаем уравнение $16x^2+3x+2 = 0$, которое не имеет корней, поэтому случай $a = 1$, $b = c = 2$ также не подходит.

Если $b = 1$, то $\left(\frac{x}{2}+2\right)^2 = 4x+1$. Это уравнение эквивалентно уравнению $x^2 - 8x + 12 = 0$, корнями которого являются $x = 2$ и $x = 6$, но $x = 6$ не подходит, так как в этом случае $a = \log_{\sqrt{29}} 25 \neq 2$. Значение $x = 2$ подходит: $a = \log_{\sqrt{9}} 9 = 2$, $c = \log_3 9 = 2$.

Итак, $x = 2$ – единственное решение задачи.

6. **[7 баллов]** Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Окружность, проходящая через точки A, O и C, пересекает отрезок BC в точке P. Касательные к ω, проведённые через точки A и C, пересекаются в точке T. Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K. Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 6 и 4.

а) Найдите площадь треугольника ABC.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{7}{5}$. Найдите AC.

Ответ: а) $S_{ABC} = 25$; б) $AC = \frac{50}{\sqrt{42}}$.

Решение. Так как прямые TC и TA – касательные к ω, они перпендикулярны радиусам, проведённым в точки касания, и $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$. Отсюда следует, что точки A и C лежат на окружности с диаметром OT (назовём эту окружность Ω). На этой же окружности лежит точка P, поскольку она лежит на окружности, проходящей через точки A, O, C. Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда по свойству угла между хордой и касательной получаем, что $\angle TAC = \beta$. Далее, $\angle TPC = \angle TAC = \beta$ (углы, вписанные в окружность Ω). Из того, что $\angle TPC = \angle ABC$, следует, что $AB \parallel PT$.

Так как у треугольников APK и CPK общая высота, проведённая из вершины P, их площади относятся как основания, т.е. $CK : AK = S_{\triangle CPK} : S_{\triangle APK} = 4 : 6 = 2 : 3$. Треугольники ABC и KPC подобны, поскольку $PK \parallel AB$, и коэффициент подобия k равен $\frac{AC}{CK} = \frac{AK+KC}{CK} = 1 + \frac{AK}{CK} = \frac{5}{2}$. Но тогда $S_{ABC} = k^2 \cdot S_{\triangle CPK} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 4 = 25$.

б) Поскольку $\angle ABC$ острый, то $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$ (центральный угол вдвое больше вписанного), $\angle APC = \angle AOC = 2\beta$ (вписанные в Ω углы, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, PK – биссектриса треугольника ACP. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $CP : AP = CK : AK = 2 : 3$. Пусть $CP = 2y$; тогда $AP = 3y$.

Из дополнительного условия $\beta = \operatorname{arctg} \frac{7}{5}$. Следовательно,

$$\cos 2\beta = \frac{\cos 2\beta}{1} = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{1 - \left(\frac{7}{5}\right)^2}{1 + \left(\frac{7}{5}\right)^2} = -\frac{12}{37};$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \sqrt{\left(1 + \frac{12}{37}\right)\left(1 - \frac{12}{37}\right)} = \sqrt{\frac{49 \cdot 25}{37^2}} = \frac{35}{37}.$$

Площадь треугольника ACP равна $\frac{1}{2} \cdot CP \cdot AP \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 3y \cdot \frac{35}{37} = \frac{105}{37} y^2$, откуда получаем $\frac{105y^2}{37} = 10$, $y^2 = \frac{74}{21}$. По теореме косинусов из треугольника APC находим, что $AC^2 = (2y)^2 + (3y)^2 - 2 \cdot 2y \cdot 3y \cdot \cos 2\beta = 13y^2 + 12y^2 \cdot \frac{12}{37} = \frac{625y^2}{37} = \frac{625 \cdot 74}{37 \cdot 21}$, откуда окончательно получаем $AC = \frac{25\sqrt{2}}{\sqrt{21}}$.

ВАРИАНТ 18

1. **[5 баллов]** S – сумма первых 7 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_7 a_{12} > S + 20$, $a_9 a_{10} < S + 44$. Укажите все возможные значения a_1.

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

Решение. Обозначим разность прогрессии через d. Данные в условии неравенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > S+20, \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < S+44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+17a_1d+66d^2 > S+20, \\ a_1^2+17a_1d+72d^2 < S+44. \end{cases}$$

Вычитая из второго неравенства первое (а это можно сделать, так как они разного знака), получаем $6d^2 < 24$. Из условия следует, что $d \in \mathbb{N}$, поэтому $d = 1$. Тогда $a_7 = a_1 + 6$ и $S = \frac{a_1+a_7}{2} \cdot 7 = \frac{7}{2}(a_1 + a_1 + 6) = 7a_1 + 21$, и система неравенств принимает вид

$$\begin{cases} a_1^2+17a_1+66 > 7a_1+21+20, \\ a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+21+44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+10a_1+25 > 0, \\ a_1^2+10a_1+7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -5, \\ a_1 \in \left(-5-\sqrt{18}; -5+\sqrt{18}\right). \end{cases}$$

Так как $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

2. **[5 баллов]** Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 2$, $AC = CB = 5$, $AD = DB = 7$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

Ответ: $\sqrt{47} \pm \sqrt{23}$.

Решение. Пусть E – середина AB. CE и DE – медианы равнобедренных треугольников ABC и ABD, а значит, биссектрисы и высоты. То есть $AB \perp CE$, $AB \perp DE$. Значит, отрезок AB перпендикулярен плоскости CDE, следовательно, $AB \perp CD$. Таким образом, AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (обозначим эту плоскость через α). Сечение цилиндра этой плоскостью – окружность, а AB является хордой этой окружности. Тогда радиус цилиндра минимален, если AB – диаметр. Отметим, что это возможно в силу того, что отрезки DE и CE длиннее, чем $\frac{1}{2}AB = 1$. Действительно, из треугольников ACE и ADE следует, что $CE = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$, $DE = \sqrt{7^2 - 1^2} = 4\sqrt{3}$.

Рассмотрим тетраэдр, в котором AB является диаметром цилиндра. Возможны 2 случая: точки C и D лежат по одну или по разные стороны плоскости α.

Пусть H – проекция точек C и D на плоскость α. Угол $\angle AHB = 90°$, так как он вписан в окружность и опирается на её диаметр. $AH = BH$ в силу равенства треугольников ACH и BCH. Тогда $AH = BH = \sqrt{2}$. По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках AHC и DHC соответственно: $CH = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$, $DH = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$.

Тогда, если точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α, то $CD = DH - CH = \sqrt{47} - \sqrt{23}$. Если точки C и D лежат по разные стороны от плоскости α, то $CD = DH + CH = \sqrt{47} + \sqrt{23}$.

3. **[7 баллов]** Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x, y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b, при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant 5, \\ a^2 + b^2 \leqslant \min(4a - 2b; 5). \end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M.

Ответ: $15\pi - \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Второе неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leqslant 4a-2b \\ a^2+b^2 \leqslant 5. \end{cases}$$

Значит, исходная система равносильна следующим:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 5, \\ a^2+b^2 \leqslant 4a-2b, \\ a^2+b^2 \leqslant 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \leqslant 5, \\ (a-2)^2+(b+1)^2 \leqslant 5, \\ a^2+b^2 \leqslant 5. \end{cases} \qquad (6)$$

Множества точек, задаваемых этими неравенствами на плоскости $(a;b)$ (x и y при этом выступают в роли параметров), – это круги ω_1, ω_2, ω_3 радиуса $\sqrt{5}$ с центрами $P(x;y)$, $B(2;-1)$, $A(0;0)$ соответственно. Условие задачи означает, что система (6) должна иметь решение относительно $(a;b)$, то есть все три круга должны иметь по крайней мере одну общую точку.

Пусть окружности, ограничивающие ω_2 и ω_3, пересекаются в точках C и D (тогда треугольники ABC и ABD – равносторонние). Пересечение кругов ω_2 и ω_3 есть фигура F, представляющая собой совокупность двух меньших сегментов этих кругов, ограниченных хордой CD. Тогда фигура M состоит из всевозможных точек $(x;y)$, находящихся на расстоянии не более $\sqrt{5}$ от фигуры F. (Это совокупность всех кругов радиуса $\sqrt{5}$, центры которых принадлежат фигуре F.)

Пусть точки P и Q симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки C; точки T и R симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки D. Нетрудно понять, что M есть объединение четырёх секторов (центральный угол всех секторов меньше 180°):

- сектор PAT круга с центром в точке A и радиуса AP,
- сектор QBR круга с центром в точке B и радиуса BQ,
- сектор PCQ круга с центром в точке C и радиуса CP,
- сектор RDT круга с центром в точке D и радиуса DT.

Заметим, что первые два сектора пересекаются по ромбу $ACBD$, и никаких других пересечений между секторами нет. При этом первые два сектора равны между собой, и последние два сектора также равны между собой. Таким образом, площадь фигуры M равна

$$S_M = S_{PAT}+S_{QBR}+S_{PCQ}+S_{RDT}-S_{ACBD} = 2\cdot\frac{\pi\left(2\sqrt{5}\right)^2}{3}+2\cdot\frac{\pi\left(\sqrt{5}\right)^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2 = 15\pi-\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

4. **[5 баллов]** Найдите количество троек натуральных чисел $(a;b;c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=15, \\ \text{НОК}(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18}. \end{cases}$$

Ответ: 8 568.

Решение. Пусть $a=3^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2}$, $b=3^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2}$, $c=3^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_2}$ (никаких других простых множителей числа a, b, c содержать не могут – иначе нарушается второе условие системы). Отсюда

$$\text{НОК}(a;b;c)=3^{\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 5^{\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}, \quad \text{НОД}(a;b;c)=3^{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 5^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}.$$

Учитывая данную в условии систему, получаем соотношения

$$\begin{cases} \max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=15, \\ \min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=18, \\ \min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=1. \end{cases} \qquad (7)$$

Рассмотрим первую систему (7). Возможны следующие наборы чисел $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$:

$(1;1;15)$ – 3 набора (за счёт различных перестановок этих чисел);
$(1;15;15)$ – также три набора;
$(1;k;15)$, где $2 \leqslant k \leqslant 14$ – есть 13 различных значений k,
и для каждого из них 6 перестановок – всего 78 вариантов.

Итак, есть $3+3+6\cdot 13 = 84$ способа выбрать тройку чисел $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$. Аналогично устанавливаем, что для выбора $(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ есть $3+3+6\cdot 16 = 102$ способа, а так как один выбор осуществляется независимо от другого, общее количество способов равно $84\cdot 102 = 8\,568$.

5. **[5 баллов]** Даны числа $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

Ответ: $x=3$.

Решение. Из условия следует, что функции $6x-14$, $x-1$, $\frac{x}{3}+3$ положительны и не принимают значения 1 при всех x из области допустимых значений. Пусть $a=\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $b=\log_{6x-14}(x-1)^2$, $c=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$. Тогда

$$abc = \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log_{6x-14}(x-1)^2\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) =$$
$$= 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot 2\log_{6x-14}(x-1)\cdot\frac{\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)}{\log_{6x-14}(x-1)} = 4.$$

По условию числа $(a;b;c)$ удовлетворяют одному из трёх условий:

$$a=b \ \text{ и } \ a=c+1; \qquad (8)$$
$$b=c \ \text{ и } \ c=a+1; \qquad (9)$$
$$c=a \ \text{ и } \ a=b+1. \qquad (10)$$

Рассмотрим случай (8). Подставляя $b=a$ и $c=a-1$ в полученное выше уравнение $abc=4$, имеем $a\cdot a\cdot(a-1)=4$, откуда $a^3-a^2-4=0$, $(a-2)\left(a^2+a+2\right)=0$. Так как многочлен a^2+a+2 не имеет корней, то единственным решением уравнения является $a=2$, поэтому системе удовлетворяет тройка чисел $a=2$, $b=2$, $c=1$. Случаи (9) и (10) рассматриваются аналогично; из них получаем, что либо $a=1$, $b=2$, $c=2$, либо $a=2$, $b=1$, $c=2$. Теперь для каждой из полученных троек чисел $(a;b;c)$ найдём x.

Если $c=1$, то $x-1=\frac{x}{3}+3$, то есть $x=6$. Поэтому $a=2\log_{\sqrt{5}}22\neq 2$, то есть значений x, при которых $a=b=2$, $c=1$, не существует.

Если $a=1$, $b=c=2$, то $c=2 \Leftrightarrow (x-1)^2=\frac{x}{3}+3$. Это уравнение эквивалентно уравнению $3x^2-7x-6=0$, корнями которого являются $x=3$ и $x=-\frac{2}{3}$, но $x=-\frac{2}{3}$ не удовлетворяет ОДЗ. При $x=3$ $a=2$, т.е. этот корень тоже не подходит в данном случае.

Если $b=1$, то $(x-1)^2=(6x-14)$. Это уравнение эквивалентно уравнению $x^2-8x+15=0$, корнями которого являются $x=3$ и $x=5$, но $x=5$ не подходит, так как в этом случае $a=\log_{\sqrt{\frac{14}{3}}}16\neq 2$.

Значение $x=3$ подходит: $a=\log_{\sqrt{4}}4=2$, $c=\log_2 4=2$.

Итак, $x=3$ – единственное решение задачи.

6. **[7 баллов]** Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Окружность, проходящая через точки A, O и C, пересекает отрезок BC в точке P. Касательные к ω, проведённые через точки A и C, пересекаются в точке T. Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K. Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 6 и 5.

а) Найдите площадь треугольника ABC.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Найдите AC.

Ответ: а) $S_{ABC} = \frac{121}{5}$; б) $AC = \frac{5\sqrt{33}}{6}$.

Решение. Так как прямые TC и TA – касательные к ω, они перпендикулярны радиусам, проведённым в точки касания, и $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$. Отсюда следует, что точки A и C лежат на окружности с диаметром OT (назовём эту окружность Ω). На этой же окружности лежит точка P, поскольку она лежит на окружности, проходящей через точки A, O, C. Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда по свойству угла между хордой и касательной получаем, что $\angle TAC = \beta$. Далее, $\angle TPC = \angle TAC = \beta$ (углы, вписанные в окружность Ω). Из того, что $\angle TPC = \angle ABC$, следует, что $AB \parallel PT$.

Так как у треугольников APK и CPK общая высота, проведённая из вершины P, их площади относятся как основания, т. е. $CK : AK = S_{\triangle CPK} : S_{\triangle APK} = 5 : 6$. Треугольники ABC и KPC подобны, поскольку $PK \parallel AB$, и коэффициент подобия k равен $\frac{AC}{CK} = \frac{AK+KC}{CK} = 1 + \frac{AK}{CK} = \frac{11}{5}$. Но тогда $S_{ABC} = k^2 \cdot S_{\triangle CPK} = \left(\frac{11}{5}\right)^2 \cdot 5 = \frac{121}{5}$.

б) Поскольку $\angle ABC$ острый, то $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$ (центральный угол вдвое больше вписанного), $\angle APC = \angle AOC = 2\beta$ (вписанные в Ω углы, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, PK – биссектриса треугольника ACP. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $CP : AP = CK : AK = 5 : 6$. Пусть $CP = 5y$; тогда $AP = 6y$.

Из дополнительного условия $\beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\cos 2\beta = \frac{\cos 2\beta}{1} = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{5};$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \sqrt{\left(1 + \frac{3}{5}\right)\left(1 - \frac{3}{5}\right)} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Площадь треугольника ACP равна $\frac{1}{2} \cdot CP \cdot AP \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cdot 5y \cdot 6y \cdot \frac{4}{5} = 12y^2$, откуда получаем $12y^2 = 11$, $y^2 = \frac{11}{12}$. По теореме косинусов из треугольника APC находим, что $AC^2 = (5y)^2 + (6y)^2 - 2 \cdot 5y \cdot 6y \cdot \cos 2\beta = 61y^2 - 60y^2 \cdot \frac{3}{5} = 25y^2 = 25 \cdot \frac{11}{12}$, откуда окончательно получаем $AC = \frac{5\sqrt{33}}{6}$.

ВАРИАНТ 19

1. **[5 баллов]** S – сумма первых 14 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_9 a_{17} > S + 12$, $a_{11} a_{15} < S + 47$. Укажите все возможные значения a_1.

Ответ: -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1.

Решение. Обозначим разность прогрессии через d. Данные в условии неравенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases}(a_1+8d)(a_1+16d) > S+12,\\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+47\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+24a_1d+128d^2 > S+12,\\ a_1^2+24a_1d+140d^2 < S+47.\end{cases}$$

Вычитая из второго неравенства первое (а это можно сделать, так как они разного знака), получаем $12d^2 < 35$. Из условия следует, что $d \in \mathbb{N}$, поэтому $d = 1$. Тогда $a_{14} = a_1 + 13$ и $S = \frac{a_1+a_{14}}{2} \cdot 14 = 7(a_1 + a_1 + 13) = 14a_1 + 91$, и система неравенств принимает вид

$$\begin{cases}a_1^2+24a_1+128 > 14a_1+91+12,\\ a_1^2+24a_1+140 < 14a_1+91+47\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+10a_1+25 > 0,\\ a_1^2+10a_1+2 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1 \neq -5,\\ a_1 \in \left(-5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23}\right).\end{cases}$$

Так как $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

2. **[5 баллов]** Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 2$, $AC = CB = 6$, $AD = DB = 7$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

Ответ: $\sqrt{47} \pm \sqrt{34}$.

Решение. Пусть E – середина AB. CE и DE – медианы равнобедренных треугольников ABC и ABD, а значит, биссектрисы и высоты. То есть $AB \perp CE$, $AB \perp DE$. Значит, отрезок AB перпендикулярен плоскости CDE, следовательно, $AB \perp CD$. Таким образом, AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (обозначим эту плоскость через α). Сечение цилиндра этой плоскостью – окружность, а AB является хордой этой окружности. Тогда радиус цилиндра минимален, если AB – диаметр. Отметим, что это возможно в силу того, что отрезки DE и CE длиннее, чем $\frac{1}{2}AB = 1$. Действительно, из треугольников ACE и ADE следует, что $CE = \sqrt{6^2 - 1^2} = \sqrt{35}$, $DE = \sqrt{7^2 - 1^2} = 4\sqrt{3}$.

Рассмотрим тетраэдр, в котором AB является диаметром цилиндра. Возможны 2 случая: точки C и D лежат по одну или по разные стороны плоскости α.

Пусть H – проекция точек C и D на плоскость α. Угол $\angle AHB = 90^\circ$, так как он вписан в окружность и опирается на её диаметр. $AH = BH$ в силу равенства треугольников ACH и BCH. Тогда $AH = BH = \sqrt{2}$. По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках AHC и DHC соответственно: $CH = \sqrt{36-2} = \sqrt{34}$, $DH = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$.

Тогда, если точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α, то $CD = DH - CH = \sqrt{47} - \sqrt{34}$. Если точки C и D лежат по разные стороны от плоскости α, то $CD = DH + CH = \sqrt{47} + \sqrt{34}$.

3. **[7 баллов]** Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x, y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b, при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 25,\\ a^2+b^2 \leqslant \min(-8a-6b; 25).\end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M.

Ответ: $75\pi - \frac{25\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Второе неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leqslant -8a-6b \\ a^2+b^2 \leqslant 25. \end{cases}$$

Значит, исходная система равносильна следующим:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 25, \\ a^2+b^2 \leqslant -8a-6b, \\ a^2+b^2 \leqslant 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \leqslant 25, \\ (a+4)^2+(b+3)^2 \leqslant 25, \\ a^2+b^2 \leqslant 25. \end{cases} \quad (11)$$

Множества точек, задаваемых этими неравенствами на плоскости $(a;b)$ (x и y при этом выступают в роли параметров), – это круги $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ радиуса 5 с центрами $P(x;y)$, $B(-4;-3)$, $A(0;0)$ соответственно. Условие задачи означает, что система (11) должна иметь решение относительно $(a;b)$, то есть все три круга должны иметь по крайней мере одну общую точку.

Пусть окружности, ограничивающие ω_2 и ω_3, пересекаются в точках C и D (тогда треугольники ABC и ABD – равносторонние). Пересечение кругов ω_2 и ω_3 есть фигура F, представляющая собой совокупность двух меньших сегментов этих кругов, ограниченных хордой CD. Тогда фигура M состоит из всевозможных точек $(x;y)$, находящихся на расстоянии не более 5 от фигуры F. (Это совокупность всех кругов радиуса 5, центры которых принадлежат фигуре F.)

Пусть точки P и Q симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки C; точки T и R симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки D. Нетрудно понять, что M есть объединение четырёх секторов (центральный угол всех секторов меньше 180°):

- сектор PAT круга с центром в точке A и радиуса AP,
- сектор QBR круга с центром в точке B и радиуса BQ,
- сектор PCQ круга с центром в точке C и радиуса CP,
- сектор RDT круга с центром в точке D и радиуса DT.

Заметим, что первые два сектора пересекаются по ромбу $ACBD$, и никаких других пересечений между секторами нет. При этом первые два сектора равны между собой, и последние два сектора также равны между собой. Таким образом, площадь фигуры M равна

$$S_M = S_{PAT}+S_{QBR}+S_{PCQ}+S_{RDT}-S_{ACBD} = 2\cdot\frac{\pi(2\cdot 5)^2}{3}+2\cdot\frac{\pi\cdot 5^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 5^2 = 75\pi-\frac{25\sqrt{3}}{2}.$$

4. **[5 баллов]** Найдите количество троек натуральных чисел $(a;b;c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=21, \\ \text{НОК}(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15}. \end{cases}$$

Ответ: 8 064.

Решение. Пусть $a=3^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$, $b=3^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$, $c=3^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$ (никаких других простых множителей числа a, b, c содержать не могут – иначе нарушается второе условие системы). Отсюда

$$\text{НОК}(a;b;c)=3^{\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 7^{\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}, \quad \text{НОД}(a;b;c)=3^{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 7^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}.$$

Учитывая данную в условии систему, получаем соотношения

$$\begin{cases} \max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=17, \\ \min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=15, \\ \min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=1. \end{cases} \quad (12)$$

Рассмотрим первую систему (12). Возможны следующие наборы чисел $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$:

$$(1;1;17) \text{ – 3 набора (за счёт различных перестановок этих чисел);}$$
$$(1;17;17) \text{ – также три набора;}$$
$$(1;k;17),\ \text{где } 2\leqslant k\leqslant 16 \text{ – есть 15 различных значений } k,$$
$$\text{и для каждого из них 6 перестановок – всего 90 вариантов.}$$

Итак, есть $3+3+6\cdot 15=96$ способов выбрать тройку чисел $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$. Аналогично устанавливаем, что для выбора $(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ есть $3+3+6\cdot 13=84$ способа, а так как один выбор осуществляется независимо от другого, общее количество способов равно $96\cdot 84=8\,064$.

5. **[5 баллов]** Даны числа $\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$. При каких x два из этих чисел равны, а третье больше их на 1?

Ответ: $x=5$.

Решение. Из условия следует, что функции $\frac{x}{2}-1, \frac{x}{2}-\frac{1}{4}, x-\frac{11}{4}$ положительны и не принимают значения 1 при всех x из области допустимых значений. Пусть $a=\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$, $b=\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$, $c=\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$. Тогда

$$abc=\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2\cdot\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=$$
$$=2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot 2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)\cdot\frac{\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}{2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)}=2.$$

По условию числа $(a;b;c)$ удовлетворяют одному из трёх условий:

$$a=b \ \text{ и } \ a=c-1; \tag{13}$$
$$b=c \ \text{ и } \ c=a-1; \tag{14}$$
$$c=a \ \text{ и } \ a=b-1. \tag{15}$$

Рассмотрим случай (13). Подставляя $b=a$ и $c=a+1$ в полученное выше уравнение $abc=2$, имеем $a\cdot a\cdot(a+1)=2$, откуда $a^3+a^2-2=0$, $(a-1)\left(a^2+2a+2\right)=0$. Так как многочлен a^2+2a+2 не имеет корней, то единственным решением уравнения является $a=1$, поэтому системе удовлетворяет тройка чисел $a=1$, $b=1$, $c=2$. Случаи (14) и (15) рассматриваются аналогично; из них получаем, что либо $a=2$, $b=1$, $c=1$, либо $a=1$, $b=2$, $c=1$. Теперь для каждой из полученных троек чисел $(a;b;c)$ найдём x.

Если $b=2$, то $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x-\frac{11}{4}$, то есть $x=5$. Это значение подходит: $c=\log_{\frac{9}{4}}\frac{9}{4}=1$, $a=\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}=1$.

Если $b=1$, то $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$. Это уравнение эквивалентно уравнению $x^2-6x+\frac{125}{16}=0$, которое имеет корни $x=3\pm\frac{\sqrt{19}}{4}$. Значение $x=3-\frac{\sqrt{19}}{4}$ не удовлетворяет ОДЗ (при этом $x<\frac{11}{4}$). Если $x=3+\frac{\sqrt{19}}{4}$, то $a=\log_{\sqrt{\frac{1+\sqrt{19}}{4}}}\left(\frac{4+\sqrt{19}}{8}\right)$, что отлично от 1 и 2. Поэтому случаи $a=b=1$, $c=2$ и $b=c=1$, $a=2$ не подходят.

Итак, $x=5$ – единственное решение задачи.

6. **[7 баллов]** Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Окружность, проходящая через точки A, O и C, пересекает отрезок BC в точке P. Касательные к ω, проведённые через точки A и C, пересекаются в точке T. Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K. Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 10 и 6.

а) Найдите площадь треугольника ABC.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC=\operatorname{arctg} 2$. Найдите AC.

Ответ: а) $S_{ABC} = \frac{128}{3}$; б) $AC = \frac{4\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$.

Решение. Так как прямые TC и TA – касательные к ω, они перпендикулярны радиусам, проведённым в точки касания, и $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$. Отсюда следует, что точки A и C лежат на окружности с диаметром OT (назовём эту окружность Ω). На этой же окружности лежит точка P, поскольку она лежит на окружности, проходящей через точки A, O, C. Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда по свойству угла между хордой и касательной получаем, что $\angle TAC = \beta$. Далее, $\angle TPC = \angle TAC = \beta$ (углы, вписанные в окружность Ω). Из того, что $\angle TPC = \angle ABC$, следует, что $AB \parallel PT$.

Так как у треугольников APK и CPK общая высота, проведённая из вершины P, их площади относятся как основания, т. е. $CK : AK = S_{\triangle CPK} : S_{\triangle APK} = 6 : 10 = 3 : 5$. Треугольники ABC и KPC подобны, поскольку $PK \parallel AB$, и коэффициент подобия k равен $\frac{AC}{CK} = \frac{AK+KC}{CK} = 1 + \frac{AK}{CK} = \frac{8}{3}$. Но тогда $S_{ABC} = k^2 \cdot S_{\triangle CPK} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 \cdot 6 = \frac{128}{3}$.

б) Поскольку $\angle ABC$ острый, то $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$ (центральный угол вдвое больше вписанного), $\angle APC = \angle AOC = 2\beta$ (вписанные в Ω углы, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, PK – биссектриса треугольника ACP. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $CP : AP = CK : AK = 3 : 5$. Пусть $CP = 3y$; тогда $AP = 5y$.

Из дополнительного условия $\beta = \operatorname{arctg} 2$. Следовательно,

$$\cos 2\beta = \frac{\cos 2\beta}{1} = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{1 - 2^2}{1 + 2^2} = -\frac{3}{5};$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \sqrt{\left(1 + \frac{3}{5}\right)\left(1 - \frac{3}{5}\right)} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Площадь треугольника ACP равна $\frac{1}{2} \cdot CP \cdot AP \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cdot 3y \cdot 5y \cdot \frac{4}{5} = 6y^2$, откуда получаем $6y^2 = 16$, $y^2 = \frac{8}{3}$. По теореме косинусов из треугольника APC находим, что $AC^2 = (3y)^2 + (5y)^2 - 2 \cdot 3y \cdot 5y \cdot \cos 2\beta = 34y^2 + 30y^2 \cdot \frac{3}{5} = 52y^2 = \frac{416}{3}$, откуда окончательно получаем $AC = \frac{4\sqrt{26}}{\sqrt{3}}$.

ВАРИАНТ 20

1. **[5 баллов]** S – сумма первых 5 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_6 a_{11} > S + 15$, $a_9 a_8 < S + 39$. Укажите все возможные значения a_1.

   Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

   Решение. Обозначим разность прогрессии через d. Данные в условии неравенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases} (a_1+5d)(a_1+10d) > S+15, \\ (a_1+8d)(a_1+7d) < S+39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+15a_1d+50d^2 > S+15, \\ a_1^2+15a_1d+56d^2 < S+39. \end{cases}$$

   Вычитая из второго неравенства первое (а это можно сделать, так как они разного знака), получаем $6d^2 < 24$. Из условия следует, что $d \in \mathbb{N}$, поэтому $d = 1$. Тогда $a_5 = a_1 + 4$ и $S = \frac{a_1+a_5}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}(a_1 + a_1 + 4) = 5a_1 + 10$, и система неравенств принимает вид

$$\begin{cases} a_1^2+15a_1+50 > 5a_1+10+15, \\ a_1^2+15a_1+56 < 5a_1+10+39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+10a_1+25 > 0, \\ a_1^2+10a_1+7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -5, \\ a_1 \in \left(-5-\sqrt{18}; -5+\sqrt{18}\right). \end{cases}$$

   Так как $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; ; -4; -3; -2; -1\}$.

2. **[5 баллов]** Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 2$, $AC = CB = 7$, $AD = DB = 8$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

   Ответ: $\sqrt{62} \pm \sqrt{47}$.

   Решение. Пусть E – середина AB. CE и DE – медианы равнобедренных треугольников ABC и ABD, а значит, биссектрисы и высоты. То есть $AB \perp CE$, $AB \perp DE$. Значит, отрезок AB перпендикулярен плоскости CDE, следовательно, $AB \perp CD$. Таким образом, AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (обозначим эту плоскость через α). Сечение цилиндра этой плоскостью – окружность, а AB является хордой этой окружности. Тогда радиус цилиндра минимален, если AB – диаметр. Отметим, что это возможно в силу того, что отрезки DE и CE длиннее, чем $\frac{1}{2}AB = 1$. Действительно, из треугольников ACE и ADE следует, что $CE = \sqrt{7^2 - 1^2} = 4\sqrt{3}$, $DE = \sqrt{8^2 - 1^2} = 3\sqrt{7}$.

   Рассмотрим тетраэдр, в котором AB является диаметром цилиндра. Возможны 2 случая: точки C и D лежат по одну или по разные стороны плоскости α.

   Пусть H – проекция точек C и D на плоскость α. Угол $\angle AHB = 90^\circ$, так как он вписан в окружность и опирается на её диаметр. $AH = BH$ в силу равенства треугольников ACH и BCH. Тогда $AH = BH = \sqrt{2}$. По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках AHC и DHC соответственно: $CH = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$, $DH = \sqrt{64-2} = \sqrt{62}$.

   Тогда, если точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α, то $CD = DH - CH = \sqrt{62} - \sqrt{47}$. Если точки C и D лежат по разные стороны от плоскости α, то $CD = DH + CH = \sqrt{62} + \sqrt{47}$.

3. **[7 баллов]** Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x, y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b, при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant 13, \\ a^2 + b^2 \leqslant \min(-4a - 6b; 13). \end{cases}$$

   Найдите площадь фигуры M.

   Ответ: $39\pi - \frac{13\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Второе неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leqslant -4a-6b \\ a^2+b^2 \leqslant 13. \end{cases}$$

Значит, исходная система равносильна следующим:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 13, \\ a^2+b^2 \leqslant -4a-6b, \\ a^2+b^2 \leqslant 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \leqslant 13, \\ (a+2)^2+(b+3)^2 \leqslant 13, \\ a^2+b^2 \leqslant 13. \end{cases} \tag{16}$$

Множества точек, задаваемых этими неравенствами на плоскости $(a;b)$ (x и y при этом выступают в роли параметров), – это круги ω_1, ω_2, ω_3 радиуса $\sqrt{13}$ с центрами $P(x;y)$, $B(-2;-3)$, $A(0;0)$ соответственно. Условие задачи означает, что система (16) должна иметь решение относительно $(a;b)$, то есть все три круга должны иметь по крайней мере одну общую точку.

Пусть окружности, ограничивающие ω_2 и ω_3, пересекаются в точках C и D (тогда треугольники ABC и ABD – равносторонние). Пересечение кругов ω_2 и ω_3 есть фигура F, представляющая собой совокупность двух меньших сегментов этих кругов, ограниченных хордой CD. Тогда фигура M состоит из всевозможных точек $(x;y)$, находящихся на расстоянии не более $\sqrt{13}$ от фигуры F. (Это совокупность всех кругов радиуса $\sqrt{13}$, центры которых принадлежат фигуре F.)

Пусть точки P и Q симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки C; точки T и R симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки D. Нетрудно понять, что M есть объединение четырёх секторов (центральный угол всех секторов меньше 180°):

- сектор PAT круга с центром в точке A и радиуса AP,
- сектор QBR круга с центром в точке B и радиуса BQ,
- сектор PCQ круга с центром в точке C и радиуса CP,
- сектор RDT круга с центром в точке D и радиуса DT.

Заметим, что первые два сектора пересекаются по ромбу $ACBD$, и никаких других пересечений между секторами нет. При этом первые два сектора равны между собой, и последние два сектора также равны между собой. Таким образом, площадь фигуры M равна

$$S_M = S_{PAT}+S_{QBR}+S_{PCQ}+S_{RDT}-S_{ACBD} = 2\cdot\frac{\pi\left(2\sqrt{13}\right)^2}{3}+2\cdot\frac{\pi\left(\sqrt{13}\right)^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{13}\right)^2 = 39\pi-\frac{13\sqrt{3}}{2}.$$

4. **[5 баллов]** Найдите количество троек натуральных чисел $(a;b;c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=10, \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{17}\cdot 5^{16}. \end{cases}$$

Ответ: 8 640.

Решение. Пусть $a=2^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2}$, $b=2^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2}$, $c=2^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_2}$ (никаких других простых множителей числа a, b, c содержать не могут – иначе нарушается второе условие системы). Отсюда

$$\text{НОК}(a;b;c)=2^{\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 5^{\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}, \quad \text{НОД}(a;b;c)=2^{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 5^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}.$$

Учитывая данную в условии систему, получаем соотношения

$$\begin{cases} \max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=17, \\ \min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=16, \\ \min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=1. \end{cases} \tag{17}$$

Рассмотрим первую систему (17). Возможны следующие наборы чисел $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$:

$(1;1;17)$ – 3 набора (за счёт различных перестановок этих чисел);
$(1;17;17)$ – также три набора;
$(1;k;17)$, где $2 \leqslant k \leqslant 16$ – есть 15 различных значений k,
и для каждого из них 6 перестановок – всего 90 вариантов.

Итак, есть $3+3+6\cdot 15 = 96$ способов выбрать тройку чисел $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$. Аналогично устанавливаем, что для выбора $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ есть $3+3+6\cdot 14 = 90$ способов, а так как один выбор осуществляется независимо от другого, общее количество способов равно $96 \cdot 90 = 8\,640$.

5. **[5 баллов]** Даны числа $\log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $\log_{(x-4)^2}(5x-26)$, $\log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье больше их на 1?

Ответ: $x = 6$.

Решение. Из условия следует, что функции $x-4, 5x-26$ положительны и не принимают значения 1 при всех x из области допустимых значений. Пусть $a = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)$, $b = \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8)$, $c = \log_{(x-4)^2}(5x-26)$. Тогда

$$abc = \log_{\sqrt{2x-8}}(x-4)\cdot \log_{\sqrt{5x-26}}(2x-8) \cdot \log_{(x-4)^2}(5x-26) = \\ = 2\log_{2x-8}(x-4)\cdot 2\log_{5x-26}(2x-8)\cdot \frac{\log_{2x-8}(5x-26)}{\log_{2x-8}(x-4)^2} = 2.$$

По условию числа $(a;b;c)$ удовлетворяют одному из трёх условий:

$$a = b \text{ и } a = c-1; \qquad (18)$$
$$b = c \text{ и } c = a-1; \qquad (19)$$
$$c = a \text{ и } a = b-1. \qquad (20)$$

Рассмотрим случай (18). Подставляя $b = a$ и $c = a+1$ в полученное выше уравнение $abc = 2$, имеем $a\cdot a\cdot(a+1) = 2$, откуда $a^3+a^2-2 = 0$, $(a-1)\left(a^2+2a+2\right) = 0$. Так как многочлен a^2+2a+2 не имеет корней, то единственным решением уравнения является $a = 1$, поэтому системе удовлетворяет тройка чисел $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$. Случаи (19) и (20) рассматриваются аналогично; из них получаем, что либо $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, либо $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$. Теперь для каждой из полученных троек чисел $(a;b;c)$ найдём x.

Если $b = 2$, то $5x-26 = 2x-8$, то есть $x = 6$. Это значение подходит: $a = \log_{\sqrt{4}} 2 = 1$, $c = \log_{2^2} 4 = 1$.

Если $b = 1$, то $\sqrt{5x-26} = 2x-8$. Это уравнение эквивалентно уравнению $4x^2-37x+90 = 0$, которое не имеет корней, поэтому случаи $a = b = 1$, $c = 2$ и $b = c = 1$, $a = 2$ не подходят.

Итак, $x = 6$ – единственное решение задачи.

6. **[7 баллов]** Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Окружность, проходящая через точки A, O и C, пересекает отрезок BC в точке P. Касательные к ω, проведённые через точки A и C, пересекаются в точке T. Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K. Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 10 и 8.

а) Найдите площадь треугольника ABC.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Найдите AC.

Ответ: а) $S_{ABC} = \frac{81}{2}$; б) $AC = \frac{3\sqrt{17}}{2}$.

Решение. Так как прямые TC и TA – касательные к ω, они перпендикулярны радиусам, проведённым в точки касания, и $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$. Отсюда следует, что точки A и C лежат на окружности с диаметром OT (назовём эту окружность Ω). На этой же окружности лежит точка P, поскольку она лежит на окружности, проходящей через точки A, O, C. Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда по свойству угла между хордой и касательной получаем, что $\angle TAC = \beta$. Далее, $\angle TPC = \angle TAC = \beta$ (углы, вписанные в окружность Ω). Из того, что $\angle TPC = \angle ABC$, следует, что $AB \parallel PT$.

Так как у треугольников APK и CPK общая высота, проведённая из вершины P, их площади относятся как основания, т. е. $CK : AK = S_{\triangle CPK} : S_{\triangle APK} = 8 : 10 = 4 : 5$. Треугольники ABC и KPC подобны, поскольку $PK \parallel AB$, и коэффициент подобия k равен $\frac{AC}{CK} = \frac{AK+KC}{CK} = 1 + \frac{AK}{CK} = \frac{9}{4}$. Но тогда $S_{ABC} = k^2 \cdot S_{\triangle CPK} = \left(\frac{9}{4}\right)^2 \cdot 8 = \frac{81}{2}$.

б) Поскольку $\angle ABC$ острый, то $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$ (центральный угол вдвое больше вписанного), $\angle APC = \angle AOC = 2\beta$ (вписанные в Ω углы, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, PK – биссектриса треугольника ACP. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $CP : AP = CK : AK = 4 : 5$. Пусть $CP = 4y$; тогда $AP = 5y$.

Из дополнительного условия $\beta = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\cos 2\beta = \frac{\cos 2\beta}{1} = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{5};$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \sqrt{\left(1 + \frac{3}{5}\right)\left(1 - \frac{3}{5}\right)} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Площадь треугольника ACP равна $\frac{1}{2} \cdot CP \cdot AP \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cdot 4y \cdot 5y \cdot \frac{4}{5} = 8y^2$, откуда получаем $8y^2 = 18$, $y^2 = \frac{9}{4}$. По теореме косинусов из треугольника APC находим, что $AC^2 = (4y)^2 + (5y)^2 - 2 \cdot 4y \cdot 5y \cdot \cos 2\beta = 41y^2 - 40y^2 \cdot \frac{3}{5} = 17y^2 = \frac{17 \cdot 9}{4}$, откуда окончательно получаем $AC = \frac{3\sqrt{17}}{2}$.

ВАРИАНТ 21

1. **[5 баллов]** S – сумма первых 7 членов возрастающей арифметической прогрессии a_1, a_2, $a_3, \ldots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_8 a_{17} > S + 27$, $a_{11} a_{14} < S + 60$. Укажите все возможные значения a_1.

Ответ: -11; -10; -9; -7; -6; -5.

Решение. Обозначим разность прогрессии через d. Данные в условии неравенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases}(a_1+7d)(a_1+16d) > S+27,\\ (a_1+10d)(a_1+13d) < S+60\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+23a_1d+112d^2 > S+27,\\ a_1^2+23a_1d+130d^2 < S+60.\end{cases}$$

Вычитая из второго неравенства первое (а это можно сделать, так как они разного знака), получаем $18d^2 < 33$. Из условия следует, что $d \in \mathbb{N}$, поэтому $d = 1$. Тогда $a_7 = a_1 + 6$ и $S = \frac{a_1+a_7}{2} \cdot 7 = \frac{7}{2}(a_1 + a_1 + 6) = 7a_1 + 21$, и система неравенств принимает вид

$$\begin{cases}a_1^2+23a_1+112 > 7a_1+21+27,\\ a_1^2+23a_1+130 < 7a_1+21+60\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+16a_1+64 > 0,\\ a_1^2+16a_1+49 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1 \neq -8,\\ a_1 \in \left(-8-\sqrt{15}; -8+\sqrt{15}\right).\end{cases}$$

Так как $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 \in \{-11; -10; -9; -7; -6; -5\}$.

2. **[5 баллов]** Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 4$, $AC = CB = 5$, $AD = DB = 6$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

Ответ: $2\sqrt{7} \pm \sqrt{17}$.

Решение. Пусть E – середина AB. CE и DE – медианы равнобедренных треугольников ABC и ABD, а значит, биссектрисы и высоты. То есть $AB \perp CE$, $AB \perp DE$. Значит, отрезок AB перпендикулярен плоскости CDE, следовательно, $AB \perp CD$. Таким образом, AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (обозначим эту плоскость через α). Сечение цилиндра этой плоскостью – окружность, а AB является хордой этой окружности. Тогда радиус цилиндра минимален, если AB – диаметр. Отметим, что это возможно в силу того, что отрезки DE и CE длиннее, чем $\frac{1}{2}AB = 2$. Действительно, из треугольников ACE и ADE следует, что $CE = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$, $DE = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$.

Рассмотрим тетраэдр, в котором AB является диаметром цилиндра. Возможны 2 случая: точки C и D лежат по одну или по разные стороны плоскости α.

Пусть H – проекция точек C и D на плоскость α. Угол $\angle AHB = 90°$, так как он вписан в окружность и опирается на её диаметр. $AH = BH$ в силу равенства треугольников ACH и BCH. Тогда $AH = BH = 2\sqrt{2}$. По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках AHC и DHC соответственно: $CH = \sqrt{25 - 8} = \sqrt{17}$, $DH = \sqrt{36 - 8} = 2\sqrt{7}$.

Тогда, если точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α, то $CD = DH - CH = 2\sqrt{7} - \sqrt{17}$. Если точки C и D лежат по разные стороны от плоскости α, то $CD = DH + CH = 2\sqrt{7} + \sqrt{17}$.

3. **[7 баллов]** Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x, y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b, при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases}(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant 20,\\ a^2 + b^2 \leqslant \min(8a - 4b; 20).\end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M.

Ответ: $60\pi - 10\sqrt{3}$.

Решение. Второе неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leqslant 8a-4b \\ a^2+b^2 \leqslant 20. \end{cases}$$

Значит, исходная система равносильна следующим:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 20, \\ a^2+b^2 \leqslant 8a-4b, \\ a^2+b^2 \leqslant 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \leqslant 20, \\ (a-4)^2+(b+2)^2 \leqslant 20, \\ a^2+b^2 \leqslant 20. \end{cases} \qquad (21)$$

Множества точек, задаваемых этими неравенствами на плоскости $(a;b)$ (x и y при этом выступают в роли параметров), – это круги ω_1, ω_2, ω_3 радиуса $\sqrt{20}$ с центрами $P(x;y)$, $B(4;-2)$, $A(0;0)$ соответственно. Условие задачи означает, что система (21) должна иметь решение относительно $(a;b)$, то есть все три круга должны иметь по крайней мере одну общую точку.

Пусть окружности, ограничивающие ω_2 и ω_3, пересекаются в точках C и D (тогда треугольники ABC и ABD – равносторонние). Пересечение кругов ω_2 и ω_3 есть фигура F, представляющая собой совокупность двух меньших сегментов этих кругов, ограниченных хордой CD. Тогда фигура M состоит из всевозможных точек $(x;y)$, находящихся на расстоянии не более $\sqrt{20}$ от фигуры F. (Это совокупность всех кругов радиуса $\sqrt{20}$, центры которых принадлежат фигуре F.)

Пусть точки P и Q симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки C; точки T и R симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки D. Нетрудно понять, что M есть объединение четырёх секторов (центральный угол всех секторов меньше 180°):

- сектор PAT круга с центром в точке A и радиуса AP,
- сектор QBR круга с центром в точке B и радиуса BQ,
- сектор PCQ круга с центром в точке C и радиуса CP,
- сектор RDT круга с центром в точке D и радиуса DT.

Заметим, что первые два сектора пересекаются по ромбу $ACBD$, и никаких других пересечений между секторами нет. При этом первые два сектора равны между собой, и последние два сектора также равны между собой. Таким образом, площадь фигуры M равна

$$S_M = S_{PAT}+S_{QBR}+S_{PCQ}+S_{RDT}-S_{ACBD} = 2\cdot\frac{\pi\left(2\sqrt{20}\right)^2}{3}+2\cdot\frac{\pi\left(\sqrt{20}\right)^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{20}\right)^2 = 60\pi-10\sqrt{3}.$$

4. **[5 баллов]** Найдите количество троек натуральных чисел $(a;b;c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=35, \\ \text{НОК}(a;b;c)=5^{18}\cdot 7^{16}. \end{cases}$$

Ответ: 9 180.

Решение. Пусть $a=5^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$, $b=5^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$, $c=5^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$ (никаких других простых множителей числа a, b, c содержать не могут – иначе нарушается второе условие системы). Отсюда

$$\text{НОК}(a;b;c)=5^{\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 7^{\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}, \quad \text{НОД}(a;b;c)=5^{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 7^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}.$$

Учитывая данную в условии систему, получаем соотношения

$$\begin{cases} \max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=18, \\ \min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=16, \\ \min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=1. \end{cases} \qquad (22)$$

Рассмотрим первую систему (22). Возможны следующие наборы чисел $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$:

$$(1;1;18) \text{ – 3 набора (за счёт различных перестановок этих чисел);}$$
$$(1;18;18) \text{ – также три набора;}$$
$$(1;k;18),\ \text{где } 2 \leqslant k \leqslant 17 \text{ – есть 16 различных значений } k,$$
$$\text{и для каждого из них 6 перестановок – всего 96 вариантов.}$$

Итак, есть $3+3+6\cdot 16 = 102$ способа выбрать тройку чисел $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$. Аналогично устанавливаем, что для выбора $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ есть $3+3+6\cdot 14 = 90$ способов, а так как один выбор осуществляется независимо от другого, общее количество способов равно $102 \cdot 90 = 9\,180$.

5. **[5 баллов]** Даны числа $\log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $\log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $\log_{x+1}(2x^2-3x+5)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

Ответ: $x = 4$.

Решение. Из условия следует, что функции $x+1, 2x-3$ положительны и не принимают значения 1 при всех x из области допустимых значений. Пусть $a = \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)$, $b = \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2$, $c = \log_{x+1}(2x^2-3x+5)$. Тогда

$$abc = \log_{\sqrt{2x-3}}(x+1)\cdot \log_{2x^2-3x+5}(2x-3)^2 \cdot \log_{x+1}(2x^2-3x+5) =$$
$$= 2\log_{2x-3}(x+1) \cdot 2\log_{2x^2-3x+5}(2x-3) \cdot \frac{\log_{2x-3}(2x^2-3x+5)}{\log_{2x-3}(x+1)} = 4.$$

По условию числа $(a;b;c)$ удовлетворяют одному из трёх условий:

$$a = b \ \text{ и } \ a = c+1; \tag{23}$$
$$b = c \ \text{ и } \ c = a+1; \tag{24}$$
$$c = a \ \text{ и } \ a = b+1. \tag{25}$$

Рассмотрим случай (23). Подставляя $b = a$ и $c = a-1$ в полученное выше уравнение $abc = 4$, имеем $a\cdot a\cdot(a-1) = 4$, откуда $a^3 - a^2 - 4 = 0$, $(a-2)\left(a^2+a+2\right) = 0$. Так как многочлен a^2+a+2 не имеет корней, то единственным решением уравнения является $a = 2$, поэтому системе удовлетворяет тройка чисел $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$. Случаи (24) и (25) рассматриваются аналогично; из них получаем, что либо $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, либо $a = 2$, $b = 1$, $c = 2$. Теперь для каждой из полученных троек чисел $(a;b;c)$ найдём x.

Если $c = 1$, то $x+1 = 2x^2-3x+5$. Это уравнение не имеет корней, поэтому значений x, при которых $a = b = 2$, $c = 1$, не существует.

Если $b = 1$, то $2x^2-3x+5 = (2x-3)^2$. Это уравнение эквивалентно уравнению $2x^2-9x+4 = 0$, корнями которого являются $x = \frac{1}{2}$, не удовлетворяющий ОДЗ, и $x = 4$. Значение $x = 4$ подходит: $a = \log_{\sqrt{5}} 5 = 2$, $c = \log_5 25 = 2$.

Если $a = 1$, то $\sqrt{2x-3} = x+1$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получаем уравнение $x^2 = -4$, которое не имеет корней. Поэтому значений x, при которых $b = c = 2$, $a = 1$, не существует.

Итак, $x = 4$ – единственное решение задачи.

6. **[7 баллов]** Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Окружность, проходящая через точки A, O и C, пересекает отрезок BC в точке P. Касательные к ω, проведённые через точки A и C, пересекаются в точке T. Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K. Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 12 и 9.

а) Найдите площадь треугольника ABC.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{7}$. Найдите AC.

Ответ: а) $S_{ABC} = 49$; б) $AC = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Решение. Так как прямые TC и TA – касательные к ω, они перпендикулярны радиусам, проведённым в точки касания, и $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$. Отсюда следует, что точки A и C лежат на окружности с диаметром OT (назовём эту окружность Ω). На этой же окружности лежит точка P, поскольку она лежит на окружности, проходящей через точки A, O, C. Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда по свойству угла между хордой и касательной получаем, что $\angle TAC = \beta$. Далее, $\angle TPC = \angle TAC = \beta$ (углы, вписанные в окружность Ω). Из того, что $\angle TPC = \angle ABC$, следует, что $AB \parallel PT$.

Так как у треугольников APK и CPK общая высота, проведённая из вершины P, их площади относятся как основания, т. е. $CK : AK = S_{\triangle CPK} : S_{\triangle APK} = 9 : 12 = 3 : 4$. Треугольники ABC и KPC подобны, поскольку $PK \parallel AB$, и коэффициент подобия k равен $\frac{AC}{CK} = \frac{AK+KC}{CK} = 1 + \frac{AK}{CK} = \frac{7}{3}$. Но тогда $S_{ABC} = k^2 \cdot S_{\triangle CPK} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 \cdot 9 = 49$.

б) Поскольку $\angle ABC$ острый, то $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$ (центральный угол вдвое больше вписанного), $\angle APC = \angle AOC = 2\beta$ (вписанные в Ω углы, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, PK – биссектриса треугольника ACP. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $CP : AP = CK : AK = 3 : 4$. Пусть $CP = 3y$; тогда $AP = 4y$.

Из дополнительного условия $\beta = \operatorname{arctg} \frac{3}{7}$. Следовательно,

$$\cos 2\beta = \frac{\cos 2\beta}{1} = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{20}{29};$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \sqrt{\left(1 + \frac{20}{29}\right)\left(1 - \frac{20}{29}\right)} = \sqrt{\frac{49 \cdot 9}{29^2}} = \frac{21}{29}.$$

Площадь треугольника ACP равна $\frac{1}{2} \cdot CP \cdot AP \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cdot 3y \cdot 4y \cdot \frac{21}{29} = \frac{126}{29} y^2$, откуда получаем $\frac{126y^2}{29} = 21$, $y^2 = \frac{29}{6}$. По теореме косинусов из треугольника APC находим, что $AC^2 = (3y)^2 + (4y)^2 - 2 \cdot 3y \cdot 4y \cdot \cos 2\beta = 25y^2 - 24y^2 \cdot \frac{20}{29} = \frac{245y^2}{29} = \frac{245}{6}$, откуда окончательно получаем $AC = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

ВАРИАНТ 22

1. **[5 баллов]** S – сумма первых 15 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_7 a_{16} > S-24$, $a_{11}a_{12} < S+4$. Укажите все возможные значения a_1.

   Ответ: -5; -4; -2; -1.

   Решение. Обозначим разность прогрессии через d. Данные в условии неравенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+15d) > S-24, \\ (a_1+10d)(a_1+11d) < S+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+21a_1d+90d^2 > S-24, \\ a_1^2+21a_1d+110d^2 < S+4.\end{cases}$$

   Вычитая из второго неравенства первое (а это можно сделать, так как они разного знака), получаем $20d^2 < 28$. Из условия следует, что $d \in \mathbb{N}$, поэтому $d=1$. Тогда $a_{15} = a_1+14$ и $S = \frac{a_1+a_{15}}{2}\cdot 15 = \frac{15}{2}(a_1+a_1+14) = 15a_1+105$, и система неравенств принимает вид

$$\begin{cases}a_1^2+21a_1+90 > 15a_1+105-24, \\ a_1^2+21a_1+110 < 15a_1+105+4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+6a_1+9>0, \\ a_1^2+6a_1+1<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1 \neq -3, \\ a_1 \in \left(-3-\sqrt{8}; -3+\sqrt{8}\right).\end{cases}$$

   Так как $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 \in \{-5; -4; -2; -1\}$.

2. **[5 баллов]** Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB=4$, $AC=CB=5$, $AD=DB=7$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

   Ответ: $\sqrt{41}\pm\sqrt{17}$.

   Решение. Пусть E – середина AB. CE и DE – медианы равнобедренных треугольников ABC и ABD, а значит, биссектрисы и высоты. То есть $AB \perp CE$, $AB \perp DE$. Значит, отрезок AB перпендикулярен плоскости CDE, следовательно, $AB \perp CD$. Таким образом, AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (обозначим эту плоскость через α). Сечение цилиндра этой плоскостью – окружность, а AB является хордой этой окружности. Тогда радиус цилиндра минимален, если AB – диаметр. Отметим, что это возможно в силу того, что отрезки DE и CE длиннее, чем $\frac{1}{2}AB = 2$. Действительно, из треугольников ACE и ADE следует, что $CE = \sqrt{5^2-2^2} = \sqrt{21}$, $DE = \sqrt{7^2-2^2} = 3\sqrt{5}$.

   Рассмотрим тетраэдр, в котором AB является диаметром цилиндра. Возможны 2 случая: точки C и D лежат по одну или по разные стороны плоскости α.

   Пусть H – проекция точек C и D на плоскость α. Угол $\angle AHB = 90^\circ$, так как он вписан в окружность и опирается на её диаметр. $AH = BH$ в силу равенства треугольников ACH и BCH. Тогда $AH = BH = 2\sqrt{2}$. По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках AHC и DHC соответственно: $CH = \sqrt{25-8} = \sqrt{17}$, $DH = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$.

   Тогда, если точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α, то $CD = DH - CH = \sqrt{41}-\sqrt{17}$. Если точки C и D лежат по разные стороны от плоскости α, то $CD = DH + CH = \sqrt{41}+\sqrt{17}$.

3. **[7 баллов]** Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x,y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b, при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 50, \\ a^2+b^2 \leqslant \min(14a+2b; 50).\end{cases}$$

   Найдите площадь фигуры M.

   Ответ: $150\pi - 25\sqrt{3}$.

Решение. Второе неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leqslant 14a+2b \\ a^2+b^2 \leqslant 50. \end{cases}$$

Значит, исходная система равносильна следующим:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 50, \\ a^2+b^2 \leqslant 14a+2b, \\ a^2+b^2 \leqslant 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \leqslant 50, \\ (a-7)^2+(b-1)^2 \leqslant 50, \\ a^2+b^2 \leqslant 50. \end{cases} \qquad (26)$$

Множества точек, задаваемых этими неравенствами на плоскости $(a;b)$ (x и y при этом выступают в роли параметров), – это круги ω_1, ω_2, ω_3 радиуса $\sqrt{50}$ с центрами $P(x;y)$, $B(7;1)$, $A(0;0)$ соответственно. Условие задачи означает, что система (26) должна иметь решение относительно $(a;b)$, то есть все три круга должны иметь по крайней мере одну общую точку.

Пусть окружности, ограничивающие ω_2 и ω_3, пересекаются в точках C и D (тогда треугольники ABC и ABD – равносторонние). Пересечение кругов ω_2 и ω_3 есть фигура F, представляющая собой совокупность двух меньших сегментов этих кругов, ограниченных хордой CD. Тогда фигура M состоит из всевозможных точек $(x;y)$, находящихся на расстоянии не более $\sqrt{50}$ от фигуры F. (Это совокупность всех кругов радиуса $\sqrt{50}$, центры которых принадлежат фигуре F.)

Пусть точки P и Q симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки C; точки T и R симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки D. Нетрудно понять, что M есть объединение четырёх секторов (центральный угол всех секторов меньше 180°):

- сектор PAT круга с центром в точке A и радиуса AP,
- сектор QBR круга с центром в точке B и радиуса BQ,
- сектор PCQ круга с центром в точке C и радиуса CP,
- сектор RDT круга с центром в точке D и радиуса DT.

Заметим, что первые два сектора пересекаются по ромбу $ACBD$, и никаких других пересечений между секторами нет. При этом первые два сектора равны между собой, и последние два сектора также равны между собой. Таким образом, площадь фигуры M равна

$$S_M = S_{PAT}+S_{QBR}+S_{PCQ}+S_{RDT}-S_{ACBD} = 2\cdot\frac{\pi\left(2\sqrt{50}\right)^2}{3}+2\cdot\frac{\pi\left(\sqrt{50}\right)^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{50}\right)^2 = 150\pi-25\sqrt{3}.$$

4. **[5 баллов]** Найдите количество троек натуральных чисел $(a;b;c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=14, \\ \text{НОК}(a;b;c)=2^{17}\cdot 7^{18}. \end{cases}$$

Ответ: 9 792.

Решение. Пусть $a=2^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$, $b=2^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$, $c=2^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$ (никаких других простых множителей числа a, b, c содержать не могут – иначе нарушается второе условие системы). Отсюда

$$\text{НОК}(a;b;c)=2^{\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 7^{\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}, \quad \text{НОД}(a;b;c)=2^{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 7^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}.$$

Учитывая данную в условии систему, получаем соотношения

$$\begin{cases} \max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=17, \\ \min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=18, \\ \min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=1. \end{cases} \qquad (27)$$

Рассмотрим первую систему (27). Возможны следующие наборы чисел $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$:

$(1;1;17)$ – 3 набора (за счёт различных перестановок этих чисел);
$(1;17;17)$ – также три набора;
$(1;k;17)$, где $2\leqslant k\leqslant 16$ – есть 15 различных значений k,
и для каждого из них 6 перестановок – всего 90 вариантов.

Итак, есть $3+3+6\cdot 15=96$ способов выбрать тройку чисел $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$. Аналогично устанавливаем, что для выбора $(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ есть $3+3+6\cdot 16=102$ способа, а так как один выбор осуществляется независимо от другого, общее количество способов равно $96\cdot 102=9\,792$.

5. **[5 баллов]** Даны числа $\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$, $\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье меньше их на 1?

Ответ: $x=7$.

Решение. Из условия следует, что функции $\left(\frac{x}{2}+1\right),\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right),\left(\frac{3x}{2}-6\right)$ положительны и не принимают значения 1 при всех x из области допустимых значений. Пусть $a=\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)$, $b=\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2$, $c=\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)$. Тогда

$$abc=\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)^2}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)^2\cdot\log_{\sqrt{\frac{3x}{2}-6}}\left(\frac{x}{2}+1\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}+1\right)}\left(\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}\right)\cdot 4\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)\cdot 2\frac{\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{x}{2}+1\right)}{\log_{\frac{7x}{2}-\frac{17}{4}}\left(\frac{3x}{2}-6\right)}=4.$$

По условию числа $(a;b;c)$ удовлетворяют одному из трёх условий:

$$a=b \text{ и } a=c+1; \tag{28}$$
$$b=c \text{ и } c=a+1; \tag{29}$$
$$c=a \text{ и } a=b+1. \tag{30}$$

Рассмотрим случай (28). Подставляя $b=a$ и $c=a-1$ в полученное выше уравнение $abc=4$, имеем $a\cdot a\cdot(a-1)=4$, откуда $a^3-a^2-4=0$, $(a-2)\left(a^2+a+2\right)=0$. Так как многочлен a^2+a+2 не имеет корней, то единственным решением уравнения является $a=2$, поэтому системе удовлетворяет тройка чисел $a=2$, $b=2$, $c=1$. Случаи (29) и (30) рассматриваются аналогично; из них получаем, что либо $a=1$, $b=2$, $c=2$, либо $a=2$, $b=1$, $c=2$. Теперь для каждой из полученных троек чисел $(a;b;c)$ найдём x.

Если $c=2$, то $\frac{3x}{2}-6=\frac{x}{2}+1$, то есть $x=7$. Это значение подходит: $a=\log_{\left(\frac{9}{2}\right)^2}\frac{81}{4}=1$, $b=\log_{\sqrt{\frac{81}{4}}}\left(\frac{9}{2}\right)=2$.

Если $c=1$, то $\sqrt{\frac{3x}{2}-6}=\frac{x}{2}+1$. Из этого уравнения после возведения в квадрат получаем, что $x^2-2x+28=0$, то есть корней нет.

Итак, $x=7$ – единственное решение задачи.

6. **[7 баллов]** Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Окружность, проходящая через точки A, O и C, пересекает отрезок BC в точке P. Касательные к ω, проведённые через точки A и C, пересекаются в точке T. Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K. Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 7 и 5.

а) Найдите площадь треугольника ABC.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Найдите AC.

Ответ: а) $S_{ABC}=\frac{144}{5}$; б) $AC=\frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{7}}$.

Решение. Так как прямые TC и TA – касательные к ω, они перпендикулярны радиусам, проведённым в точки касания, и $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$. Отсюда следует, что точки A и C лежат на окружности с диаметром OT (назовём эту окружность Ω). На этой же окружности лежит точка P, поскольку она лежит на окружности, проходящей через точки A, O, C. Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда по свойству угла между хордой и касательной получаем, что $\angle TAC = \beta$. Далее, $\angle TPC = \angle TAC = \beta$ (углы, вписанные в окружность Ω). Из того, что $\angle TPC = \angle ABC$, следует, что $AB \parallel PT$.

Так как у треугольников APK и CPK общая высота, проведённая из вершины P, их площади относятся как основания, т. е. $CK : AK = S_{\triangle CPK} : S_{\triangle APK} = 5 : 7$. Треугольники ABC и KPC подобны, поскольку $PK \parallel AB$, и коэффициент подобия k равен $\frac{AC}{CK} = \frac{AK+KC}{CK} = 1 + \frac{AK}{CK} = \frac{12}{5}$. Но тогда $S_{ABC} = k^2 \cdot S_{\triangle CPK} = \left(\frac{12}{5}\right)^2 \cdot 5 = \frac{144}{5}$.

б) Поскольку $\angle ABC$ острый, то $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$ (центральный угол вдвое больше вписанного), $\angle APC = \angle AOC = 2\beta$ (вписанные в Ω углы, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, PK – биссектриса треугольника ACP. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $CP : AP = CK : AK = 5 : 7$. Пусть $CP = 5y$; тогда $AP = 7y$.

Из дополнительного условия $\beta = \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$. Следовательно,

$$\cos 2\beta = \frac{\cos 2\beta}{1} = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{7}{25};$$
$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \sqrt{\left(1 + \frac{7}{25}\right)\left(1 - \frac{7}{25}\right)} = \sqrt{\frac{32 \cdot 18}{25^2}} = \frac{24}{25}.$$

Площадь треугольника ACP равна $\frac{1}{2} \cdot CP \cdot AP \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cdot 5y \cdot 7y \cdot \frac{24}{25} = \frac{84}{5}y^2$, откуда получаем $\frac{84y^2}{5} = 12$, $y^2 = \frac{5}{7}$. По теореме косинусов из треугольника APC находим, что $AC^2 = (5y)^2 + (7y)^2 - 2 \cdot 5y \cdot 7y \cdot \cos 2\beta = 74y^2 - 70y^2 \cdot \frac{7}{25} = \frac{272y^2}{5} = \frac{272}{7}$, откуда окончательно получаем $AC = \frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{7}}$.

ВАРИАНТ 23

1. **[5 баллов]** S – сумма первых 6 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_{10}a_{16} > S+39$, $a_{11}a_{15} < S+55$. Укажите все возможные значения a_1.

Ответ: -12; -11; -10; -8; -7; -6.

Решение. Обозначим разность прогрессии через d. Данные в условии неравенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases}(a_1+9d)(a_1+15d) > S+39,\\ (a_1+10d)(a_1+14d) < S+55\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+24a_1d+135d^2 > S+39,\\ a_1^2+24a_1d+140d^2 < S+55.\end{cases}$$

Вычитая из второго неравенства первое (а это можно сделать, так как они разного знака), получаем $5d^2 < 16$. Из условия следует, что $d \in \mathbb{N}$, поэтому $d=1$. Тогда $a_6 = a_1+5$ и $S = \frac{a_1+a_6}{2}\cdot 6 = 3(a_1+a_1+5) = 6a_1+15$, и система неравенств принимает вид

$$\begin{cases}a_1^2+24a_1+135 > 6a_1+15+39,\\ a_1^2+24a_1+140 < 6a_1+15+55\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+18a_1+81 > 0,\\ a_1^2+18a_1+70 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1 \neq -9,\\ a_1 \in \left(-9-\sqrt{11}; -9+\sqrt{11}\right).\end{cases}$$

Так как $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 \in \{-12; -11; -10; -8; -7; -6\}$.

2. **[5 баллов]** Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB=4$, $AC=CB=6$, $AD=DB=7$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

Ответ: $\sqrt{41}\pm 2\sqrt{7}$.

Решение. Пусть E – середина AB. CE и DE – медианы равнобедренных треугольников ABC и ABD, а значит, биссектрисы и высоты. То есть $AB \perp CE$, $AB \perp DE$. Значит, отрезок AB перпендикулярен плоскости CDE, следовательно, $AB \perp CD$. Таким образом, AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (обозначим эту плоскость через α). Сечение цилиндра этой плоскостью – окружность, а AB является хордой этой окружности. Тогда радиус цилиндра минимален, если AB – диаметр. Отметим, что это возможно в силу того, что отрезки DE и CE длиннее, чем $\frac{1}{2}AB = 2$. Действительно, из треугольников ACE и ADE следует, что $CE = \sqrt{6^2-2^2} = 4\sqrt{2}$, $DE = \sqrt{7^2-2^2} = 3\sqrt{5}$.

Рассмотрим тетраэдр, в котором AB является диаметром цилиндра. Возможны 2 случая: точки C и D лежат по одну или по разные стороны плоскости α.

Пусть H – проекция точек C и D на плоскость α. Угол $\angle AHB = 90^\circ$, так как он вписан в окружность и опирается на её диаметр. $AH = BH$ в силу равенства треугольников ACH и BCH. Тогда $AH = BH = 2\sqrt{2}$. По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках AHC и DHC соответственно: $CH = \sqrt{36-8} = 2\sqrt{7}$, $DH = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$.

Тогда, если точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α, то $CD = DH - CH = \sqrt{41} - 2\sqrt{7}$. Если точки C и D лежат по разные стороны от плоскости α, то $CD = DH + CH = \sqrt{41} + 2\sqrt{7}$.

3. **[7 баллов]** Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x, y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b, при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 8,\\ a^2+b^2 \leqslant \min(-4a+4b; 8).\end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M.

Ответ: $24\pi - 4\sqrt{3}$.

Решение. Второе неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \leqslant -4a + 4b \\ a^2 + b^2 \leqslant 8. \end{cases}$$

Значит, исходная система равносильна следующим:

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant 8, \\ a^2 + b^2 \leqslant -4a + 4b, \\ a^2 + b^2 \leqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2 + (b-y)^2 \leqslant 8, \\ (a+2)^2 + (b-2)^2 \leqslant 8, \\ a^2 + b^2 \leqslant 8. \end{cases} \qquad (31)$$

Множества точек, задаваемых этими неравенствами на плоскости $(a; b)$ (x и y при этом выступают в роли параметров), – это круги ω_1, ω_2, ω_3 радиуса $\sqrt{8}$ с центрами $P(x; y)$, $B(-2; 2)$, $A(0; 0)$ соответственно. Условие задачи означает, что система (31) должна иметь решение относительно $(a; b)$, то есть все три круга должны иметь по крайней мере одну общую точку.

Пусть окружности, ограничивающие ω_2 и ω_3, пересекаются в точках C и D (тогда треугольники ABC и ABD – равносторонние). Пересечение кругов ω_2 и ω_3 есть фигура F, представляющая собой совокупность двух меньших сегментов этих кругов, ограниченных хордой CD. Тогда фигура M состоит из всевозможных точек $(x; y)$, находящихся на расстоянии не более $\sqrt{8}$ от фигуры F. (Это совокупность всех кругов радиуса $\sqrt{8}$, центры которых принадлежат фигуре F.)

Пусть точки P и Q симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки C; точки T и R симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки D. Нетрудно понять, что M есть объединение четырёх секторов (центральный угол всех секторов меньше $180°$):

- сектор PAT круга с центром в точке A и радиуса AP,
- сектор QBR круга с центром в точке B и радиуса BQ,
- сектор PCQ круга с центром в точке C и радиуса CP,
- сектор RDT круга с центром в точке D и радиуса DT.

Заметим, что первые два сектора пересекаются по ромбу $ACBD$, и никаких других пересечений между секторами нет. При этом первые два сектора равны между собой, и последние два сектора также равны между собой. Таким образом, площадь фигуры M равна

$$S_M = S_{PAT} + S_{QBR} + S_{PCQ} + S_{RDT} - S_{ACBD} = 2 \cdot \frac{\pi\left(2\sqrt{8}\right)^2}{3} + 2 \cdot \frac{\pi\left(\sqrt{8}\right)^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\sqrt{8}\right)^2 = 24\pi - 4\sqrt{3}.$$

4. **[5 баллов]** Найдите количество троек натуральных чисел $(a; b; c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a; b; c) = 22, \\ \text{НОК}(a; b; c) = 2^{16} \cdot 11^{19}. \end{cases}$$

Ответ: 9 720.

Решение. Пусть $a = 2^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2}$, $b = 2^{\beta_1} \cdot 11^{\beta_2}$, $c = 2^{\gamma_1} \cdot 11^{\gamma_2}$ (никаких других простых множителей числа a, b, c содержать не могут – иначе нарушается второе условие системы). Отсюда

$$\text{НОК}(a; b; c) = 2^{\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)} \cdot 11^{\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}, \quad \text{НОД}(a; b; c) = 2^{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)} \cdot 11^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}.$$

Учитывая данную в условии систему, получаем соотношения

$$\begin{cases} \max(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1) = 16, \\ \min(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1) = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \max(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 19, \\ \min(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2) = 1. \end{cases} \qquad (32)$$

Рассмотрим первую систему (32). Возможны следующие наборы чисел $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$:

$$(1;1;16) \text{ – 3 набора (за счёт различных перестановок этих чисел);}$$
$$(1;16;16) \text{ – также три набора;}$$
$$(1;k;16),\ \text{где } 2\leqslant k\leqslant 15 \text{ – есть 14 различных значений } k,$$
$$\text{и для каждого из них 6 перестановок – всего 84 варианта.}$$

Итак, есть $3+3+6\cdot 14=90$ способов выбрать тройку чисел $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$. Аналогично устанавливаем, что для выбора $(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ есть $3+3+6\cdot 17=108$ способов, а так как один выбор осуществляется независимо от другого, общее количество способов равно $90\cdot 108=9\,720$.

5. **[5 баллов]** Даны числа $\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье больше их на 1?

Ответ: $x=-9$.

Решение. Из условия следует, что функции $2x+23, x+34, -x-4$ положительны и не принимают значения 1 при всех x из области допустимых значений. Пусть $a=\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)$, $b=\log_{(x+4)^2}(x+34)$, $c=\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)$. Тогда

$$abc=\log_{\sqrt{x+34}}(2x+23)\cdot\log_{(x+4)^2}(x+34)\cdot\log_{\sqrt{2x+23}}(-x-4)=$$
$$=2\log_{x+34}(2x+23)\cdot\frac{1}{2}\log_{(-x-4)}(x+34)\cdot 2\frac{\log_{(x+34)}(5x-1)}{\log_{(x+34)}(-x-4)}=2.$$

По условию числа $(a;b;c)$ удовлетворяют одному из трёх условий:

$$a=b \ \text{ и } \ a=c-1; \tag{33}$$
$$b=c \ \text{ и } \ c=a-1; \tag{34}$$
$$c=a \ \text{ и } \ a=b-1. \tag{35}$$

Рассмотрим случай (33). Подставляя $b=a$ и $c=a+1$ в полученное выше уравнение $abc=2$, имеем $a\cdot a\cdot(a+1)=2$, откуда $a^3+a^2-2=0$, $(a-1)\left(a^2+2a+2\right)=0$. Так как многочлен a^2+2a+2 не имеет корней, то единственным решением уравнения является $a=1$, поэтому системе удовлетворяет тройка чисел $a=1$, $b=1$, $c=2$. Случаи (34) и (35) рассматриваются аналогично; из них получаем, что либо $a=2$, $b=1$, $c=1$, либо $a=1$, $b=2$, $c=1$. Теперь для каждой из полученных троек чисел $(a;b;c)$ найдём x.

Если $c=1$, то $2x+23=(x+4)^2$. Это уравнение эквивалентно уравнению $x^2+6x-7=0$, корнями которого являются $x=1$ и $x=-7$. $x=1$ не удовлетворяет ОДЗ. При $x=-7$ $a=\log_{\sqrt{27}}9\neq 2$. Кроме того, $a\neq 1$. Поэтому данный случай не подходит.

Если $c=2$, то $2x+23=-x-4$, то есть $x=-9$. Значение $x=-9$ подходит: $a=log_{\sqrt{25}}5=1$, $b=\log_{5^2}25=1$.

Таким образом, $x=-9$ – единственное решение задачи.

6. **[7 баллов]** Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Окружность, проходящая через точки A, O и C, пересекает отрезок BC в точке P. Касательные к ω, проведённые через точки A и C, пересекаются в точке T. Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K. Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 15 и 13.

а) Найдите площадь треугольника ABC.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC=\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$. Найдите AC.

Ответ: а) $S_{ABC}=\frac{784}{13}$; б) $AC=\frac{14}{\sqrt{3}}$.

Решение. Так как прямые TC и TA – касательные к ω, они перпендикулярны радиусам, проведённым в точки касания, и $\angle OCT=\angle OAT=90^\circ$. Отсюда следует, что точки A и C лежат на окружности с диаметром OT (назовём эту окружность Ω). На этой же окружности лежит точка P, поскольку она лежит на окружности, проходящей через точки A, O, C. Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда по свойству угла между хордой и касательной получаем, что $\angle TAC = \beta$. Далее, $\angle TPC = \angle TAC = \beta$ (углы, вписанные в окружность Ω). Из того, что $\angle TPC = \angle ABC$, следует, что $AB \parallel PT$.

Так как у треугольников APK и CPK общая высота, проведённая из вершины P, их площади относятся как основания, т. е. $CK : AK = S_{\triangle CPK} : S_{\triangle APK} = 13 : 15$. Треугольники ABC и KPC подобны, поскольку $PK \parallel AB$, и коэффициент подобия k равен $\frac{AC}{CK} = \frac{AK+KC}{CK} = 1 + \frac{AK}{CK} = \frac{28}{13}$. Но тогда $S_{ABC} = k^2 \cdot S_{\triangle CPK} = \left(\frac{28}{13}\right)^2 \cdot 13 = \frac{784}{13}$.

б) Поскольку $\angle ABC$ острый, то $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$ (центральный угол вдвое больше вписанного), $\angle APC = \angle AOC = 2\beta$ (вписанные в Ω углы, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, PK – биссектриса треугольника ACP. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $CP : AP = CK : AK = 13 : 15$. Пусть $CP = 13y$; тогда $AP = 15y$.

Из дополнительного условия $\beta = \operatorname{arctg} \frac{4}{7}$. Следовательно,

$$\cos 2\beta = \frac{\cos 2\beta}{1} = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{1-\left(\frac{4}{7}\right)^2}{1+\left(\frac{4}{7}\right)^2} = \frac{33}{65};$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{\left(1+\frac{33}{65}\right)\left(1-\frac{33}{65}\right)} = \sqrt{\frac{98\cdot 32}{65^2}} = \frac{56}{65}.$$

Площадь треугольника ACP равна $\frac{1}{2}\cdot CP\cdot AP\sin 2\beta = \frac{1}{2}\cdot 13y\cdot 15y\cdot\frac{56}{65} = 84y^2$, откуда получаем $84y^2 = 28$, $y^2 = \frac{1}{3}$. По теореме косинусов из треугольника APC находим, что $AC^2 = (13y)^2 + (15y)^2 - 2\cdot 13y\cdot 15y\cdot \cos 2\beta = 394y^2 + 390y^2\cdot\frac{33}{65} = 196y^2 = \frac{196}{3}$, откуда окончательно получаем $AC = \frac{14}{\sqrt{3}}$.

ВАРИАНТ 24

1. **[5 баллов]** S – сумма первых 9 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, состоящей из целых чисел. Известно, что $a_5a_{18} > S - 4$, $a_{13}a_{10} < S + 60$. Укажите все возможные значения a_1.

Ответ: $-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2$.

Решение. Обозначим разность прогрессии через d. Данные в условии неравенства можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{cases}(a_1+4d)(a_1+17d) > S-4,\\ (a_1+12d)(a_1+9d) < S+60\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+21a_1d+68d^2 > S-4,\\ a_1^2+21a_1d+108d^2 < S+60.\end{cases}$$

Вычитая из второго неравенства первое (а это можно сделать, так как они разного знака), получаем $40d^2 < 64$. Из условия следует, что $d \in \mathbb{N}$, поэтому $d = 1$. Тогда $a_9 = a_1 + 8$ и $S = \frac{a_1+a_9}{2} \cdot 9 = \frac{9}{2}(a_1 + a_1 + 8) = 9a_1 + 36$, и система неравенств принимает вид

$$\begin{cases}a_1^2+21a_1+68 > 9a_1+36-4,\\ a_1^2+21a_1+108 < 9a_1+36+60\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+12a_1+36 > 0,\\ a_1^2+12a_1+12 < 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1 \neq -6,\\ a_1 \in \left(-6-\sqrt{24}; -6+\sqrt{24}\right).\end{cases}$$

Так как $a_1 \in \mathbb{Z}$, то $a_1 \in \{-10; -9; -8; -7; -5; -4; -3; -2\}$.

2. **[5 баллов]** Рассмотрим всевозможные тетраэдры $ABCD$, в которых $AB = 4$, $AC = CB = 7$, $AD = DB = 8$. Каждый такой тетраэдр впишем в цилиндр так, чтобы все вершины оказались на его боковой поверхности, причём ребро CD было параллельно оси цилиндра. Выберем тетраэдр, для которого радиус цилиндра – наименьший из полученных. Какие значения может принимать длина CD в таком тетраэдре?

Ответ: $2\sqrt{14} \pm \sqrt{41}$.

Решение. Пусть E – середина AB. CE и DE – медианы равнобедренных треугольников ABC и ABD, а значит, биссектрисы и высоты. То есть $AB \perp CE$, $AB \perp DE$. Значит, отрезок AB перпендикулярен плоскости CDE, следовательно, $AB \perp CD$. Таким образом, AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра (обозначим эту плоскость через α). Сечение цилиндра этой плоскостью – окружность, а AB является хордой этой окружности. Тогда радиус цилиндра минимален, если AB – диаметр. Отметим, что это возможно в силу того, что отрезки DE и CE длиннее, чем $\frac{1}{2}AB = 2$. Действительно, из треугольников ACE и ADE следует, что $CE = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$, $DE = \sqrt{8^2 - 2^2} = 2\sqrt{15}$.

Рассмотрим тетраэдр, в котором AB является диаметром цилиндра. Возможны 2 случая: точки C и D лежат по одну или по разные стороны плоскости α.

Пусть H – проекция точек C и D на плоскость α. Угол $\angle AHB = 90°$, так как он вписан в окружность и опирается на её диаметр. $AH = BH$ в силу равенства треугольников ACH и BCH. Тогда $AH = BH = 2\sqrt{2}$. По теореме Пифагора в прямоугольных треугольниках AHC и DHC соответственно: $CH = \sqrt{49 - 8} = \sqrt{41}$, $DH = \sqrt{64 - 8} = 2\sqrt{14}$.

Тогда, если точки C и D лежат по одну сторону от плоскости α, то $CD = DH - CH = 2\sqrt{14} - \sqrt{41}$. Если точки C и D лежат по разные стороны от плоскости α, то $CD = DH + CH = 2\sqrt{14} + \sqrt{41}$.

3. **[7 баллов]** Пусть M – фигура на декартовой плоскости, состоящая из всех точек (x, y) таких, что существует пара вещественных чисел a, b, при которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases}(x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant 10,\\ a^2 + b^2 \leqslant \min(-6a - 2b; 10).\end{cases}$$

Найдите площадь фигуры M.

Ответ: $30\pi - 5\sqrt{3}$.

Решение. Второе неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leqslant -6a-2b \\ a^2+b^2 \leqslant 10. \end{cases}$$

Значит, исходная система равносильна следующим:

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant 10, \\ a^2+b^2 \leqslant -6a-2b, \\ a^2+b^2 \leqslant 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \leqslant 10, \\ (a+3)^2+(b+1)^2 \leqslant 10, \\ a^2+b^2 \leqslant 10. \end{cases} \qquad (36)$$

Множества точек, задаваемых этими неравенствами на плоскости $(a;b)$ (x и y при этом выступают в роли параметров), – это круги ω_1, ω_2, ω_3 радиуса $\sqrt{10}$ с центрами $P(x;y)$, $B(-3;-1)$, $A(0;0)$ соответственно. Условие задачи означает, что система (36) должна иметь решение относительно $(a;b)$, то есть все три круга должны иметь по крайней мере одну общую точку.

Пусть окружности, ограничивающие ω_2 и ω_3, пересекаются в точках C и D (тогда треугольники ABC и ABD – равносторонние). Пересечение кругов ω_2 и ω_3 есть фигура F, представляющая собой совокупность двух меньших сегментов этих кругов, ограниченных хордой CD. Тогда фигура M состоит из всевозможных точек $(x;y)$, находящихся на расстоянии не более $\sqrt{10}$ от фигуры F. (Это совокупность всех кругов радиуса $\sqrt{10}$, центры которых принадлежат фигуре F.)

Пусть точки P и Q симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки C; точки T и R симметричны точкам A и B (соответственно) относительно точки D. Нетрудно понять, что M есть объединение четырёх секторов (центральный угол всех секторов меньше 180°):

- сектор PAT круга с центром в точке A и радиуса AP,
- сектор QBR круга с центром в точке B и радиуса BQ,
- сектор PCQ круга с центром в точке C и радиуса CP,
- сектор RDT круга с центром в точке D и радиуса DT.

Заметим, что первые два сектора пересекаются по ромбу $ACBD$, и никаких других пересечений между секторами нет. При этом первые два сектора равны между собой, и последние два сектора также равны между собой. Таким образом, площадь фигуры M равна

$$S_M = S_{PAT}+S_{QBR}+S_{PCQ}+S_{RDT}-S_{ACBD} = 2\cdot\frac{\pi\left(2\sqrt{10}\right)^2}{3}+2\cdot\frac{\pi\left(\sqrt{10}\right)^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{10}\right)^2 = 30\pi-5\sqrt{3}.$$

4. **[5 баллов]** Найдите количество троек натуральных чисел $(a;b;c)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=33, \\ \text{НОК}(a;b;c)=3^{19}\cdot 11^{15}. \end{cases}$$

Ответ: 9 072.

Решение. Пусть $a=3^{\alpha_1}\cdot 11^{\alpha_2}$, $b=3^{\beta_1}\cdot 11^{\beta_2}$, $c=3^{\gamma_1}\cdot 11^{\gamma_2}$ (никаких других простых множителей числа a, b, c содержать не могут – иначе нарушается второе условие системы). Отсюда

$$\text{НОК}(a;b;c)=3^{\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 11^{\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}, \quad \text{НОД}(a;b;c)=3^{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 11^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}.$$

Учитывая данную в условии систему, получаем соотношения

$$\begin{cases} \max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=19, \\ \min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=15, \\ \min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=1. \end{cases} \qquad (37)$$

Рассмотрим первую систему (37). Возможны следующие наборы чисел $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$:

$$(1;1;19) \text{ – 3 набора (за счёт различных перестановок этих чисел);}$$
$$(1;19;19) \text{ – также три набора;}$$
$$(1;k;19),\ \text{где } 2 \leqslant k \leqslant 18 \text{ – есть 17 различных значений } k,$$
$$\text{и для каждого из них 6 перестановок – всего 102 варианта.}$$

Итак, есть $3+3+6\cdot 17 = 108$ способов выбрать тройку чисел $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$. Аналогично устанавливаем, что для выбора $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ есть $3+3+6\cdot 13 = 84$ способов, а так как один выбор осуществляется независимо от другого, общее количество способов равно $108 \cdot 84 = 9\,072$.

5. **[5 баллов]** Даны числа $\log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $\log_{(x+1)^2}(29-x)$, $\log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$. При каких x два из этих чисел равны, а третье больше их на 1?

Ответ: $x=-7$.

Решение. Из условия следует, что функции $\frac{x}{7}+7, 29-x, -x-1$ положительны и не принимают значения 1 при всех x из области допустимых значений. Пусть $a = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)$, $b = \log_{(x+1)^2}(29-x)$, $c = \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1)$. Тогда

$$abc = \log_{\sqrt{29-x}}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot \log_{(x+1)^2}(29-x)\cdot \log_{\sqrt{\frac{x}{7}+7}}(-x-1) =$$
$$= 2\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)\cdot \frac{1}{2}\log_{(-x-1)}(29-x)\cdot 2\frac{\log_{29-x}(-x-1)}{\log_{29-x}\left(\frac{x}{7}+7\right)} = 2.$$

По условию числа $(a;b;c)$ удовлетворяют одному из трёх условий:

$$a=b \ \text{ и } \ a=c-1; \tag{38}$$
$$b=c \ \text{ и } \ c=a-1; \tag{39}$$
$$c=a \ \text{ и } \ a=b-1. \tag{40}$$

Рассмотрим случай (38). Подставляя $b=a$ и $c=a+1$ в полученное выше уравнение $abc=2$, имеем $a\cdot a\cdot(a+1)=2$, откуда $a^3+a^2-2=0$, $(a-1)\left(a^2+2a+2\right)=0$. Так как многочлен a^2+2a+2 не имеет корней, то единственным решением уравнения является $a=1$, поэтому системе удовлетворяет тройка чисел $a=1$, $b=1$, $c=2$. Случаи (39) и (40) рассматриваются аналогично; из них получаем, что либо $a=2$, $b=1$, $c=1$, либо $a=1$, $b=2$, $c=1$. Теперь для каждой из полученных троек чисел $(a;b;c)$ найдём x.

Если $c=1$, то $\frac{x}{7}+7 = x^2+2x+1$. Это уравнение эквивалентно уравнению $7x^2+13x-42=0$, корнями которого являются $x = -\frac{-13\pm\sqrt{1345}}{14}$. Больший корень не удовлетворяет ОДЗ, а при меньшем $a\neq 1$ и $a \neq 2$, то есть он также не подходит.

Если $c=2$, то $\frac{x}{7}+7 = -x-1$, то есть $x=-7$. Значение $x=-7$ подходит: $a = log_{\sqrt{36}}6 = 1$, $b = \log_{6^2}36 = 1$.

Таким образом, $x=-7$ – единственное решение задачи.

6. **[7 баллов]** Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Окружность, проходящая через точки A, O и C, пересекает отрезок BC в точке P. Касательные к ω, проведённые через точки A и C, пересекаются в точке T. Отрезок TP пересекает сторону AC в точке K. Известно, что площади треугольников APK и CPK равны соответственно 16 и 14.

а) Найдите площадь треугольника ABC.

б) Пусть дополнительно известно, что $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$. Найдите AC.

Ответ. а) $S_{ABC} = \frac{450}{7}$; б) $AC = \frac{5\sqrt{41}}{\sqrt{14}}$.

Решение. Так как прямые TC и TA – касательные к ω, они перпендикулярны радиусам, проведённым в точки касания, и $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$. Отсюда следует, что точки A и C лежат на окружности с диаметром OT (назовём эту окружность Ω). На этой же окружности лежит точка P, поскольку она лежит на окружности, проходящей через точки A, O, C. Обозначим $\angle ABC = \beta$. Тогда по свойству угла между хордой и касательной получаем, что $\angle TAC = \beta$. Далее, $\angle TPC = \angle TAC = \beta$ (углы, вписанные в окружность Ω). Из того, что $\angle TPC = \angle ABC$, следует, что $AB \parallel PT$.

Так как у треугольников APK и CPK общая высота, проведённая из вершины P, их площади относятся как основания, т. е. $CK : AK = S_{\triangle CPK} : S_{\triangle APK} = 14 : 16 = 7 : 8$. Треугольники ABC и KPC подобны, поскольку $PK \parallel AB$, и коэффициент подобия k равен $\frac{AC}{CK} = \frac{AK+KC}{CK} = 1 + \frac{AK}{CK} = \frac{15}{7}$. Но тогда $S_{ABC} = k^2 \cdot S_{\triangle CPK} = \left(\frac{15}{7}\right)^2 \cdot 14 = \frac{450}{7}$.

б) Поскольку $\angle ABC$ острый, то $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\beta$ (центральный угол вдвое больше вписанного), $\angle APC = \angle AOC = 2\beta$ (вписанные в Ω углы, опирающиеся на одну дугу). Следовательно, PK – биссектриса треугольника ACP. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $CP : AP = CK : AK = 7 : 8$. Пусть $CP = 7y$; тогда $AP = 8y$.

Из дополнительного условия $\beta = \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$. Следовательно,

$$\cos 2\beta = \frac{\cos 2\beta}{1} = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta + \sin^2\beta} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\beta}{1 + \operatorname{tg}^2\beta} = \frac{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{8}{17};$$

$$\sin 2\beta = \sqrt{1 - \cos^2 2\beta} = \sqrt{\left(1 + \frac{8}{17}\right)\left(1 - \frac{8}{17}\right)} = \sqrt{\frac{9 \cdot 25}{17^2}} = \frac{15}{17}.$$

Площадь треугольника ACP равна $\frac{1}{2} \cdot CP \cdot AP \sin 2\beta = \frac{1}{2} \cdot 7y \cdot 8y \cdot \frac{15}{17} = \frac{420}{17}y^2$, откуда получаем $\frac{420}{17}y^2 = 30$, $y^2 = \frac{17}{14}$. По теореме косинусов из треугольника APC находим, что $AC^2 = (7y)^2 + (8y)^2 - 2 \cdot 7y \cdot 8y \cdot \cos 2\beta = 113y^2 - 112y^2 \cdot \frac{8}{17} = \frac{1025y^2}{17} = \frac{1025}{14}$, откуда окончательно получаем $AC = \frac{5\sqrt{41}}{\sqrt{14}}$.