

1. Даны квадратные трёхчлены  $f_1(x) = x^2 - 2ax + 3$ ,  $f_2(x) = x^2 + x + b$ ,  $f_3(x) = 3x^2 + (1 - 4a)x + 6 + b$  и  $f_4(x) = 3x^2 + (2 - 2a)x + 3 + 2b$ . Пусть разности их корней равны соответственно  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Известно, что  $|A| \neq |B|$ . Найдите отношение  $\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}$ . Значения  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $a$ ,  $b$  не заданы.
2. Найдите все значения переменной  $x$ , при каждом из которых оба выражения  $f(x) = \sqrt{21 - x^2 - 4x}$  и  $g(x) = |x + 2|$  определены, причём  $\min(f(x); g(x)) > \frac{x+4}{2}$ .
3. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если отношение суммы кубов всех её членов к сумме всех членов этой прогрессии равно  $\frac{48}{7}$ , а отношение суммы четвертых степеней членов к сумме квадратов членов этой прогрессии равно  $\frac{144}{17}$ .
4. Дана равнобокая трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ,  $AD > BC$ ). Окружность  $\Omega$  вписана в угол  $BAD$ , касается отрезка  $BC$  в точке  $C$  и повторно пересекает  $CD$  в точке  $E$  так, что  $CE = 9$ ,  $ED = 7$ . Найдите радиус окружности  $\Omega$  и площадь трапеции  $ABCD$ .
5. На столе лежат 140 различных карточек с числами 3, 6, 9, ..., 417, 420 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 7?
6. На координатной плоскости рассматривается фигура  $M$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x - 1| + |5 - x| \leq 4, \\ \frac{x^2 - 6x + 2y + 7}{y + x - 4} \leq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру  $M$  и найдите её площадь.

7. Окружности  $\omega$  и  $\Omega$  касаются внешним образом в точке  $F$ , а их общая внешняя касательная касается окружностей  $\omega$  и  $\Omega$  соответственно в точках  $A$  и  $B$ . Прямая  $\ell$  проходит через точку  $B$ , вторично пересекает окружность  $\Omega$  в точке  $C$ , а также пересекает  $\omega$  в точках  $D$  и  $E$  (точка  $D$  расположена между  $C$  и  $E$ ). Общая касательная окружностей, проходящая через точку  $F$ , пересекает прямые  $AB$  и  $BE$  в точках  $P$  и  $H$  соответственно (точка  $H$  лежит между точками  $P$  и  $F$ ). Известно, что  $BC = 60$ ,  $DH = HC = 2$ . Найдите длину отрезка  $HP$  и радиусы обеих окружностей.

1. Даны квадратные трёхчлены  $f_1(x) = x^2 - x + 2a$ ,  $f_2(x) = x^2 + 2bx + 3$ ,  $f_3(x) = 4x^2 + (2b - 3)x + 6a + 3$  и  $f_4(x) = 4x^2 + (6b - 1)x + 9 + 2a$ . Пусть разности их корней равны соответственно  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Известно, что  $|A| \neq |B|$ . Найдите отношение  $\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}$ . Значения  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $a$ ,  $b$  не заданы.
2. Найдите все значения переменной  $x$ , при каждом из которых оба выражения  $f(x) = \sqrt{16 - x^2 + 6x}$  и  $g(x) = |x - 3|$  определены, причём  $\min(f(x); g(x)) > \frac{5-x}{2}$ .
3. Известно, что отношение суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии к сумме кубов всех членов этой же прогрессии равно  $\frac{1}{12}$ , а отношение суммы четвёртых степеней всех членов к сумме квадратов всех членов этой прогрессии равно  $\frac{36}{5}$ . Найдите первый член и знаменатель указанной прогрессии.
4. Дана равнобокая трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ,  $AD > BC$ ). Окружность  $\Omega$  вписана в угол  $BAD$ , касается отрезка  $BC$  в точке  $C$  и повторно пересекает  $CD$  в точке  $E$  так, что  $CE = 7$ ,  $ED = 9$ . Найдите радиус окружности  $\Omega$  и площадь трапеции  $ABCD$ .
5. На столе лежат 210 различных карточек с числами 2, 4, 6, ..., 418, 420 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 7?
6. На координатной плоскости рассматривается фигура  $M$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |y| + |4 - y| \leq 4, \\ \frac{y^2 + x - 4y + 1}{2y + x - 7} \leq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру  $M$  и найдите её площадь.

7. Окружности  $\omega$  и  $\Omega$  касаются внешним образом в точке  $F$ , а их общая внешняя касательная касается окружностей  $\omega$  и  $\Omega$  соответственно в точках  $A$  и  $B$ . Прямая  $\ell$  проходит через точку  $B$ , вторично пересекает окружность  $\Omega$  в точке  $C$ , а также пересекает  $\omega$  в точках  $D$  и  $E$  (точка  $D$  расположена между  $C$  и  $E$ ). Общая касательная окружностей, проходящая через точку  $F$ , пересекает прямые  $AB$  и  $BE$  в точках  $P$  и  $H$  соответственно (точка  $H$  лежит между точками  $P$  и  $F$ ). Известно, что  $DE = 18$ ,  $DH = HC = 3$ . Найдите длину отрезка  $HP$  и радиусы обеих окружностей.

## Билет 3

1. Даны квадратные трёхчлены  $f_1(x) = x^2 - 2ax + 3$ ,  $f_2(x) = x^2 + x + b$ ,  $f_3(x) = 3x^2 + (1 - 4a)x + 6 + b$  и  $f_4(x) = 3x^2 + (2 - 2a)x + 3 + 2b$ . Пусть разности их корней равны соответственно  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Известно, что  $|A| \neq |B|$ . Найдите отношение  $\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}$ . Значения  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $a$ ,  $b$  не заданы.

**Ответ:**  $\frac{1}{3}$ .

**Решение.** Пусть  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом  $T$ . Тогда его корни определяются формулой  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{T}}{2a}$ , поэтому  $|x_2 - x_1| = \left| \frac{-b + \sqrt{T} - (-b - \sqrt{T})}{2a} \right| = \frac{\sqrt{T}}{|a|}$ . Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A = \sqrt{4a^2 - 12}, \quad B = \sqrt{1 - 4b}, \quad C = \frac{1}{3} \sqrt{(1 - 4a)^2 - 12(6 + b)}, \quad D = \frac{1}{3} \sqrt{(2 - 2a)^2 - 12(3 + 2b)}$$

Отсюда следует, что  $C^2 - D^2 = \frac{1}{9}((16a^2 - 8a - 12b - 71) - (4a^2 - 8a - 24b - 32)) = \frac{1}{3}(4a^2 + 4b - 13)$ ,  $A^2 - B^2 = 4a^2 + 4b - 13$ . Значит, искомое отношение равно  $\frac{1}{3}$ .

2. Найдите все значения переменной  $x$ , при каждом из которых оба выражения  $f(x) = \sqrt{21 - x^2 - 4x}$  и  $g(x) = |x + 2|$  определены, причём  $\min(f(x); g(x)) > \frac{x+4}{2}$ .

**Ответ:**  $x \in [-7; -\frac{8}{3}) \cup (0; 2)$ .

**Решение.** Обе функции определены при  $21 - x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq 3$ . Заметим, что следующие два утверждения равносильны: “меньшее из двух чисел больше  $A$ ” и “оба числа больше  $A$ ”. Поэтому данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > \frac{x+4}{2}, \\ g(x) > \frac{x+4}{2}. \end{cases}$$

Поскольку функции  $f(x)$  и  $g(x)$  неотрицательны на области определения, оба неравенства системы выполняются при  $\frac{x+4}{2} < 0$ , т.е. при  $x < -4$ , а с учётом ОДЗ – при  $x \in [-7; -4)$ . Если  $x \geq -4$ , то у обоих неравенств левые и правые части неотрицательны, и их возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$\begin{cases} 21 - x^2 - 4x > \frac{x^2 + 8x + 16}{4}, \\ x^2 + 4x + 4 > \frac{x^2 + 8x + 16}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 24x - 68 < 0, \\ 3x^2 + 8x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\frac{34}{5}; 2), \\ x \in (-\infty; -\frac{8}{3}) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{34}{5}; -\frac{8}{3}\right) \cup (0; 2).$$

Учитывая рассматриваемый промежуток  $x \in [-4; +\infty)$ , получаем  $x \in [-4; -\frac{8}{3}) \cup (0; 2)$ . Объединяя результаты, окончательно находим, что  $x \in [-7; -\frac{8}{3}) \cup (0; 2)$ .

3. Найдите первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если отношение суммы кубов всех её членов к сумме всех членов этой прогрессии равно  $\frac{48}{7}$ , а отношение суммы четвертых степеней членов к сумме квадратов членов этой прогрессии равно  $\frac{144}{17}$ .

**Ответ:**  $b_1 = \pm 3$ ,  $q = \frac{1}{4}$ .

**Решение.** Известно, что сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии с первым членом  $b_1$  и знаменателем  $q$  равна  $\frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ . Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии  $|q| < 1$ , поэтому при  $n$ , стремящемся к бесконечности,  $q^n$  стремится к нулю, а сумма членов стремится к  $\frac{b_1}{1 - q}$ .

Кубы членов данной прогрессии  $\{b_n\}$  также образуют геометрическую прогрессию с первым членом  $b_1^3$  и знаменателем  $q^3$ , четвёртые степени членов – прогрессию с первым членом  $b_1^4$  и знаменателем  $q^4$ , а квадраты – прогрессию с первым членом  $b_1^2$  и знаменателем  $q^2$ . Суммы этих членов равны соответственно  $\frac{b_1^3}{1 - q^3}$ ,  $\frac{b_1^4}{1 - q^4}$  и  $\frac{b_1^2}{1 - q^2}$ .

Из условия получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b_1^3}{1 - q^3} : \frac{b_1}{1 - q} = \frac{48}{7}, \\ \frac{b_1^4}{1 - q^4} : \frac{b_1^2}{1 - q^2} = \frac{144}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1^2}{1 + q + q^2} = \frac{48}{7}, \\ \frac{b_1^2}{1 + q^2} = \frac{144}{17}. \end{cases}$$

Делим почленно первое уравнение на второе и получаем  $\frac{1+q^2}{1+q+q^2} = \frac{17}{21} \Leftrightarrow 4q^2 - 17q + 4 = 0$ , откуда  $q = 4$  или  $q = \frac{1}{4}$ . Так как прогрессия является бесконечно убывающей,  $|q| < 1$ , и подходит только значение  $q = \frac{1}{4}$ . Тогда  $b_1^2 = \frac{144}{17} (1 + q^2) = 9$  и  $b_1 = \pm 3$ .

4. Дана равнобокая трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ,  $AD > BC$ ). Окружность  $\Omega$  вписана в угол  $BAD$ , касается отрезка  $BC$  в точке  $C$  и повторно пересекает  $CD$  в точке  $E$  так, что  $CE = 9$ ,  $ED = 7$ . Найдите радиус окружности  $\Omega$  и площадь трапеции  $ABCD$ .

**Ответ:**  $R = 6$ ,  $S_{ABCD} = 96 + 24\sqrt{7}$ .

**Решение.** Обозначим точки касания окружности со сторонами  $AB$  и  $AD$  трапеции через  $K$  и  $W$  соответственно. По теореме о касательной и секущей  $DW^2 = DE \cdot DC = 7 \cdot 16$ ,  $DW = 4\sqrt{7}$ . Так как  $C$  и  $W$  – точки касания окружности с параллельными прямыми  $BC$  и  $AD$ , отрезок  $CW$  есть диаметр окружности, перпендикулярный этим прямым. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника  $CDW$  находим, что  $CW = \sqrt{16^2 - (4\sqrt{7})^2} = 12$ . Следовательно, радиус  $R$  окружности равен  $\frac{1}{2}CW = 6$ .

Пусть  $BC = x$ . Тогда  $BK = x$  (касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны), а в силу того, что трапеция равнобедренная,  $AK = AB - BK = 16 - x$ . Значит,  $AW = AK = 16 - x$ . Отсюда получаем, что сумма оснований есть  $BC + AD = x + (4\sqrt{7} + 16 - x) = 16 + 4\sqrt{7}$ , и площадь трапеции равна  $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (16 + 4\sqrt{7}) = 96 + 24\sqrt{7}$ .

5. На столе лежат 140 различных карточек с числами 3, 6, 9, ..., 417, 420 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 7?

**Ответ:** 1390.

**Решение.** Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 3. Следовательно, остатки от деления на 7 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 7, т.е. имеет вид  $7k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то следом за ним идут числа  $7k + 3$ ,  $7k + 6$ ,  $7k + 9 = 7(k + 1) + 2$ ,  $7k + 12 = 7(k + 1) + 5$ ,  $7k + 15 = 7(k + 2) + 1$ ,  $7k + 18 = 7(k + 2) + 4$ , дающие при делении на 7 остатки 2, 4, 6, 1, 3, 5 соответственно. Далее идёт число  $7k + 21$ , делящееся на 7, и затем остатки повторяются. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 7 идут в порядке ... 0; 3; 6; 2; 5; 1; 4; 0 ...

Среди данных нам 140 чисел есть по 20 чисел, дающих остатки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 от деления на 7.

Сумма двух чисел может делиться на 7 в следующих случаях.

- 1) Оба числа делятся на 7. Всего карточек с такими числами 20, и нужно выбрать 2 них – есть  $C_{20}^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 19 = 190$  способов сделать это.
- 2) Одно из чисел даёт остаток 1 от деления на 7 – тогда второе должно давать остаток 6 от деления на 7. Эту пару чисел можно выбрать  $20 \cdot 20 = 400$  способами.
- 3) Одно из чисел даёт остаток 2 от деления на 7 – тогда второе даёт остаток 5, и, аналогично второму случаю, получаем 400 способов выбрать 2 числа.
- 4) Одно из чисел даёт остаток 3 от деления на 7 – тогда второе даёт остаток 4 – также 400 способов.

В итоге выходит 1390 способов.

6. На координатной плоскости рассматривается фигура  $M$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |x - 1| + |5 - x| \leq 4, \\ \frac{x^2 - 6x + 2y + 7}{y + x - 4} \leq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру  $M$  и найдите её площадь.

**Ответ:** 4.

Рассмотрим первое неравенство. Для раскрытия модулей рассматриваем три возможных случая.

- 1)  $x < 1$ . Тогда неравенство принимает вид  $1 - x + 5 - x \leq 4 \Leftrightarrow x \geq 1$ . В этом случае решений нет.

2)  $1 \leq x \leq 5$ . Тогда получаем  $x - 1 + 5 - x \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq 0$ , что выполняется при всех значениях  $x$  из рассматриваемого промежутка.

3)  $x > 5$ . Тогда  $x - 1 + x - 5 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 5$ , т.е. решений также нет.

Объединяя результаты, получаем, что  $x \in [1; 5]$ .

Перейдём ко второму неравенству. Знаменатель дроби в его левой части обращается в ноль в точках, принадлежащих прямой  $\ell$  с уравнением  $y = 4 - x$  (при этом неравенство не выполнено, так как дробь не определена). Числитель дроби обращается в ноль при  $x^2 - 6x + 2y + 7 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 1$ . Это множество точек есть парабола с ветвями вверх и вершиной в точке  $C(2; -1)$ . Точки пересечения прямой

и параболы можно определить из системы уравнений 
$$\begin{cases} y = 4 - x, \\ x^2 - 6x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - x, \\ x^2 - 8x + 15 = 0. \end{cases}$$

Отсюда выходят две точки –  $A(5; -1)$  и  $C(3; 1)$ .

Второе неравенство выполняется:

– в точках параболы (кроме точек  $A$  и  $C$ );

– в точках ниже параболы и выше прямой (при этом числитель отрицателен, а знаменатель положителен);

– в точках выше параболы и ниже прямой (числитель положителен, а знаменатель отрицателен).

Учитывая также ограничение  $x \in [1; 5]$  из первого неравенства, получаем, что множество  $M$  представляет собой совокупность двух множеств  $M_1$  и  $M_2$ ; первое из них есть криволинейный треугольник  $BCD$ , где  $B(1; -1)$  и  $D(1; 3)$  – это точки пересечения прямой  $x = 1$  с параболой и прямой  $\ell$  соответственно (его сторонами являются отрезки  $CD$ ,  $BD$  и дуга параболы  $BC$ ), а второе – область, ограниченная отрезком  $AC$  и дугой параболы  $AC$  (при этом все точки прямой  $AC$  не принадлежат множеству, а остальные граничные точки – принадлежат).

Из симметрии параболы относительно своей оси (т.е. прямой  $x = 3$ ) следует, что площадь фигуры  $M_3$ , ограниченной отрезком  $BC$  и дугой параболы  $BC$ , равна площади  $M_2$ . Но  $M_1 \cup M_3 = \triangle BCD$ , а площадь этого треугольника несложно найти:  $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$ .

7. Окружности  $\omega$  и  $\Omega$  касаются внешним образом в точке  $F$ , а их общая внешняя касательная касается окружностей  $\omega$  и  $\Omega$  соответственно в точках  $A$  и  $B$ . Прямая  $\ell$  проходит через точку  $B$ , вторично пересекает окружность  $\Omega$  в точке  $C$ , а также пересекает  $\omega$  в точках  $D$  и  $E$  (точка  $D$  расположена между  $C$  и  $E$ ). Общая касательная окружностей, проходящая через точку  $F$ , пересекает прямые  $AB$  и  $BE$  в точках  $P$  и  $H$  соответственно (точка  $H$  лежит между точками  $P$  и  $F$ ). Известно, что  $BC = 60$ ,  $DH = HC = 2$ . Найдите длину отрезка  $HP$  и радиусы обеих окружностей.

**Ответ:**  $HP = 8\sqrt{31}$ ,  $r = 6\sqrt{\frac{93}{5}}$ ,  $R = 2\sqrt{465}$ .

**Решение.** Трижды применяем теорему о касательной и секущей:

$$HF^2 = HC \cdot HB = 2 \cdot 62 \Rightarrow HF = 2\sqrt{31};$$

$$HF^2 = HD \cdot HE \Rightarrow HE = \frac{HF^2}{HD} = 62;$$

$$BA^2 = BD \cdot BE = 64 \cdot 124 \Rightarrow BA = 16\sqrt{31}.$$

Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой,  $PF = PA = PB$ , следовательно,  $PF = \frac{1}{2}AB = 8\sqrt{31}$ . Итак,  $PH = PF - FH = 6\sqrt{31}$ . Пусть  $\angle BPH = \gamma$ . Тогда по теореме косинусов для треугольника  $BPH$  получаем  $BH^2 = BP^2 + HP^2 - 2BP \cdot PH \cdot \cos \gamma$ , т.е.  $62^2 = 64 \cdot 31 + 36 \cdot 31 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 31 \cos \gamma$ , откуда  $31 = 16 + 9 - 24 \cos \gamma$ ,  $\cos \gamma = -\frac{1}{4}$ .

Пусть  $O$  и  $Q$  – центры, а  $R$  и  $r$  – радиусы окружностей  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно; так как окружности касаются, точка касания  $F$  лежит на линии центров  $OQ$ , и при этом  $OQ \perp PH$ . Углы  $B$  и  $F$  четырёхугольника  $OBPF$  прямые, поэтому  $\angle BOF = 180^\circ - \angle BPF = 180^\circ - \gamma$ .

Рассмотрим прямоугольную трапецию  $ABOQ$ . В ней  $OQ = R + r$ ,  $OB = R$ ,  $AQ = r$ ,  $AB = 16\sqrt{31}$ ,  $\angle BOQ = 180^\circ - \gamma$ . Опустив из точки  $Q$  высоту  $QH$  на основание  $BO$ , получаем прямоугольный треугольник  $OHQ$ , в котором  $QH = AB = 16\sqrt{31}$ ,  $OH = R - r$ . По теореме Пифагора получаем

$(R + r)^2 = (R - r)^2 + (16\sqrt{31})^2$ ; кроме того,  $\frac{1}{4} = \cos(180^\circ - \gamma) = \frac{R-r}{R+r}$ . Из последнего уравнения получаем  $R = \frac{5r}{3}$ , а из первого следует, что  $Rr = 64 \cdot 31$ . Решая эту систему уравнений, находим, что  $R = 8\sqrt{\frac{155}{3}}$ ,  $r = 8\sqrt{\frac{93}{5}}$ .

## Билет 4

1. Даны квадратные трёхчлены  $f_1(x) = x^2 - x + 2a$ ,  $f_2(x) = x^2 + 2bx + 3$ ,  $f_3(x) = 4x^2 + (2b - 3)x + 6a + 3$  и  $f_4(x) = 4x^2 + (6b - 1)x + 9 + 2a$ . Пусть разности их корней равны соответственно  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Известно, что  $|A| \neq |B|$ . Найдите отношение  $\frac{C^2 - D^2}{A^2 - B^2}$ . Значения  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $a$ ,  $b$  не заданы.

**Ответ:**  $\frac{1}{2}$ .

**Решение.** Пусть  $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$  – квадратный трёхчлен с положительным дискриминантом  $T$ . Тогда его корни определяются формулой  $x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{T}}{2\alpha}$ , поэтому  $|x_2 - x_1| = \left| \frac{-\beta + \sqrt{T} - (-\beta - \sqrt{T})}{2\alpha} \right| = \frac{\sqrt{T}}{|\alpha|}$ . Применяя эту формулу четыре раза, получаем

$$A = \sqrt{1 - 8a}, \quad B = \sqrt{4b^2 - 12}, \quad C = \frac{1}{4} \sqrt{(2b - 3)^2 - 16(6a + 3)}, \quad D = \frac{1}{4} \sqrt{(6b - 1)^2 - 16(9 + 2a)}$$

Отсюда следует, что  $C^2 - D^2 = \frac{1}{16} ((4b^2 - 12b - 96a - 39) - (36b^2 - 12b - 32a - 143)) = \frac{1}{2} (13 - 8a - 4b^2)$ ,  $A^2 - B^2 = 13 - 8a - 4b^2$ . Значит, искомое отношение равно  $\frac{1}{2}$ .

2. Найдите все значения переменной  $x$ , при каждом из которых оба выражения  $f(x) = \sqrt{16 - x^2 + 6x}$  и  $g(x) = |x - 3|$  определены, причём  $\min(f(x); g(x)) > \frac{5-x}{2}$ .

**Ответ:**  $x \in (-1; 1) \cup (\frac{11}{3}; 8]$ .

**Решение.** Обе функции определены при  $16 - x^2 + 6x \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8$ . Заметим, что следующие два утверждения равносильны: “меньшее из двух чисел больше  $A$ ” и “оба числа больше  $A$ ”. Поэтому данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > \frac{5-x}{2}, \\ g(x) > \frac{5-x}{2}. \end{cases}$$

Поскольку функции  $f(x)$  и  $g(x)$  неотрицательны на области определения, оба неравенства системы выполняются при  $\frac{5-x}{2} < 0$ , т.е. при  $x > 5$ , а с учётом ОДЗ – при  $x \in (5; 8]$ . Если  $x \leq 5$ , то у обоих неравенств левые и правые части неотрицательны, и их возведение в квадрат является равносильным преобразованием. Получаем

$$\begin{cases} 16 - x^2 + 6x > \frac{x^2 - 10x + 25}{4}, \\ x^2 - 6x + 9 > \frac{x^2 - 10x + 25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 34x - 39 < 0, \\ 3x^2 - 14x + 11 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-1; \frac{39}{5}), \\ x \in (-\infty; 1) \cup (\frac{11}{3}; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-1; 1) \cup (\frac{11}{3}; \frac{39}{5}).$$

Учитывая рассматриваемый промежуток  $x \in (-\infty; 5]$ , получаем  $x \in (-1; 1) \cup (\frac{11}{3}; 5]$ . Объединяя результаты, окончательно находим, что  $x \in (-1; 1) \cup (\frac{11}{3}; 8]$ .

3. Известно, что отношение суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии к сумме кубов всех членов этой же прогрессии равно  $\frac{1}{12}$ , а отношение суммы четвёртых степеней всех членов к сумме квадратов всех членов этой прогрессии равно  $\frac{36}{5}$ . Найдите первый член и знаменатель указанной прогрессии.

**Ответ:**  $b_1 = \pm 3$ ,  $q = -\frac{1}{2}$ .

**Решение.** Известно, что сумма первых  $n$  членов геометрической прогрессии с первым членом  $b_1$  и знаменателем  $q$  равна  $\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ . Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии  $|q| < 1$ , поэтому при  $n$ , стремящемся к бесконечности,  $q^n$  стремится к нулю, а сумма членов стремится к  $\frac{b_1}{1-q}$ .

Кубы членов данной прогрессии  $\{b_n\}$  также образуют геометрическую прогрессию с первым членом  $b_1^3$  и знаменателем  $q^3$ , четвёртые степени членов – прогрессию с первым членом  $b_1^4$  и знаменателем  $q^4$ , а квадраты – прогрессию с первым членом  $b_1^2$  и знаменателем  $q^2$ . Суммы этих членов равны соответственно  $\frac{b_1^3}{1-q^3}$ ,  $\frac{b_1^4}{1-q^4}$  и  $\frac{b_1^2}{1-q^2}$ .

Из условия получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b_1^3}{1-q^3} : \frac{b_1}{1-q} = 12, \\ \frac{b_1^4}{1-q^4} : \frac{b_1^2}{1-q^2} = \frac{36}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b_1^2}{1+q+q^2} = 12, \\ \frac{b_1^2}{1+q^2} = \frac{36}{5}. \end{cases}$$

Делим почленно первое уравнение на второе и получаем  $\frac{1+q^2}{1+q+q^2} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 2q^2 + 5q + 2 = 0$ , откуда  $q = -2$  или  $q = -\frac{1}{2}$ . Так как прогрессия является бесконечно убывающей,  $|q| < 1$ , и подходит только значение  $q = -\frac{1}{2}$ . Тогда  $b_1^2 = \frac{36}{5} (1 + q^2) = 9$  и  $b_1 = \pm 3$ .

4. Дана равнобокая трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ,  $AD > BC$ ). Окружность  $\Omega$  вписана в угол  $BAD$ , касается отрезка  $BC$  в точке  $C$  и повторно пересекает  $CD$  в точке  $E$  так, что  $CE = 7$ ,  $ED = 9$ . Найдите радиус окружности  $\Omega$  и площадь трапеции  $ABCD$ .

**Ответ:**  $R = 2\sqrt{7}$ ,  $S_{ABCD} = 56\sqrt{7}$ .

**Решение.** Обозначим точки касания окружности со сторонами  $AB$  и  $AD$  трапеции через  $K$  и  $W$  соответственно. По теореме о касательной и секущей  $DW^2 = DE \cdot DC = 9 \cdot 16$ ,  $DW = 12$ . Так как  $C$  и  $W$  – точки касания окружности с параллельными прямыми  $BC$  и  $AD$ , отрезок  $CW$  есть диаметр окружности, перпендикулярный этим прямым. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника  $CDW$  находим, что  $CW = \sqrt{16^2 - 12^2} = 4\sqrt{7}$ . Следовательно, радиус  $R$  окружности равен  $\frac{1}{2}CW = 2\sqrt{7}$ .

Пусть  $BC = x$ . Тогда  $BK = x$  (касательные, проведённые к окружности из одной точки, равны), а в силу того, что трапеция равнобедренная,  $AK = AB - BK = 16 - x$ . Значит,  $AW = AK = 16 - x$ . Отсюда получаем, что сумма оснований есть  $BC + AD = x + (28 - x) = 28$ , и площадь трапеции равна  $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{7} \cdot 28 = 56\sqrt{7}$ .

5. На столе лежат 210 различных карточек с числами 2, 4, 6, ..., 418, 420 (на каждой карточке написано ровно одно число, каждое число встречается ровно один раз). Сколькими способами можно выбрать 2 карточки так, чтобы сумма чисел на выбранных карточках делилась на 7?

**Ответ:** 3135.

**Решение.** Данные числа, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию с разностью 2. Следовательно, остатки от деления на 7 у этих чисел чередуются. Действительно, если какое-то из этих чисел делится на 7, т.е. имеет вид  $7k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , то следом за ним идут числа  $7k + 2$ ,  $7k + 4$ ,  $7k + 6$ ,  $7k + 8 = 7(k + 1) + 1$ ,  $7k + 10 = 7(k + 1) + 3$ ,  $7k + 12 = 7(k + 1) + 5$ , дающие при делении на 7 остатки 2, 4, 6, 1, 3, 5 соответственно. Далее идёт число  $7k + 14$ , делящееся на 7, и затем остатки повторяются. Таким образом, остатки от деления данных чисел на 7 идут в порядке ... 0; 2; 4; 6; 1; 3; 5; 0 ...

Среди данных нам 210 чисел есть по 30 чисел, дающих остатки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 от деления на 7.

Сумма двух чисел может делиться на 7 в следующих случаях.

- 1) Оба числа делятся на 7. Всего карточек с такими числами 30, и нужно выбрать 2 них – есть  $C_{30}^2 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 29 = 435$  способов сделать это.
- 2) Одно из чисел даёт остаток 1 от деления на 7 – тогда второе должно давать остаток 6 от деления на 7. Эту пару чисел можно выбрать  $30 \cdot 30 = 900$  способами.
- 3) Одно из чисел даёт остаток 2 от деления на 7 – тогда второе даёт остаток 5, и, аналогично второму случаю, получаем 900 способов выбрать 2 числа.
- 4) Одно из чисел даёт остаток 3 от деления на 7 – тогда второе даёт остаток 4 – также 900 способов.

В итоге выходит 3135 способов.

6. На координатной плоскости рассматривается фигура  $M$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} |y| + |4 - y| \leq 4, \\ \frac{y^2 + x - 4y + 1}{2y + x - 7} \leq 0. \end{cases}$$

Изобразите фигуру  $M$  и найдите её площадь.

**Ответ:** 8.

**Решение.** Рассмотрим первое неравенство. Для раскрытия модулей рассматриваем три возможных случая.

- 1)  $y < 0$ . Тогда неравенство принимает вид  $-y + 4 - y \leq 4 \Leftrightarrow y \geq 0$ . В этом случае решений нет.
- 2)  $0 \leq y \leq 4$ . Тогда получаем  $y + 4 - y \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq 0$ , что выполняется при всех значениях  $y$  из рассматриваемого промежутка.
- 3)  $y > 4$ . Тогда  $y - 4 + y \leq 4 \Leftrightarrow y \leq 4$ , т.е. решений также нет.

Объединяя результаты, получаем, что  $y \in [0; 4]$ .

Перейдём ко второму неравенству. Знаменатель дроби в его левой части обращается в ноль в точках, принадлежащих прямой  $x = 7 - 2y$  (назовём её  $\ell$ ; при этом неравенство не выполнено, так как дробь не определена). Числитель дроби обращается в ноль при  $x + y^2 - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -(y - 2)^2 + 3$ . Это множество точек есть парабола с ветвями влево и вершиной в точке  $C(3; 2)$ . Заметим, что парабола и прямая пересекают ось абсцисс в точках  $B(-1; 0)$  и  $D(7; 0)$  соответственно. Точки пересечения прямой

$$\ell \text{ и параболы можно определить из системы уравнений } \begin{cases} x = 7 - 2y, \\ x = -y^2 + 4y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 2y, \\ y^2 - 6y + 8 = 0. \end{cases}$$

Отсюда выходят две точки –  $A(-1; 4)$  и  $C(3; 2)$ .

Второе неравенство выполняется:

- в точках параболы (кроме точек  $A$  и  $C$ );
- в точках справа от параболы и выше прямой (при этом и числитель, и знаменатель дроби положительны);
- в точках слева от параболы и ниже прямой (и числитель, и знаменатель дроби отрицательны).

Учитывая также ограничение  $y \in [-4; 0]$  из первого неравенства, получаем, что множество  $M$  представляет собой совокупность двух множеств  $M_1$  и  $M_2$ ; первое из них есть криволинейный треугольник  $BCD$  (его сторонами являются отрезки  $CD$ ,  $BD$  и дуга параболы  $BC$ ), а второе – область, ограниченная отрезком  $AC$  и дугой параболы  $AC$  (при этом все точки прямой  $AC$  не принадлежат множеству, а остальные граничные точки – принадлежат).

Из симметрии параболы относительно своей оси (т.е. прямой  $y = 2$ ) следует, что площадь фигуры  $M_3$ , ограниченной отрезком  $BC$  и дугой параболы  $BC$ , равна площади  $M_2$ . Но  $M_1 \cup M_3 = \triangle BCD$ , а площадь этого треугольника несложно найти:  $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 8$ .

7. Окружности  $\omega$  и  $\Omega$  касаются внешним образом в точке  $F$ , а их общая внешняя касательная касается окружностей  $\omega$  и  $\Omega$  соответственно в точках  $A$  и  $B$ . Прямая  $\ell$  проходит через точку  $B$ , вторично пересекает окружность  $\Omega$  в точке  $C$ , а также пересекает  $\omega$  в точках  $D$  и  $E$  (точка  $D$  расположена между  $C$  и  $E$ ). Общая касательная окружностей, проходящая через точку  $F$ , пересекает прямые  $AB$  и  $BE$  в точках  $P$  и  $H$  соответственно (точка  $H$  лежит между точками  $P$  и  $F$ ). Известно, что  $DE = 18$ ,  $DH = HC = 3$ . Найдите длину отрезка  $HP$  и радиусы обеих окружностей.

**Ответ:**  $HP = 3\sqrt{7}$ ,  $r = 2\sqrt{21}$ ,  $R = 6\sqrt{21}$ .

**Решение.** Трижды применяем теорему о касательной и секущей:

$$\begin{aligned} HF^2 &= HD \cdot HE = 3 \cdot 21 \Rightarrow HF = 3\sqrt{7}; \\ HF^2 &= HC \cdot HB \Rightarrow HB = \frac{HF^2}{HC} = 21; \\ BA^2 &= BD \cdot BE = 24 \cdot 42 \Rightarrow BA = 12\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Поскольку отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой,  $PF = PA = PB$ , следовательно,  $PF = \frac{1}{2}AB = 6\sqrt{7}$ . Итак,  $PH = PF - FH = 3\sqrt{7}$ . Пусть  $\angle BPH = \gamma$ . Тогда по теореме косинусов для треугольника  $BPH$  получаем  $BH^2 = BP^2 + HP^2 - 2BP \cdot PH \cdot \cos \gamma$ , т.е.  $21^2 = 36 \cdot 7 + 9 \cdot 7 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cos \gamma$ , откуда  $7 = 4 + 1 - 4 \cos \gamma$ ,  $\cos \gamma = -\frac{1}{2}$ .

Пусть  $O$  и  $Q$  – центры, а  $R$  и  $r$  – радиусы окружностей  $\Omega$  и  $\omega$  соответственно; так как окружности касаются, точка касания  $F$  лежит на линии центров  $OQ$ , и при этом  $OQ \perp PH$ . Углы  $B$  и  $F$  четырёхугольника  $OBPF$  прямые, поэтому  $\angle BOF = 180^\circ - \angle BPF = 180^\circ - \gamma$ .

Рассмотрим прямоугольную трапецию  $ABOQ$ . В ней  $OQ = R + r$ ,  $OB = R$ ,  $AQ = r$ ,  $AB = 12\sqrt{7}$ ,  $\angle BOQ = 180^\circ - \gamma$ . Опуская из точки  $Q$  высоту  $QH$  на основание  $BO$ , получаем прямоугольный треугольник  $OHQ$ , в котором  $QH = AB = 12\sqrt{7}$ ,  $OH = R - r$ . По теореме Пифагора получаем  $(R + r)^2 = (R - r)^2 + (12\sqrt{7})^2$ ; кроме того,  $\frac{1}{2} = \cos(180^\circ - \gamma) = \frac{R - r}{R + r}$ . Из последнего уравнения получаем  $R = 3r$ , а из первого следует, что  $Rr = 252$ . Решая эту систему уравнений, находим, что  $R = 6\sqrt{21}$ ,  $r = 2\sqrt{21}$ .

Задача считается полностью решённой (и за неё начисляется максимальное количество баллов), только если в тексте решения приведены все необходимые преобразования и полностью объяснены все имеющиеся логические шаги; при этом полученные ответы приведены к упрощённому виду.

Наличие верного ответа не гарантирует положительного балла за задачу. Верный ответ без обоснования – баллы не добавляются.

За верное обоснованное решение за задачу ставится полное количество баллов (указано в скобках после номера задачи). Некоторые частичные продвижения оцениваются согласно инструкции. В остальных случаях оценка ставится по усмотрению проверяющего.

1. **(3 балла)** Выведена или указана формула для модуля разности между корнями уравнения  
1 балл.
2. **(6 баллов)** Выполнен переход от неравенства с минимумом к системе двух неравенств 2 балла;  
решено иррациональное неравенство ..... 2 балла;  
решено неравенство с модулем ..... 1 балл;  
получен окончательный ответ (пересечены множества решений двух неравенств) ..... 1 балл;  
не учтена область определения квадратного корня ... не более 4 баллов за задачу: снимается 1 балл за решение иррационального неравенства и 1 балл за пересечение множеств;  
при решении иррационального неравенства обе его части возведены в квадрат без учёта знака правой части .... не более 3 баллов за задачу: не ставятся баллы за решение иррационального неравенства и за пересечение множеств.  
*При другом способе решения.* Исследовано, при каких значениях  $x$  какая из функций больше  
1 балл;  
решено иррациональное неравенство ..... 2 балла;  
решено неравенство с модулем ..... 1 балл;  
получен окончательный ответ ..... 2 балла;  
не учтена область определения квадратного корня ... не более 3 баллов за задачу: снимается 1 балл за решение иррационального неравенства и 2 балла за пересечение множеств;  
при решении иррационального неравенства обе его части возведены в квадрат без учёта знака правой части .... не более 2 баллов за задачу: не ставятся баллы за решение иррационального неравенства и за пересечение множеств.
3. **(5 баллов)** Составлена система уравнений относительно первого члена прогрессии и её знаменателя ..... 2 балла;  
не обосновано, что знаменатель прогрессии отличен от единицы ..... баллы не снимать;  
в ответ включено значение знаменателя, модуль которого больше единицы ..... снять 2 балла;  
потеряно одно из двух значений первого члена прогрессии ..... снять 1 балл.
4. **(4 балла)** Найден радиус окружности ..... 2 балла;  
найдена площадь трапеции ..... 2 балла.
5. **(5 баллов)** Посчитано количество чисел, дающих остатки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 при делении на 7  
1 балл;  
найдено количество способов, когда остатки различны ..... 2 балла;  
найдено количество способов, когда оба остатка одинаковы ..... 2 балла;

неарифметическая ошибка хотя бы в одном из случаев (или учтены не все случаи) .. не более 3 баллов за задачу;

если в решении предполагается, что наборы упорядоченные (тогда количество способов в каждом из случаев становится в 2 раза больше указанного в решении) .....баллы не снимаются;

если при разборе случая используется неверный комбинаторный подсчёт, например, вместо  $\frac{n(n+1)}{2}$  берётся  $n(n+1)$  ..... 0 баллов за рассматриваемый случай;

ответ не приведён к числовому .....баллы не снимать.

6. **(6 баллов)** Построено множество точек ..... 4 балла;

если при этом неверно учтена граница множества (т.е. либо не исключены участки границы, на которых знаменатель обращается в 0, либо исключены участки границы, в которых числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, либо невозможно понять, какие из границ принадлежат множеству) ..... снять 1 балл;

найдена площадь фигуры ..... 2 балла (эти баллы ставятся только в том случае, если множество точек построено верно или отличается от верного лишь некоторым количеством граничных точек).

За неполное построение множества возможны частичные баллы:

определено множество решений первого неравенства ..... 1 балл;

построены множества точек, в которых числитель и знаменатель дроби второго неравенства обращаются в ноль ..... 1 балл;

определены области плоскости, удовлетворяющие второму неравенству ..... 1 балл (этот балл суммируется с предыдущим).

7. **(7 баллов)** Найден отрезок  $HF$  ..... 1 балл;

найден отрезок  $AB$  ..... 1 балл;

найден отрезок  $HP$  ..... 1 балл;

найжены радиусы окружностей ..... 4 балла.