

9 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На столе лежит кусочек сахара, вокруг которого по двум окружностям с одной и той же скоростью ползают муравей и жук. На плоскости стола введена прямоугольная система координат, в которой сахар (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Муравей двигается по часовой стрелке, а жук – против. В начальный момент времени муравей и жук находятся в точках $M_0(-1; \sqrt{3})$ и $N_0(2\sqrt{3}; 2)$ соответственно. Определите координаты всех положений жука, в которых расстояние между ним и муравьём будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3(a+b)x + 12y = a, \\ 4bx + (a+b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $(x+3)\sqrt{x^3-x+10} = x^2+5x+6$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $2x^4 + x^2 - 2x - 3x^2|x-1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 1400. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 9 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x-3-y| + |x-3+y| \leq 6, \\ (|x|-3)^2 + (|y|-4)^2 = 25. \end{cases}$$

9 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг птичьей кормушки в одной плоскости с ней по двум окружностям с одинаковой скоростью летают синица и снегирь. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой кормушка (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Синица движется по часовой стрелке, а снегирь – против. В начальный момент времени синица и снегирь находятся в точках $M_0(\sqrt{3}; 3)$ и $N_0(6; -2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений снегиря, в которых расстояние между птицами будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все пары действительных параметров a и b , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2(a-b)x + 6y = a, \\ 3bx + (a-b)by = 1 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

3. [4 балла] Решите уравнение $\frac{1}{2}(x+5)\sqrt{x^3-16x+25} = x^2+3x-10$.
4. [6 баллов] Решите неравенство $6x^4 + x^2 + 2x - 5x^2|x+1| + 1 \geq 0$.
5. [4 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр которых равно 7000. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
6. [5 баллов] Две окружности одинакового радиуса 7 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
7. [6 баллов] Решите систему

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y+5| \leq 10, \\ (|x-5|)^2 + (|y-12|)^2 = 169. \end{cases}$$

9 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] Вокруг цветка в одной плоскости с ним по двум окружностям летают шмель и пчела. Скорость пчелы в полтора раза больше скорости шмеля. В указанной плоскости введена прямоугольная система координат, в которой цветок (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Пчела движется по часовой стрелке, а шмель – против. В начальный момент времени пчела и шмель находятся в точках $M_0\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $N_0(2; 0)$ соответственно. Определите координаты всех положений шмеля, в которых расстояние между ним и пчелой будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a , b и c , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y + cz = c, \\ 3x + by + 4z = 4b \end{cases}$$

не имеет решений.

3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 - 10x + 7} + 1) \cdot |x^3 - 18x + 28| \leq 0$.
4. [5 баллов] Решите уравнение $2x^4 + x^2 - 6x - 3x^2|x - 3| + 9 = 0$.
5. [5 баллов] Бросили 70 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших чисел. Какая из вероятностей больше: того, что сумма больше 350, или того, что сумма не больше 140?
6. [4 балла] Две параллельные прямые l_1 и l_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой l_1 в точке D , пересекает прямую l_2 в точках V и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми l_1 и l_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2VE равно $\frac{5}{4}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax - 6y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

9 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [4 балла] На полу стоит блюдечко с молоком, вокруг которого по двум окружностям ходят котёнок и щенок. Скорость котёнка в два раза меньше скорости щенка. На плоскости пола введена прямоугольная система координат, в которой блюдечко (общий центр окружностей) находится в точке $O(0; 0)$. Котёнок движется по часовой стрелке, а щенок – против. В начальный момент времени котёнок и щенок находятся в точках $M_0(-6; 0)$ и $N_0(2; 2\sqrt{3})$ соответственно. Определите координаты всех положений котёнка, в которых расстояние между животными будет кратчайшим.

2. [4 балла] Найдите все тройки целочисленных параметров a , b и c , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x - by + z = 2b, \\ ax + 5y - cz = a. \end{cases}$$

не имеет решений.

3. [4 балла] Решите неравенство $(\sqrt{x^3 - 18x - 5} + 2) \cdot |x^3 - 4x^2 - 5x + 18| \leq 0$.
4. [5 баллов] Решите уравнение $4x^4 + x^2 + 6x - 5x^2|x + 3| + 9 = 0$.
5. [5 баллов] Бросили 60 игральных костей (кубиков с цифрами от 1 до 6 на гранях; вероятность выпадения каждой из граней одна и та же) и посчитали сумму выпавших цифр. Какая из вероятностей больше: того, что сумма не меньше 300, или того, что сумма меньше 120?
6. [4 балла] Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются окружности ω_1 с центром O_1 в точках A и B соответственно. Окружность ω_2 с центром O_2 касается прямой ℓ_1 в точке D , пересекает прямую ℓ_2 в точках V и E , а также вторично пересекает окружность ω_1 в точке C (при этом точка O_2 лежит между прямыми ℓ_1 и ℓ_2). Известно, что отношение площади четырёхугольника BO_1CO_2 к площади треугольника O_2VE равно $\frac{6}{5}$. Найдите отношение радиусов окружностей ω_2 и ω_1 .
7. [7 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} a^2 - 2ax + 10y + x^2 + y^2 = 0, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 169 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.