ВАРИАНТ 13. ЧАСТЬ 1

1. **[5 баллов]** Высоты CF и AE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N – середины отрезков AH и CH соответственно. Известно, что $FM = 2$, $EN = 5$, и при этом $FM \parallel EN$. Найдите $\angle ABC$, площадь треугольника ABC и радиус описанной около него окружности.

   Ответ: $\angle ABC = 60°$, $S_{\triangle ABC} = 36\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{13}$.

   Решение. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Так как FM и EN – медианы треугольников AFH и CEH, то $HM = AM = FM = 2$, $CN = EN = HN = 5$. Обозначим $\angle AHF = \angle CHE = \alpha$. Тогда $\angle EHF = 180° - \alpha$, $\angle EBF = \alpha$ (так как в четырёхугольнике $BFHE$ углы E и F прямые). Далее находим: $\angle MFH = \alpha$ (треугольник MFH равнобедренный), $\angle NEH = \alpha$ (треугольник NEH равнобедренный), $\angle ENH = 180° - 2\alpha$. Поскольку $EN \parallel FM$, углы MFH и NEH равны как накрест лежащие, откуда $\alpha = 180° - 2\alpha$ и $\alpha = 60°$. Таким образом, $\angle ABC = \alpha = 60°$.

   В треугольнике ACH известно, что $CH = 10$, $AH = 4$, $\angle AHC = 120°$. По теореме косинусов находим, что $AC^2 = 10^2 + 4^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \cos 120° = 100 + 16 + 40 = 156$, $AC = 2\sqrt{39}$. Отсюда радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{2\sqrt{39}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{13}$.

   Треугольник BCF – прямоугольный с углом $60°$ при вершине B, и при этом $HF = 2$, $CF = CH + HF = 12$. Значит, $BC = \frac{CF}{\sin 60°} = \frac{12}{0.5\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$. Кроме того, $AH = 4$, $HE = 5$, $AE = 9$, поэтому $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 9 = 36\sqrt{3}$.

2. **[5 баллов]** На доске написано несколько попарно различных натуральных чисел. Если самое маленькое число увеличить в 32 раза, то сумма чисел на доске станет равной 477. Если же самое большое число увеличить в 14 раз, то сумма чисел на доске также станет равной 477. Какие числа могли быть написаны на доске?

   Ответ: 13, 14, 16, 31 или 13, 30, 31.

   Решение. Пусть на доске написано n чисел $x_1 < \ldots < x_n$ ($n \geqslant 2$). Тогда $32x_1 + \ldots + x_n = x_1 + \ldots + 14x_n = 477$. Вычитая из обеих частей этого равенства сумму $(x_1 + \ldots + x_n)$, получим $31x_1 = 13x_n$. Так как числа 31 и 13 взаимно просты, то $x_1 = 13k$, $x_n = 31k$. Если $k \geqslant 2$, то $32x_1 + \ldots + x_n > 32x_1 \geqslant 32 \cdot (13 \cdot 2) > 477$, что невозможно. Поэтому $k = 1$, откуда $x_1 = 13$, $x_n = 31$.

   Тогда $32x_1 + x_n = 32 \cdot 13 + 31 = 447$, и сумма оставшихся чисел равна $477 - 447 = 30$, причём оставшиеся числа больше 13 и меньше 31. Если это число одно, то оно равно 30. Если их два, то различные натуральные числа с суммой 30 – это только 14 и 16. Больше двух чисел быть не может, так как их сумма превосходит $13 \cdot 3 = 39$.

3. **[6 баллов]** На плоскости Oxy даны точка A, координаты $(x; y)$ которой удовлетворяют уравнению $5a^2 - 6ax - 2ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$, и окружность с центром в точке B, заданная уравнением $a^2x^2 + a^2y^2 - 8a^2x - 2a^3y + 12ay + a^4 + 36 = 0$. Найдите все значения параметра a, при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $y = 1$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

   Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$.

   Решение. Первое уравнение можно преобразовать так:

$$\left(y^2 + 2(x-a)y\right) + 2x^2 - 6ax + 5a^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(y^2 + 2 \cdot y \cdot (x-a) + (x-a)^2\right) - (x-a)^2 + 2x^2 - 6ax + 5a^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y + x - a)^2 + x^2 - 4ax + 4a^2 = 0 \Leftrightarrow (y + x - a)^2 + (x - 2a)^2 = 0.$$

   Отсюда получаем, что координаты точки $A\,(x_A; y_A)$ удовлетворяют равенствам $y + x - a = 0$ и $x - 2a = 0$, т.е. $x_A = 2a$, $y_A = -a$.

   Так как второе уравнение задаёт окружность, то $a \neq 0$. При этом условии уравнение можно переписать в виде $x^2 + y^2 - 8x - 2ay + \frac{12y}{a} + a^2 + \frac{36}{a^2} = 0$, откуда далее $(x^2 - 8x + 16) + \left(y^2 + 2y\left(\frac{6}{a} - a\right) + \left(\frac{6}{a} - a\right)^2\right) + a^2 + \frac{36}{a^2} = 16 + \left(\frac{6}{a} - a\right)^2$, и окончательно $(x-4)^2 + \left(y + \frac{6}{a} - a\right)^2 = 4$. Значит, координаты точки B следующие: $x_B = 4$, $y_B = a - \frac{6}{a}$.

Для того, чтобы точки A и B лежали по разные стороны от прямой $y = 1$, необходимо и достаточно, чтобы их ординаты удовлетворяли неравенству $(y_A - 1)(y_B - 1) < 0$, то есть $(-a-1)\left(\frac{a^2-6}{a} - 1\right) < 0$. Отсюда $(a+1)\left(\frac{a^2-6-a}{a}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{(a+1)(a+2)(a-3)}{a} > 0$. Решая это неравенство методом интервалов, получаем ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$.

Замечание. Для решения задачи достаточно найти ординаты точек A и B.

4. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2x^2y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 + \dfrac{2}{3}x^2y^2 = 17. \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{2}; \pm\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2}; \pm\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; \pm\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3}; \pm\sqrt{2})$.

Решение. Введём новые переменные $u = x^2 + y^2$, $v = x^2y^2$. Тогда $x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 = u^2 - 2v$ и система принимает вид

$$\begin{cases} 3u - 2v = 3, \\ u^2 - 2v + \frac{2}{3}v = 17. \end{cases}$$

Из первого уравнения $v = \frac{3u}{2} - \frac{3}{2}$; подставляем это выражение во второе уравнение и решаем его:

$$u^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{3u}{2} - \frac{3}{2}\right) = 17 \Leftrightarrow u^2 - 2u - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 5, \\ u = -3. \end{array}\right.$$

Так как $u > 0$, то подходит только значение $u = 5$. Значит, $v = 6$, и в исходных переменных получаем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5 - y^2, \\ \left(5 - y^2\right)y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 3 \text{ и } x^2 = 2, \\ y^2 = 2 \text{ и } x^2 = 3. \end{array}\right.$$

Отсюда следует, что система имеет 8 решений: $(\sqrt{2}; \pm\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2}; \pm\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; \pm\sqrt{2})$, $(-\sqrt{3}; \pm\sqrt{2})$.

5. **[5 баллов]** У фокусника есть набор из 12^2 *различных* карточек. У каждой из карточек одна сторона красная, а другая – синяя; на каждой карточке с обеих сторон написано по одному натуральному числу от 1 до 12. Назовём карточку *дублем*, если числа на обеих сторонах карточки совпадают. Фокусник хочет вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль, и при этом никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 1 386.

Решение. Так как в наборе 12^2 карточек, у фокусника есть всевозможные варианты карточек (для каждой пары чисел $(i; j)$, где $1 \leqslant i \leqslant 12$, $1 \leqslant j \leqslant 12$ найдётся карточка, у которой на красной стороне написано число i, а на синей – j). Рассмотрим два вида наборов карточек.

1) Обе карточки являются дублями. Количество способов выбрать пару карточек равно

$$C_{12}^2 = \frac{12(12-1)}{2} = 66.$$

2) Только одна из карточек является дублем. Тогда её можно выбрать 12 способами, после чего вторую карточку можно выбрать любую за исключением: (а) всех дублей (таковых 12, с учётом уже выбранной карточки), (б) всех карточек, имеющих тот же номер на красной стороне, что и выбранный дубль (таких 11, помимо выбранной карточки), (в) всех карточек, имеющих тот же номер на синей стороне, что и выбранный дубль (также 11). Итак, вторую карточку можно выбрать $12^2 - 12 - 11 - 11 = 110$ способами. Значит, в этом случае имеем $12 \cdot 110 = 1\,320$ способов выбрать пару карточек.

Итак, всего есть $66 + 1\,320 = 1\,386$ способов.

6. **[7 баллов]** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD.

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 2$, $AD = 3$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: $\frac{19}{25}$.

Решение. а) Несложно показать, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция, поэтому вокруг неё можно описать окружность (назовём её Ω). Диагонали четырёхугольника $CODT$ точкой пересечения делятся пополам, поэтому он параллелограмм, и при этом $\angle CTD = \angle COD = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$. Поскольку $\angle CAD = 60^\circ$, в четырёхугольнике $CADT$ сумма противоположных углов равна 180°, и вокруг него также можно описать окружность. Следовательно, все 5 точек A, B, C, T, D лежат на окружности Ω.

Углы ATB и ACB вписаны в Ω и опираются на одну дугу, поэтому они равны, и $\angle ATB = 60^\circ$. Далее отметим, что

$$\angle DBT = \angle DCT \text{ (вписанные, опираются на одну дугу)},$$
$$\angle DCT = \angle BDC \text{ (за счёт того, что } BD \parallel CT),$$
$$\angle BDC = \angle BAC \text{ (трапеция равнобокая)}.$$

Отсюда следует, что $\angle ABT = \angle ABD + \angle DBT = \angle ABD + \angle BAC = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Итак, доказано, что в треугольнике ABT два угла равны 60°, поэтому он равносторонний.

б) По теореме косинусов из треугольника ABT находим, что $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos 120^\circ = 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 = 19$. Тогда площадь S_1 треугольника ABT равна $AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{19\sqrt{3}}{4}$. Площадь трапеции S_2 находим по формуле полупроизведение диагоналей, умноженное на синус угла между ними: $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$. Отсюда $S_1 : S_2 = 19 : 25$.

ВАРИАНТ 14. ЧАСТЬ 1

1. **[5 баллов]** Высоты CF и AE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N – середины отрезков AH и CH соответственно. Известно, что $FM = 2$, $EN = 11$, и при этом $FM \parallel EN$. Найдите $\angle ABC$, площадь треугольника ABC и радиус описанной около него окружности.

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{\triangle ABC} = 120\sqrt{3}$, $R = 14$.

Решение. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Так как FM и EN – медианы треугольников AFH и CEH, то $HM = AM = FM = 2$, $CN = EN = HN = 11$. Обозначим $\angle AHF = \angle CHE = \alpha$. Тогда $\angle EHF = 180^\circ - \alpha$, $\angle EBF = \alpha$ (так как в четырёхугольнике $BFHE$ углы E и F прямые). Далее находим: $\angle MFH = \alpha$ (треугольник MFH равнобедренный), $\angle NEH = \alpha$ (треугольник NEH равнобедренный), $\angle ENH = 180^\circ - 2\alpha$. Поскольку $EN \parallel FM$, углы MFH и NEH равны как накрест лежащие, откуда $\alpha = 180^\circ - 2\alpha$ и $\alpha = 60^\circ$. Таким образом, $\angle ABC = \alpha = 60^\circ$.

В треугольнике ACH известно, что $CH = 22$, $AH = 4$, $\angle AHC = 120^\circ$. По теореме косинусов находим, что $AC^2 = 22^2 + 4^2 - 2 \cdot 22 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 484 + 16 + 88 = 588$, $AC = 14\sqrt{3}$. Отсюда радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{14\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 14$.

Треугольник BCF – прямоугольный с углом 60° при вершине B, и при этом $HF = 2$, $CF = CH + HF = 24$. Значит, $BC = \frac{CF}{\sin 60^\circ} = \frac{24}{0.5\sqrt{3}} = 16\sqrt{3}$. Кроме того, $AH = 4$, $HE = 11$, $AE = 15$, поэтому $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 16\sqrt{3} \cdot 15 = 120\sqrt{3}$.

2. **[5 баллов]** На доске написано несколько попарно различных натуральных чисел. Если самое маленькое число увеличить в 30 раз, то сумма чисел на доске станет равной 450. Если же самое большое число увеличить в 14 раз, то сумма чисел на доске также станет равной 450. Какие числа могли быть написаны на доске?

Ответ: 13, 14, 17, 29 или 13, 15, 16, 29.

Решение. Пусть на доске написано n чисел $x_1 < \ldots < x_n$ ($n \geqslant 2$). Тогда $30x_1 + \ldots + x_n = x_1 + \ldots + 14x_n = 450$. Вычитая из обеих частей этого равенства сумму $(x_1 + \ldots + x_n)$, получим $29x_1 = 13x_n$. Так как числа 29 и 13 взаимно просты, то $x_1 = 13k$, $x_n = 29k$. Если $k \geqslant 2$, то $30x_1 + \ldots + x_n > 30x_1 \geqslant 30 \cdot (13 \cdot 2) > 450$, что невозможно. Поэтому $k = 1$, откуда $x_1 = 13$, $x_n = 29$.

Тогда $30x_1 + x_n = 30 \cdot 13 + 29 = 419$, и сумма оставшихся чисел равна $450 - 419 = 31$, причём оставшиеся числа больше 13 и меньше 29. Это не может быть только одно число, так как оно больше 29. Если чисел два, то различные натуральные числа с суммой 31 – это 17 и 14 или 16 и 15. Больше двух чисел быть не может, так как их сумма превосходит $13 \cdot 3 = 39$.

3. **[6 баллов]** На плоскости Oxy даны точка A, координаты $(x; y)$ которой удовлетворяют уравнению $2a^2 + 2ax + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$, и окружность с центром в точке B, заданная уравнением $a^2x^2 + a^2y^2 - 2a^3x - 6ax - 2a^2y + a^4 + 9 = 0$. Найдите все значения параметра a, при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $x = 4$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (3; \infty)$.

Решение. Первое уравнение можно преобразовать так:

$$\begin{gathered}
\left(x^2 + 2(a-y)x\right) + 2y^2 + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot (a-y) + (a-y)^2\right) - (a-y)^2 + 2y^2 + 2a^2 = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (x + a - y)^2 + y^2 + 2ay + a^2 = 0 \Leftrightarrow (x + a - y)^2 + (y + a)^2 = 0.
\end{gathered}$$

Отсюда получаем, что координаты точки $A\,(x_A; y_A)$ удовлетворяют равенствам $x + a - y = 0$ и $y + a = 0$, т.е. $x_A = -2a$, $y_A = -a$.

Так как второе уравнение задаёт окружность, то $a \neq 0$. При этом условии уравнение можно переписать в виде $x^2 + y^2 - 2ax - \frac{6x}{a} - 2y + a^2 + \frac{9}{a^2} = 0$, откуда далее $\left(x^2 - 2x\left(a + \frac{3}{a}\right) + \left(a + \frac{3}{a}\right)^2\right) + \left(y^2 - 2y + 1\right) + a^2 + \frac{9}{a^2} = 1 + \left(\frac{3}{a} + a\right)^2$, и окончательно $\left(x - a - \frac{3}{a}\right)^2 + (y-1)^2 = 7$. Значит, координаты точки B следующие: $x_B = a + \frac{3}{a}$, $y_B = 1$.

Для того, чтобы точки A и B лежали по разные стороны от прямой $x = 4$, необходимо и достаточно, чтобы их абсциссы удовлетворяли неравенству $(x_A - 4)(x_B - 4) < 0$, то есть $(-2a - 4)\left(a + \frac{3}{a} - 4\right) < 0$. Отсюда $(a + 2)\left(\frac{a^2-4a+3}{a}\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{(a+2)(a-1)(a-3)}{a} > 0$. Решая это неравенство методом интервалов, получаем ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (3; +\infty)$.

Замечание. Для решения задачи достаточно найти абсциссы точек A и B.

4. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7x^2 + 7y^2 - 3x^2y^2 = 7, \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 37. \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{7}; \pm\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7}; \pm\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; \pm\sqrt{7})$, $(-\sqrt{3}; \pm\sqrt{7})$.

Решение. Введём новые переменные $u = x^2 + y^2$, $v = x^2y^2$. Тогда $x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 = u^2 - 2v$ и система принимает вид

$$\begin{cases} 7u - 3v = 7, \\ u^2 - 2v - v = 37. \end{cases}$$

Из первого уравнения $v = \frac{7u}{3} - \frac{7}{3}$; подставляем это выражение во второе уравнение и решаем его:

$$u^2 - 3\left(\frac{7u}{3} - \frac{7}{3}\right) = 37 \Leftrightarrow u^2 - 7u - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 10, \\ u = -3. \end{array}\right.$$

Так как $u > 0$, то подходит только значение $u = 10$. Значит, $v = 21$, и в исходных переменных получаем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2y^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 10 - y^2, \\ \left(10 - y^2\right)y^2 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 3 \text{ и } x^2 = 7, \\ y^2 = 7 \text{ и } x^2 = 3. \end{array}\right.$$

Отсюда следует, что система имеет 8 решений: $(\sqrt{7}; \pm\sqrt{3})$, $(-\sqrt{7}; \pm\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; \pm\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7}; \pm\sqrt{2})$.

5. **[5 баллов]** У фокусника есть набор из 15^2 *различных* карточек. У каждой из карточек одна сторона красная, а другая – синяя; на каждой карточке с обеих сторон написано по одному натуральному числу от 1 до 15. Назовём карточку *дублем*, если числа на обеих сторонах карточки совпадают. Фокусник хочет вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль, и при этом никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 2 835.

Решение. Так как в наборе 15^2 карточек, у фокусника есть всевозможные варианты карточек (для каждой пары чисел $(i; j)$, где $1 \leqslant i \leqslant 15$, $1 \leqslant j \leqslant 15$ найдётся карточка, у которой на красной стороне написано число i, а на синей – j). Рассмотрим два вида наборов карточек.

1) Обе карточки являются дублями. Количество способов выбрать пару карточек равно

$$C_{15}^2 = \frac{15(15-1)}{2} = 105.$$

2) Только одна из карточек является дублем. Тогда ёе можно выбрать 15 способами, после чего вторую карточку можно выбрать любую за исключением: (а) всех дублей (таковых 15, с учётом уже выбранной карточки), (б) всех карточек, имеющих тот же номер на красной стороне, что и выбранный дубль (таких 14, помимо выбранной карточки), (в) всех карточек, имеющих тот же номер на синей стороне, что и выбранный дубль (также 14). Итак, вторую карточку можно выбрать $15^2 - 15 - 14 - 14 = 182$ способами. Значит, в этом случае имеем $15 \cdot 182 = 2\,730$ способов выбрать пару карточек.

Итак, всего есть $105 + 2\,730 = 2\,835$ способов.

6. **[7 баллов]** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD.

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 3$, $AD = 4$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: $\frac{37}{49}$.

Решение. а) Несложно показать, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция, поэтому вокруг неё можно описать окружность (назовём её Ω). Диагонали четырёхугольника $CODT$ точкой пересечения делятся пополам, поэтому он параллелограмм, и при этом $\angle CTD = \angle COD = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$. Поскольку $\angle CAD = 60^\circ$, в четырёхугольнике $CADT$ сумма противоположных углов равна 180°, и вокруг него также можно описать окружность. Следовательно, все 5 точек A, B, C, T, D лежат на окружности Ω.

Углы ATB и ACB вписаны в Ω и опираются на одну дугу, поэтому они равны, и $\angle ATB = 60^\circ$. Далее отметим, что

$$\angle DBT = \angle DCT \text{ (вписанные, опираются на одну дугу)},$$
$$\angle DCT = \angle BDC \text{ (за счёт того, что } BD \parallel CT\text{)},$$
$$\angle BDC = \angle BAC \text{ (трапеция равнобокая)}.$$

Отсюда следует, что $\angle ABT = \angle ABD + \angle DBT = \angle ABD + \angle BAC = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Итак, доказано, что в треугольнике ABT два угла равны 60°, поэтому он равносторонний.

б) По теореме косинусов из треугольника ABT находим, что $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos 120^\circ = 3^2 + 4^2 + 4 \cdot 3 = 37$. Тогда площадь S_1 треугольника ABT равна $AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$. Площадь трапеции S_2 находим по формуле полупроизведение диагоналей, умноженное на синус угла между ними: $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$. Отсюда $S_1 : S_2 = 37 : 49$.

ВАРИАНТ 15. ЧАСТЬ 1

1. **[5 баллов]** Высоты CF и AE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N – середины отрезков AH и CH соответственно. Известно, что $FM = 1$, $EN = 7$, и при этом $FM \parallel EN$. Найдите $\angle ABC$, площадь треугольника ABC и радиус описанной около него окружности.

   Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{\triangle ABC} = 45\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{19}$.

   Решение. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Так как FM и EN – медианы треугольников AFH и CEH, то $HM = AM = FM = 1$, $CN = EN = HN = 7$. Обозначим $\angle AHF = \angle CHE = \alpha$. Тогда $\angle EHF = 180^\circ - \alpha$, $\angle EBF = \alpha$ (так как в четырёхугольнике $BFHE$ углы E и F прямые). Далее находим: $\angle MFH = \alpha$ (треугольник MFH равнобедренный), $\angle NEH = \alpha$ (треугольник NEH равнобедренный), $\angle ENH = 180^\circ - 2\alpha$. Поскольку $EN \parallel FM$, углы MFH и NEH равны как накрест лежащие, откуда $\alpha = 180^\circ - 2\alpha$ и $\alpha = 60^\circ$. Таким образом, $\angle ABC = \alpha = 60^\circ$.

   В треугольнике ACH известно, что $CH = 14$, $AH = 2$, $\angle AHC = 120^\circ$. По теореме косинусов находим, что $AC^2 = 14^2 + 2^2 - 2 \cdot 14 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 196 + 4 + 28 = 228$, $AC = 2\sqrt{57}$. Отсюда радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{2\sqrt{57}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{19}$.

   Треугольник BCF – прямоугольный с углом 60° при вершине B, и при этом $HF = 1$, $CF = CH + HF = 15$. Значит, $BC = \frac{CF}{\sin 60^\circ} = \frac{15}{0.5\sqrt{3}} = 10\sqrt{3}$. Кроме того, $AH = 2$, $HE = 7$, $AE = 9$, поэтому $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 9 = 45\sqrt{3}$.

2. **[5 баллов]** На доске написано несколько попарно различных натуральных чисел. Если самое маленькое число увеличить в 32 раза, то сумма чисел на доске станет равной 581. Если же самое большое число увеличить в 17 раз, то сумма чисел на доске также станет равной 581. Какие числа могли быть написаны на доске?

   Ответ: 16, 17, 21, 31 или 16, 18, 20, 31.

   Решение. Пусть на доске написано n чисел $x_1 < \ldots < x_n$ ($n \geqslant 2$). Тогда $32x_1 + \ldots + x_n = x_1 + \ldots + 17x_n = 581$. Вычитая из обеих частей этого равенства сумму $(x_1 + \ldots + x_n)$, получим $31x_1 = 16x_n$. Так как числа 31 и 16 взаимно просты, то $x_1 = 16k$, $x_n = 31k$. Если $k \geqslant 2$, то $32x_1 + \ldots + x_n > 32x_1 \geqslant 32 \cdot (16 \cdot 2) > 581$, что невозможно. Поэтому $k = 1$, откуда $x_1 = 16$, $x_n = 31$.

   Тогда $32x_1 + x_n = 32 \cdot 16 + 31 = 543$, и сумма оставшихся чисел равна $581 - 543 = 38$, причём оставшиеся числа больше 16 и меньше 31. Это не может быть только одно число, так как оно больше 31. Если чисел два, то различные натуральные числа с суммой 38 – это 17 и 21 или 18 и 20. Больше двух чисел быть не может, так как их сумма превосходит $16 \cdot 3 = 48$.

3. **[6 баллов]** На плоскости Oxy даны точка A, координаты $(x; y)$ которой удовлетворяют уравнению $5a^2 - 6ax - 4ay + 2x^2 + 2xy + y^2 = 0$, и окружность с центром в точке B, заданная уравнением $a^2x^2 + a^2y^2 - 6a^2x - 2a^3y + 4ay + a^4 + 4 = 0$. Найдите все значения параметра a, при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $y = 1$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

   Ответ: $(-1; 0) \cup (1; 2)$.

   Решение. Первое уравнение можно преобразовать так:

$$
\begin{gathered}
\left(y^2 + 2(x - 2a)y\right) + 2x^2 - 6ax + 5a^2 = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \left(y^2 + 2 \cdot y \cdot (x - 2a) + (x - 2a)^2\right) - (x - 2a)^2 + 2x^2 - 6ax + 5a^2 = 0 \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow (y + x - 2a)^2 + x^2 - 2ax + a^2 = 0 \Leftrightarrow (y + x - 2a)^2 + (x - a)^2 = 0.
\end{gathered}
$$

   Отсюда получаем, что координаты точки $A\,(x_A; y_A)$ удовлетворяют равенствам $y + x - 2a = 0$ и $x - a = 0$, т.е. $x_A = a$, $y_A = a$.

   Так как второе уравнение задаёт окружность, то $a \neq 0$. При этом условии уравнение можно переписать в виде $x^2 + y^2 - 6x - 2ay + \frac{4y}{a} + a^2 + \frac{4}{a^2} = 0$, откуда далее $\left(x^2 - 6x + 9\right) + \left(y^2 + 2y\left(\frac{2}{a} - a\right) + \left(\frac{2}{a} - a\right)^2\right) + a^2 + \frac{4}{a^2} = 9 + \left(\frac{2}{a} - a\right)^2$, и окончательно $(x - 3)^2 + \left(y + \frac{2}{a} - a\right)^2 = 5$. Значит, координаты точки B следующие: $x_B = 3$, $y_B = a - \frac{2}{a}$.

Для того, чтобы точки A и B лежали по разные стороны от прямой $y = 1$, необходимо и достаточно, чтобы их ординаты удовлетворяли неравенству $(y_A - 1)(y_B - 1) < 0$, то есть $(a-1)\left(a - \frac{2}{a} - 1\right) < 0$. Отсюда $(a-1)\left(\frac{a^2-2-a}{a}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{(a-1)(a-2)(a+1)}{a} < 0$. Решая это неравенство методом интервалов, получаем ответ: $a \in (-1;0) \cup (1;2)$.

Замечание. Для решения задачи достаточно найти ординаты точек A и B.

4. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - x^2y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 - x^2y^2 = 31. \end{cases}$$

Ответ: $(\sqrt{5}; \pm\sqrt{6})$, $(-\sqrt{5}; \pm\sqrt{6})$, $(\sqrt{6}; \pm\sqrt{5})$, $(-\sqrt{6}; \pm\sqrt{5})$.

Решение. Введём новые переменные $u = x^2 + y^2$, $v = x^2y^2$. Тогда $x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 = u^2 - 2v$ и система принимает вид

$$\begin{cases} 3u - v = 3, \\ u^2 - 2v - v = 31. \end{cases}$$

Из первого уравнения $v = 3u - 3$; подставляем это выражение во второе уравнение и решаем его:

$$u^2 - 3(3u - 3) = 31 \Leftrightarrow u^2 - 9u - 22 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 11, \\ u = -2. \end{array}\right.$$

Так как $u > 0$, то подходит только значение $u = 11$. Значит, $v = 30$, и в исходных переменных получаем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 11, \\ x^2y^2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 11 - y^2, \\ \left(11 - y^2\right) y^2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 5 \text{ и } x^2 = 6, \\ y^2 = 6 \text{ и } x^2 = 5. \end{array}\right.$$

Отсюда следует, что система имеет 8 решений: $\left(\sqrt{5}; \pm\sqrt{6}\right)$, $\left(-\sqrt{5}; \pm\sqrt{6}\right)$, $\left(\sqrt{6}; \pm\sqrt{5}\right)$, $\left(-\sqrt{6}; \pm\sqrt{5}\right)$.

5. **[5 баллов]** У фокусника есть набор из 20^2 *различных* карточек. У каждой из карточек одна сторона красная, а другая – синяя; на каждой карточке с обеих сторон написано по одному натуральному числу от 1 до 20. Назовём карточку *дублем*, если числа на обеих сторонах карточки совпадают. Фокусник хочет вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль, и при этом никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 7 030.

Решение. Так как в наборе 20^2 карточек, у фокусника есть всевозможные варианты карточек (для каждой пары чисел $(i;j)$, где $1 \leqslant i \leqslant 20$, $1 \leqslant j \leqslant 20$ найдётся карточка, у которой на красной стороне написано число i, а на синей – j). Рассмотрим два вида наборов карточек.

1) Обе карточки являются дублями. Количество способов выбрать пару карточек равно

$$C_{20}^2 = \frac{20(20-1)}{2} = 190.$$

2) Только одна из карточек является дублем. Тогда её можно выбрать 20 способами, после чего вторую карточку можно выбрать любую за исключением: (а) всех дублей (таковых 20, с учётом уже выбранной карточки), (б) всех карточек, имеющих тот же номер на красной стороне, что и выбранный дубль (таких 19, помимо выбранной карточки), (в) всех карточек, имеющих тот же номер на синей стороне, что и выбранный дубль (также 19). Итак, вторую карточку можно выбрать $20^2 - 20 - 19 - 19 = 342$ способами. Значит, в этом случае имеем $20 \cdot 342 = 6\,840$ способов выбрать пару карточек.

Итак, всего есть $190 + 6\,840 = 7\,030$ способов.

6. **[7 баллов]** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD.

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 4$, $AD = 5$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: $\frac{61}{81}$.

Решение. а) Несложно показать, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция, поэтому вокруг неё можно описать окружность (назовём её Ω). Диагонали четырёхугольника $CODT$ точкой пересечения делятся пополам, поэтому он параллелограмм, и при этом $\angle CTD = \angle COD = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$. Поскольку $\angle CAD = 60^\circ$, в четырёхугольнике $CADT$ сумма противоположных углов равна 180°, и вокруг него также можно описать окружность. Следовательно, все 5 точек A, B, C, T, D лежат на окружности Ω.

Углы ATB и ACB вписаны в Ω и опираются на одну дугу, поэтому они равны, и $\angle ATB = 60^\circ$. Далее отметим, что

$$\angle DBT = \angle DCT \text{ (вписанные, опираются на одну дугу)},$$
$$\angle DCT = \angle BDC \text{ (за счёт того, что } BD \parallel CT),$$
$$\angle BDC = \angle BAC \text{ (трапеция равнобокая)}.$$

Отсюда следует, что $\angle ABT = \angle ABD + \angle DBT = \angle ABD + \angle BAC = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Итак, доказано, что в треугольнике ABT два угла равны 60°, поэтому он равносторонний.

б) По теореме косинусов из треугольника ABT находим, что $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos 120^\circ = 4^2 + 5^2 + 4 \cdot 5 = 61$. Тогда площадь S_1 треугольника ABT равна $AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{61\sqrt{3}}{4}$. Площадь трапеции S_2 находим по формуле полупроизведение диагоналей, умноженное на синус угла между ними: $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$. Отсюда $S_1 : S_2 = 61 : 81$.

ВАРИАНТ 16. ЧАСТЬ 1

1. **[5 баллов]** Высоты CF и AE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N – середины отрезков AH и CH соответственно. Известно, что $FM = 1$, $EN = 4$, и при этом $FM \parallel EN$. Найдите $\angle ABC$, площадь треугольника ABC и радиус описанной около него окружности.

Ответ: $\angle ABC = 60^\circ$, $S_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{7}$.

Решение. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы. Так как FM и EN – медианы треугольников AFH и CEH, то $HM = AM = FM = 1$, $CN = EN = HN = 4$. Обозначим $\angle AHF = \angle CHE = \alpha$. Тогда $\angle EHF = 180^\circ - \alpha$, $\angle EBF = \alpha$ (так как в четырёхугольнике $BFHE$ углы E и F прямые). Далее находим: $\angle MFH = \alpha$ (треугольник MFH равнобедренный), $\angle NEH = \alpha$ (треугольник NEH равнобедренный), $\angle ENH = 180^\circ - 2\alpha$. Поскольку $EN \parallel FM$, углы MFH и NEH равны как накрест лежащие, откуда $\alpha = 180^\circ - 2\alpha$ и $\alpha = 60^\circ$. Таким образом, $\angle ABC = \alpha = 60^\circ$.

В треугольнике ACH известно, что $CH = 8$, $AH = 4$, $\angle AHC = 120^\circ$. По теореме косинусов находим, что $AC^2 = 8^2 + 2^2 - 2 \cdot 8 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = 64 + 4 + 16 = 84$, $AC = 2\sqrt{21}$. Отсюда радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $\frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{7}$.

Треугольник BCF – прямоугольный с углом 60° при вершине B, и при этом $HF = 1$, $CF = CH + HF = 9$. Значит, $BC = \frac{CF}{\sin 60^\circ} = \frac{9}{0.5\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$. Кроме того, $AH = 2$, $HE = 4$, $AE = 6$, поэтому $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6 = 18\sqrt{3}$.

2. **[5 баллов]** На доске написано несколько попарно различных натуральных чисел. Если самое маленькое число увеличить в 35 раз, то сумма чисел на доске станет равной 592. Если же самое большое число увеличить в 16 раз, то сумма чисел на доске также станет равной 592. Какие числа могли быть написаны на доске?

Ответ: 15, 16, 17, 34 или 15, 33, 34.

Решение. Пусть на доске написано n чисел $x_1 < \ldots < x_n$ ($n \geqslant 2$). Тогда $35x_1 + \ldots + x_n = x_1 + \ldots + 16x_n = 592$. Вычитая из обеих частей этого равенства сумму $(x_1 + \ldots + x_n)$, получим $34x_1 = 15x_n$. Так как числа 34 и 15 взаимно просты, то $x_1 = 15k$, $x_n = 34k$. Если $k \geqslant 2$, то $35x_1 + \ldots + x_n > 35x_1 \geqslant 35 \cdot (15 \cdot 2) > 592$, что невозможно. Поэтому $k = 1$, откуда $x_1 = 15$, $x_n = 34$.

Тогда $35x_1 + x_n = 32 \cdot 15 + 34 = 559$, и сумма оставшихся чисел равна $592 - 559 = 33$, причём оставшиеся числа больше 15 и меньше 34. Если это число одно, то оно равно 33. Если их два, то различные натуральные числа с суммой 33 – это только 17 и 16. Больше двух чисел быть не может, так как их сумма превосходит $15 \cdot 3 = 45$.

3. **[6 баллов]** На плоскости Oxy даны точка A, координаты $(x; y)$ которой удовлетворяют уравнению $5a^2 - 4ax + 6ay + x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$, и окружность с центром в точке B, заданная уравнением $a^2x^2 + a^2y^2 - 4a^3x - 2ax + 2a^2y + 4a^4 + 1 = 0$. Найдите все значения параметра a, при которых точки A и B лежат по разные стороны от прямой $x = 3$ (точки A и B не лежат на этой прямой).

Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 3)$.

Решение. Первое уравнение можно преобразовать так:

$$\left(x^2 - 2(2a + y)x\right) + 2y^2 + 6ay + 5a^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot (2a + y) + (2a + y)^2\right) - (2a + y)^2 + 2y^2 + 6ay + 5a^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x - 2a - y)^2 + y^2 + 2ay + a^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2a - y)^2 + (y + a)^2 = 0.$$

Отсюда получаем, что координаты точки $A\,(x_A; y_A)$ удовлетворяют равенствам $x - 2a - y = 0$ и $y + a = 0$, т.е. $x_A = a$, $y_A = -a$.

Так как второе уравнение задаёт окружность, то $a \neq 0$. При этом условии уравнение можно переписать в виде $x^2 + y^2 - 4ax - \frac{2x}{a} + 2y + 4a^2 + \frac{1}{a^2} = 0$, откуда далее $\left(x^2 - 2x\left(2a + \frac{1}{a}\right) + \left(2a + \frac{1}{a}\right)^2\right) + \left(y^2 + 2y + 1\right) + 4a^2 + \frac{1}{a^2} = 1 + \left(\frac{1}{a} + 2a\right)^2$, и окончательно $\left(x - 2a - \frac{1}{a}\right)^2 + (y + 1)^2 = 5$. Значит, координаты точки B следующие: $x_B = 2a + \frac{1}{a}$, $y_B = -1$.

Для того, чтобы точки A и B лежали по разные стороны от прямой $x = 4$, необходимо и достаточно, чтобы их абсциссы удовлетворяли неравенству $(x_A - 3)(x_B - 3) < 0$, то есть $\left(2a + \frac{1}{a} - 3\right)(a - 3) < 0$. Отсюда $(a - 3)\left(\frac{2a^2-3a+1}{a}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{(a-3)(2a-1)(a-1)}{a} < 0$. Решая это неравенство методом интервалов, получаем ответ: $a \in \left(0\frac{1}{2}\right) \cup (1; 3)$.

Замечание. Для решения задачи достаточно найти абсциссы точек A и B.

4. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - x^2y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 - \dfrac{1}{2}x^2y^2 = 19. \end{cases}$$

Ответ: $(2; \pm\sqrt{3})$, $(-2; \pm\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; \pm 2)$, $(-\sqrt{3}; \pm 2)$.

Решение. Введём новые переменные $u = x^2 + y^2$, $v = x^2y^2$. Тогда $x^4 + y^4 = \left(x^2 + y^2\right)^2 - 2x^2y^2 = u^2 - 2v$ и система принимает вид

$$\begin{cases} 2u - v = 2, \\ u^2 - 2v - \frac{1}{2}v = 19. \end{cases}$$

Из первого уравнения $v = \frac{2}{u} - 2$; подставляем это выражение во второе уравнение и решаем его:

$$u^2 - \frac{5}{2}(2u - 2) = 19 \Leftrightarrow u^2 - 5u - 14 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -2, \\ u = 7. \end{array}\right.$$

Так как $u > 0$, то подходит только значение $u = 7$. Значит, $v = 12$, и в исходных переменных получаем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7, \\ x^2y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 7 - y^2, \\ \left(7 - y^2\right) y^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2 = 3 \text{ и } x^2 = 4, \\ y^2 = 4 \text{ и } x^2 = 3. \end{array}\right.$$

Отсюда следует, что система имеет 8 решений: $(2; \pm\sqrt{3})$, $(-2; \pm\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; \pm 2)$, $(-\sqrt{3}; \pm 2)$.

5. **[5 баллов]** У фокусника есть набор из 16^2 *различных* карточек. У каждой из карточек одна сторона красная, а другая – синяя; на каждой карточке с обеих сторон написано по одному натуральному числу от 1 до 16. Назовём карточку *дублем*, если числа на обеих сторонах карточки совпадают. Фокусник хочет вытащить две карточки так, чтобы среди них был хотя бы один дубль, и при этом никакое число не встречалось одновременно на обеих вытянутых карточках. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 3 480.

Решение. Так как в наборе 16^2 карточек, у фокусника есть всевозможные варианты карточек (для каждой пары чисел $(i; j)$, где $1 \leqslant i \leqslant 16$, $1 \leqslant j \leqslant 16$ найдётся карточка, у которой на красной стороне написано число i, а на синей – j). Рассмотрим два вида наборов карточек.

1) Обе карточки являются дублями. Количество способов выбрать пару карточек равно

$$C_{16}^2 = \frac{16(16-1)}{2} = 120.$$

2) Только одна из карточек является дублем. Тогда её можно выбрать 16 способами, после чего вторую карточку можно выбрать любую за исключением: (а) всех дублей (таковых 16, с учётом уже выбранной карточки), (б) всех карточек, имеющих тот же номер на красной стороне, что и выбранный дубль (таких 15, помимо выбранной карточки), (в) всех карточек, имеющих тот же номер на синей стороне, что и выбранный дубль (также 15). Итак, вторую карточку можно выбрать $16^2 - 16 - 15 - 15 = 210$ способами. Значит, в этом случае имеем $16 \cdot 210 = 3\,360$ способов выбрать пару карточек.

Итак, всего есть $120 + 3\,360 = 3\,480$ способов.

6. **[7 баллов]** Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, и при этом треугольники BOC и AOD – правильные. Точка T симметрична точке O относительно середины стороны CD.

а) Докажите, что ABT – правильный треугольник.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 3$, $AD = 5$. Найдите отношение площади треугольника ABT к площади четырёхугольника $ABCD$.

Ответ: $\frac{49}{64}$.

Решение. а) Несложно показать, что $ABCD$ – равнобедренная трапеция, поэтому вокруг неё можно описать окружность (назовём её Ω). Диагонали четырёхугольника $CODT$ точкой пересечения делятся пополам, поэтому он параллелограмм, и при этом $\angle CTD = \angle COD = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$. Поскольку $\angle CAD = 60^\circ$, в четырёхугольнике $CADT$ сумма противоположных углов равна 180°, и вокруг него также можно описать окружность. Следовательно, все 5 точек A, B, C, T, D лежат на окружности Ω.

Углы ATB и ACB вписаны в Ω и опираются на одну дугу, поэтому они равны, и $\angle ATB = 60^\circ$. Далее отметим, что

$$\angle DBT = \angle DCT \text{ (вписанные, опираются на одну дугу)},$$
$$\angle DCT = \angle BDC \text{ (за счёт того, что } BD \parallel CT),$$
$$\angle BDC = \angle BAC \text{ (трапеция равнобокая)}.$$

Отсюда следует, что $\angle ABT = \angle ABD + \angle DBT = \angle ABD + \angle BAC = 180^\circ - \angle AOB = 60^\circ$. Итак, доказано, что в треугольнике ABT два угла равны 60°, поэтому он равносторонний.

б) По теореме косинусов из треугольника ABT находим, что $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos 120^\circ = 3^2 + 5^2 + 5 \cdot 3 = 49$. Тогда площадь S_1 треугольника ABT равна $AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$. Площадь трапеции S_2 находим по формуле полупроизведение диагоналей, умноженное на синус угла между ними: $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{64\sqrt{3}}{4}$. Отсюда $S_1 : S_2 = 49 : 64$.